



TITLE:

コンクリートダムの熟応力に関する基礎的研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

森, 忠次

CITATION:

森, 忠次. コンクリートダムの熟応力に関する基礎的研究. 京都帝国大学, 1961, 工学博士

ISSUE DATE:

1961-12-26

URL:

<https://doi.org/10.14989/138524>

RIGHT:

920

コンクリート ダムの熱応力
に関する基礎的研究

昭和 36 年 7 月

森 忠 次

コンクリート ダムの熱応力 に関する基礎的研究

昭和36年7月

森 忠次

目 次

ページ

緒 言

1

第 I 編

ダムの応力状態の一般的傾向

5

序 説

5

第 1 章 設計荷重

7

§ 1.1 設計荷重の特性

7

§ 1.2 動水圧および地震力

9

§ 1.3 揚圧力

12

§ 1.4 温度変化

第 2 章 ダムの応力解析

16

§ 2.1 重力ダムの横断面の二次元応力解析

16

§ 2.2 重力ダムの三次元応力解析

20

§ 2.3 アーチダム水平断面(アーチ)の二次元 応力解析

25

§ 2.4 アーチダムの応力解析

30

§ 2.5 応力解析法に関する考察

37

第 3 章 模型実験による応力状態の研究

40

§ 3.1 ダム横断面の応力状態

40

§ 3.2 ダム水平断面の応力状態

47

§ 3.3 重力ダムの応力状態

50

§ 3.4 アーチダムの応力状態

56

§ 3.5	主要荷重による応力状態に関する考察	72
第 4 章	既設ダム の 応力状態の調査研究	77
§ 4.1	ダムの観測	77
§ 4.2	貯水圧によるダムの応力状態	81
§ 4.3	重力ダムにおける熱応力状態	85
§ 4.4	熱応力状態の一般的傾向	93
§ 4.5	熱応力状態に関する考察	99
第 5 章	結 論	104
§ 5.1	設計荷重	104
§ 5.2	設計荷重による応力状態	105
§ 5.3	熱応力状態	106

第 II 編

ダムに生ずる基本的な熱応力状態の解析 109

序 説		109
第 1 章	熱応力の一般論	111
§ 1.1	固有応力	111
§ 1.2	熱応力に関する基礎式	115
§ 1.3	熱応力状態	125
§ 1.4	單純な熱応力状態	130
第 2 章	矩形板の応力解析法とその熱応力状態 の特徴	135
§ 2.1	矩形板の近似解析法	135
§ 2.2	Self-Equilibrating Ortho-Normal	

	<i>Polynomial</i>	137
§ 2.3	歪エネルギー最小の原理の適用, 変分法	139
§ 2.4	応力函数の決定	142
§ 2.5	温度分布と矩形板の寸法が熱応力状態に及ぼす影響	145
第 3 章	自由な矩形板の熱応力状態	151
§ 3.1	計算上の仮定	151
§ 3.2	表面が週期変動をうけるときの温度分布	151
§ 3.3	表面週期温度変動による熱応力状態 (<i>Compensation Line Method</i> による場合)	154
§ 3.4	表面週期温度変動による熱応力状態 (端面の影響を考慮する場合)	156
§ 3.5	表面温度の急変するとき	162
§ 3.6	表面が等速温度変化をうけるとき	164
§ 3.7	水和熱の発生するとき	165
第 4 章	自由な円形および八角形板の熱応力状態	174
§ 4.1	表面が急冷されるとき	174
§ 4.2	一様な割合で発熱するとき	177
§ 4.3	水和熱の発生するとき	178
第 5 章	一辺が固定された矩形板の熱応力状態	181
§ 5.1	解析方法	181
§ 5.2	直線的な分布の温度上昇をうけるときの 取り扱い方	187
§ 5.3	一様な温度上昇をうける場合の熱応力状態	189
§ 5.4	温度変化が y の一次式で表わされる場合の 熱応力状態	192

§ 5.5	温度変化が x の一次式で表わされる場合の熱応力状態	194
§ 5.6	温度変化が y の高次多項式で表わされる場合の熱応力状態	195
§ 5.7	温度変化が x の高次多項式で表わされる場合の熱応力状態	197
第 6 章	一辺が弾性拘束された矩形板の熱応力状態	200
§ 6.1	解析方法	200
§ 6.2	未知函数 $f_n(y)$ の決定	203
§ 6.3	同じ幅の矩形板に接続した矩形板の熱応力状態	205
§ 6.4	一辺で半無限板に接続した矩形板の熱応力状態	212
第 7 章	熱応力問題の新光弾性実験法	217
§ 7.1	熱応力問題の実験法	217
§ 7.2	Epoxy 樹脂の性質	218
§ 7.3	新しい熱応力・光弾性実験法	221
第 8 章	光弾性実験による熱応力の研究	229
§ 8.1	研究の概要	229
§ 8.2	一辺固定の矩形板	230
§ 8.3	一辺弾性拘束の矩形板	233
§ 8.4	三角形および梯形板	235
第 9 章	一辺が拘束された物体の熱応力状態に関する考察	238
§ 9.1	解析ならびに実験の精度	238
§ 9.2	弾性性質の影響	240

§ 9.3	寸法の影響	242
§ 9.4	温度分布の影響	244
第 10 章	結 論	246
§ 10.1	熱応力状態の一般的性質	246
§ 10.2	熱応力の解析法	247
§ 10.3	拘束をうけない物体の熱応力状態	247
§ 10.4	一辺が拘束された物体の熱応力状態	249

第 III 編

コンクリートダム	の熱応力に関する諸問題の検討	251
----------	----------------	-----

序 説		251
-----	--	-----

第 1 章	コンクリートの性質	253
-------	-----------	-----

§ 1.1	ダム用コンクリートの概容	253
§ 1.2	熱特性	257
§ 1.3	力学的性質	262
§ 1.4	体積変化	267

第 2 章	コンクリート打設法の検討	272
-------	--------------	-----

§ 2.1	コンクリートの選択と養生条件	272
§ 2.2	鉛直面内の熱応力状態	276
§ 2.3	水平断面内の熱応力状態	288
§ 2.4	各種打設工法の検討	295

第 3 章	重力ダムの嵩上げに伴う熱応力	303
-------	----------------	-----

§ 3.1	研究対象とした桜山ダムの現状と嵩上げ計画	303
§ 3.2	温度および熱応力計算のための仮定	307

§ 3.3	温度状態	311
§ 3.4	最終安定温度に達したときの熱応力状態	319
§ 3.5	新旧堤体打設継目近傍の熱応力状態	326
§ 3.6	応力状態に関する考察	329
第 4 章	アーチ ダムの熱応力状態	332
§ 4.1	周辺継目	332
§ 4.2	周辺継目を持つ場合の解析法	334
§ 4.3	応力計算の例	338
§ 4.4	応力状態の考察	341
第 5 章	結 論	348
§ 5.1	コンクリートの性質とダム地質の気象条件	349
§ 5.2	ダムのブロックに生ずる熱応力とひび割れ防止工法	350
§ 5.3	ダムの嵩上げ工法	352
§ 5.4	年週期温度変動とそれに伴うアーチダムの熱応力	353
	結 言	355
	参考文献	359

緒 言

ダムを造って自然に流下する水を堰き止め、必要とするときに利用しその最初
は非常に古い時代であったようである。ダムに使用される材料はコンクリート、石塊、土、鋼、
木材等である。これらの中で重要なものはコンクリート、石塊あるいは土を用いたダムであるが、
それぞれ使用材料の異なるところで、その目的、設計原理、施工方法、建設適地等とが異
なるものである。

重力式のダムの古い例としては、すでに16世紀の末に、スペインにおいて灌漑用水を貯える
ためにこれが造られていたことが知られている。その後人類の社会生活の向上とともに利水、
治水、防砂防冲などの目的で多数のダムが造られて来たものであり、現在においても建設中であ
るいは計画中のダムは多数に及んでいる。

他の材料で作られたダムはさて置き、コンクリートダムについて考えれば、その構造形式は
重力式とアーチ式に大別される。重力ダムはコンクリート等から水の重量によってダムに加
わる荷重に対抗せよとあるものであり、アーチダムはアーチ作用によって荷重を支持しこれ
を谷の兩岸に伝える構造とあるものである。重力ダムと同じ構造上の機能を持つものとしては中
空式重力ダムからいって扶壁式ダムがあり、重力ダムとアーチダムの両者の機能を備えるもの
には重力式アーチダムがある。これらのダムの設計方針はたしかに一定に確立されているが、
さらに詳しく構造特性が研究されて、新しい構造形式の発展ならびに設計計算法の改良が
続けられている。

水圧、自重、地震力などがダムに作用するときの挙動については、多数の理論解析ならびに
模型実験の結果によって明らかになっている。実際に築造されたダムに生ずる応力が解析や実
験によって得られる結果と等しいかどうかという事を明らかにするために、実物のダムについて大規模
な観測が実施されるようになった。理論値、実験値ならびに実測値と比較すると、それらに
対応の条件が一致するときには得られる結果もたいくつ一致する。しかしながら、現実の
ダムでは仮定した条件が成立するとは極めておそれがあるので、設計に際して想定されるお
うな応力状態を示さない。その原因は、ダムが設計荷重というものがほとんどないことと、
基礎岩盤その他の環境条件が単純でないことによるものであるといふことは容易に想像されるこ
ろである。それ以外に、熱応力は設計に際して比較的軽視されているにもかかわらず、
ダムに生ずる熱応力が他の荷重による応力と同程度の大さきに達するものであることが明らかにされた。

コンクリートダムに発生する熱応力は、水和熱の発生から生ずるものの放散によるものと、外界の温度変動によるものとに大別される。コンクリートダムにはひび割れが発生し易く、ときにはダムの安全を脅かすような重大なひび割れが生ずることがあることは早くから経験されてきた事柄である。こゝが主として水和熱の発生とその放散に際して生ずる熱応力に起因するものであることも明らかに割、ひび割れを防止するべく、水和熱の発生に伴うコンクリートの温度変動を抑制する工法が考へられ、ダムのひび割れ防止に大きな貢献をした。しかしながら、近年建設されてゐるダムに於いて、かなりひび割れ防止に留意は施されてゐるにもかかわらず、比較的顕著なひび割れと発生している例がある。

一 気温の年変動の影響を考えると、アーチダムに於いて温度低下をうけたときの熱応力に水圧による応力が重なる危険な応力状態になること、設計に際してかかる温度変動が考慮されてゐる。気温変動の影響を考えたときには、当然アーチダム以外の型式のダムに於いてもその及ぼす影響を考慮しなければならないし、日変動の効果についても考察を加ふ必要があり。ダムの観測値によると、水和熱の発生に伴つて生じた熱応力は冷却された後には残留応力となり、その値はかなり大きい。この応力状態はダムにとり好ましくないものであつて、非常に多くの国々において大きな害を及ぼすものであるから、その原因を十分明確にしておく必要がある。

熱応力はダムの設計計算に考慮されるべき重要なものである。在来はせよとすれば軽視されがちであつたが、上記のようにダムに発生する応力の内の主要部を占めるものである。その生ずる効果はダムの安全に密着するものである。逆に危険を及ぼすこともあるので、ダム工学上熱応力状態を詳細に解明する必要がある。本論文はコンクリートダムの熱応力状態を明らかにするものに行つて、基礎的データを研究成果とまとめられてあり、その内容の大幅な進歩の通りである。

材料工學部においては、コンクリートダムに生ずる熱応力が他の荷重による応力に比べてどの程度の重要性を占めるものであるかを明らかにした。元来ダムに最も影響を及ぼす荷重と正確に推定することは不可能な問題である。そこで、実際に加はれる荷重と設計荷重との関係について、最近明らかにされた事柄を示した。つぎに、設計荷重が加はれたときのダムの応力状態を、主として重力ダムとアーチダムについて、理論解析と模型実験によつて研究し、多くの研究者の発表している結果を参照し、その特徴を明らかにした。さらに実際のダムに於ける観測値と計算ならびに模型実験による結果との差異を示し、その差が生ずる原因の1つは熱応力であり、熱応力の大きさは他の荷重による生ずる応力と同程度の大きさのものであることを示した。

第二章においては、ダムの熱応力状態を考へるための基本的な問題の研究結果を述べた。熱応力は温度変動が生じたときには必ず発生するものとはかきつらぬ。そこで、温度変動

と外部からの拘束条件が熱応力に及ぼす影響を明らかにするとともに、ダムに於いてよく現われる物体の形、温度変動状況および拘束条件の中で基本的な単純なものをいくつか取り、それについて熱応力状態を詳細に研究した。この場合に、物体の形、温度変動状況および拘束条件などはそれぞれの図より、熱応力状態にどのような効果を与えるものであるかを明らかにするように努めた。

矩形板の熱応力解析には変分原理（至エネルギー最小の原理、ポテンシャルエネルギー最小の原理）を用いて近似解析を行ない、複雑な形の物体の熱応力解析を行なうには新しく光弾性実験法を用いた。第Ⅱ編においてはこれらの方法の説明も行なわれている。

最後に第Ⅲ編においては、第Ⅰ編および第Ⅱ編において得られた知識を基礎として、実際のダムに生ずる主要な熱応力問題の研究結果を示した。ここでとり挙げる問題はつぎの通りである。第Ⅰはセメントの水和熱が発生しその放散される過程におけるダムの1つのブローフに現われる熱応力状態である。この熱応力は使用するコンクリートの性質ならびに打設工法によって影響されること大きくから、その及ぼす影響についても説明した。第Ⅱはダムを蓄え上げる時に生ずる熱応力である。蓄え上げる途中に熱応力の最も複雑なかつ大きくなるのは、新旧堤体を直接密着せしめる工法であるから、この工法を採用したときの熱応力状態を解析した実例を示した。第Ⅲはアーチダムが完成後に年間最大温度変動をうけるときの応力状態である。アーチダムが岩盤に密着されている場合と周辺地盤によって絶縁されている場合について応力状態を比較した。この場合に、周辺地盤でダムが単純支持されていると仮定したときの解析法と、上下流面ともに温度勾配を生ずると仮定したときの応力状態も示した。

以上によって、コンクリートダムに発生する熱応力状態の基礎的な関係とかが明らかにされることができたと、ダムの設計ならびに施工、さらに将来の研究に役立つ点が多いであろう。

第 I 編

ダムの応力状態の一般的傾向

序 説

すべての構造物がそうであるように、コンクリートダムの設計に際しては、まず先に作用する荷重を想定する必要がある。設計荷重と完成したダムに作用する荷重とが一致することを理想とするが、このような条件を満足させることは至難なことである。そこで、設計荷重としては、ダムの寿命中に起り得ると考えられる悪条件を想定し、その条件になるべく近似した状態をダムに与えるような簡単な荷重を採用する必要がある。設計荷重は学問の進歩とともに変更されるべき性質のものであることはもちろんであるが、ダムの型式、施工の方法、ダム地盤の条件などによっても変えるべき性質のものである。

設計荷重と許容応力が与えられればダムを設計することが出来る。この場合に、設計荷重によるダムの応力状態を知る必要があるが、ダムの形が与えられても正確な応力解析を行なうのは非常に困難である。この原因はつぎに述べるような事情によるものである。

(a) 幾何学的形状が複雑（とくにアーチダムならぬ中空式重力ダムに就いて）であるのみならず、*massive*な構造物であること。

(b) 周辺が岩盤に支持され、堤体と岩盤の弾性係数がともに同程度の値であるので、岩盤の変形を考慮して応力解析を行なう必要があること。

(c) 岩盤ならびにコンクリートの性質が複雑であること。

(d) 施行条件によって応力状態が変わり、この施工条件が複雑であること。

(e) 温度変形力が複雑であり、熱応力の大きさが他の原因による応力と同程度の大きさであること。

このように、正確な応力解析を行なうのが困難であるため、許容応力はコンクリートの強度に比べてかなり小さい値が採用されている。換言すれば大

きい安全率がとらわてゐる。許容応力は設計荷重と応力解析の正確さのやうに定めらるゝものではないが、これらの正確さとは密接な関連を持つてゐるものである。許容応力は、設計荷重と同様に学術的進歩とともに改善されてくるものであり、合理的にタムを設計するには、タムに発生する応力状態を正確に把握する必要がある。したがって、現行の設計荷重による応力状態と実際に建設されたタムに発生している応力状態とを比較してその相違点を明確にするのは極めて重要である。本誌前号においては、以上のような観点から、設計荷重について簡単に検討を行ない、重量なな状態におけるタムの応力状態について考察を加へた。

近年のタムにタムの応力状態に関する研究は目ざましい進歩を遂げ、設計荷重に対するタムの応力状態はだんだん明瞭になってゐる。建設されたタムについて調査すると、設計荷重の加へられどがほとんどないこと、タム地盤の条件が複雑なことから、最悪の設計荷重に対する応力状態を呈しない。これは明らかに予想される現象であるがそれ以外に重要な役割を占めるものが熱応力であることが判明した。

タムに発生する熱応力によつて、コンクリートタムにひび割れが発生し、ときには漏水を生じたり、一体性が欠陥しタムの安全性が減少することのあることは古くから認められていた事柄である。このひび割れを避けるために、セメント改良、温度規制、ブロック法への制限、打設速度の規制など種々の対策が実施され、だんだん明瞭な満足すべき成果を収めてゐる。しかしながら、タムには一体にわたる熱応力が発生しているかという問題もなやむところでは不明であった。これは現象の複雑さのために解析が困難であり、そのうち熱応力の問題も実験も行うに難いことになりつゝある。

最近における各種の観測が実施されるようになり、温度変動によつて生ずるタムの変形やひび割れ状態が明瞭にされるにつれて、タムにおける温度変動の影響は設計上ほとんど無視されてゐるにかかわらず、設計荷重によるものと同程度の影響を与え、あたふたに最重要な要素になることが判明した。熱応力の重要性が認識されることと共に理論的研究も進められ、タムに発生する熱応力状態の大勢が明瞭になってゐる。

本誌前号には、設計荷重の性質とそれによつて生ずるタムの応力状態について述べた。設計荷重による応力状態は、単純な仮定を用いて解析することができ、模型実験によつても調べられる。実際のタムは複雑な条件下にあるため、必ずしも解析結果から模型実験の結果と一致した応力状態を示すものではないから、実測値から得られる応力状態とを検討する必要がある。さらに、実測によつて得られるタムの熱応力状態を示し、タムにおける熱応力状態の一般的傾向が明らかになるとともに、他の荷重による応力状態と比較し、熱応力状態がタムの安定性に及ぼす影響の大きいことを示す。

第 1 章 設 計 荷 重

§ 1.1 設計荷重の特性

ダムにおける主要荷重は静水圧と自重であるがゆえに、実際の主要荷重は非常に明確であり、かつ正しく設計荷重に取り入れることができると考えられやすい。しかしながら、静水圧は明確に規定されるといっても、深さと静水圧強度との関係が正しく与えられているに過ぎず、たとえば貯水池の波浪、浸透水の及ぼす影響等については非常に複雑である。また、コンクリートの単位容積重量がわかれば自重は容易に計算できるわけであるが、巨大な物体のすべての部分において同一の単位容積重量を保持せしめることは困難であり、そのうえ、通常行なわれているような $\phi 15 \times 30 \text{ cm}$ の供試体と実物との間には、配合ならびに締固めの条件に差があるので、厳密にいえば実物の正しい単位容積重量を知ることは困難が多い。

上記の主要荷重以外のものについて考えると、上流側に堆積物土砂による荷重および地震作用による荷重も考えなければならぬ。これらは正確な最大荷重を規定し、この不可能なものである。

したがって、ダムの寿命中に起り得ると思われる悪条件を予想し、その条件にちかづく近似した状態をダムに与えるような簡単な荷重を考え、これを設計荷重として採用している。わが国においては、昭和32年に国際大ダム会議日本国内委員会において制定された「ダム設計規準」¹⁾に規定される設計荷重を用いている。これに挙げられているコンクリートダムにおける荷重の種類は表-1.1の通りである。

表-1.1 設計荷重

ダム荷重	自重	静水圧	泥圧	氷圧	揚圧力	動水圧	地震力	温度変化
重力	○	○	○	○	○	○	○	△
アーチ	○	○	○	○	○	○	○	○
拱壁 ¹⁾	○	○	○	○	△	○	○	○

1) 設計規準には示されていないが、発電用高堰堤設計内規には記載されている。

ただし、この規程には拱壁ダムに関する記述がないので、この形式のダムに対しては、参考のために「発電用高堰堤設計規程」に挙げられていた荷重を記載した。アメリカにおいてもこれと同じ種類の荷重を用いている²⁾。

問題は静水圧以外の荷重の大きさである。泥圧および水圧はダムの建設地質によって定められるものである。一方、現行の設計方針によれば、動水圧および地震力（ここでは、設計規程に使用されている用語に代って、地震時に堰体のうける慣性力を地震力と呼ぶことにする。）はダムの地質のみによるとして決定されるが、実際にはこのように簡単に決定されるものではない。なぜなら、たとえ地質に依りて地盤の振動性状を決めることができるとしても、その振動性状がダムに及ぼす影響は多くの要素によって変わるからである。

ダムにおいて揚圧力の最も大きいのは、通常基礎岩盤と堰体の接合部分である。この場合における揚圧力の大きさは、岩盤の状態、岩盤改良法、止水工法、排水工法ならびにコンクリートの品質と施工法によって変化するので、画一的な値を定めることができない。

温度変化として設計上考えられているのは、気温ならびに水温の年変動による影響のみである。しかも、断面中の平均温度変動のみを設計上考慮すればよいことになる。このことから、厚い断面ならびに静定構造物では温度変化を考慮に入れる必要の無いことになる。したがって、アーチダム、拱壁ダムの水平支材、ミルチプルアーチダムなどにおいてのみ温度変動の影響が考えられている。しかしながら、後に詳細に述べるように、静定構造物においても周期的温度変動をうけるときに熱応力が発生し、しかも断面の厚いものほど発生熱応力が大きい。さらに、アーチダムにおいて上流面と下流面に温度差が生ずるときを考えると、断面の平均温度変動を考慮するときよりも大きな応力を生ずる場合がある。外界の温度変動はダム地質に特有の性質を持ち、上記のようにダムの形状によっても変化するので、設計荷重として採用する場合には、妥当な値の推定が極めて困難である。なお、水和熱の発生と放散の過程における温度変動によつて、ひび割れの発生を伴うことがあり、熱応力がダム完成後にも残存して、前記の荷重によつて発生する応力以外に、固有応力を与えることに注意しなければならない。

以上のよう、設計荷重の決定には多くの難問が存在しているため、これをどうするか合理的な規定に改めようとする努力がなされている。以下には、二、三の荷重について最近の研究によつて明らかになった主要点を挙げることにする。

§ 1.2 動水圧 および地震力

近年、わが国においてはダム振動性状ならぬに地震力¹⁾の作用下におけるダムの挙動に関する研究が長足の進歩を遂げた。その結果は、ダムの設計荷重の規定に与入れられるまでに至っているが、設計荷重を定めるときの方、ならぬにダムの耐震性の判定には幾多の示唆を与えている。

アメリカの C. N. Zanger は 水は非圧縮性であり、堤体は剛体であると仮定することにより簡単化し、電気的相似法によりダム上流面外傾斜と動水圧の強度との関係を研究し、その結果を

$$p_d = \frac{1}{2} \rho_w \omega_0 H C_m \left[\frac{h}{H} \left(2 - \frac{h}{H} \right) + \sqrt{\frac{h}{H} \left(2 - \frac{h}{H} \right)} \right] \quad (1.1)$$

という簡単な式で表わした。²⁾ ここで、 ρ_w = 水平震度、 ω_0 = 水の単位体積重量、 H = 貯水池の深さ、 h = 任意の点の水深、 C_m = 上流面の鉛直とのなす角 ϕ により定まる常数 (附図 - I.1.1 参照) である。(1.1) 式の仮定は正しいものではないが、非常に使用に便利であるので、重力ダムや中空式重力ダムのように比較的剛体に近い振動をする形式のダムに対しては、現在に至るまで、よく使われている。上流面傾斜の影響を推測するのに好都合にある。

しかしながら、畑野氏の研究によれば、重力ダムが貯水時に定常弾性振動を行なうときの地震力ならぬに動水圧は、地震動周期の小さいときには堤体が剛性振動を行なうときよりも非常に小さくなる³⁾ことが明らかになっている。したがって、このような場合には (1.1) 式は適当な修正を施す必要がある。

一方、実際の地震に対してはほとんど定常的な振動を示さない。正弦的な地震力が加えられた初期の間を考えると、一般に上述のような定常的な取り扱いはより大きな動水圧を示す。たゞし、地震周期が動水圧の共振周期より小さければ、動水圧の位相は地震より約 90° の遅れを示す⁴⁾ことが小坪氏により解析された。さらに、この解析理論により、実験された地震加速度記録を用いて動水圧を求め、定常振動論による値よりも動水圧が大きくなることを指摘するとともに、各河川の動水圧の共振周期との関係も求められている。⁵⁾ 地震周期が動水圧の共振周期より短かければ、上述のような位相差により動水圧はダムに対して減衰作用を及ぼすので、動水圧が安全側の値になる。貯水池水深 100 m の場合には動水圧の共振周期は 0.278 sec⁶⁾ であり、実験された地震の卓越周期は 0.2 sec 以下が多い。

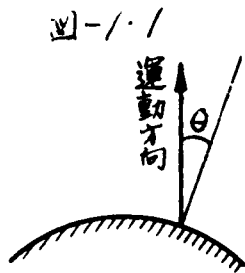
から、高いダムでは満水時に耐震性が大きいわけである。最も危険と考えられるのは、動水圧が地震周期と共振する場合であるが、実際に生ずるような不規則な地震動に対して解析すると、重力ダムには大きな応力を生じないことが明らかになった。⁷⁾

したがって、従来の設計荷重によれば、重力ダムが最も危険なのは、ほとんど満水時に地震作用を受けの場合であったが、これらの研究結果を参照すると、満水地震時には従来の考えられているほど重力ダムは危険ではなく、大きな耐震性と有つものと考えられる。重力ダムの設計に以上の成果を取り入れようとするとき、現象が複雑であるので非常に困難を伴うが、さらに現象を詳細に検討して、地盤の振動特性がわかれば、ダムの規模に応じた耐震設計の行なう方法の確立も望まれる。

一方、アーチダムの場合には上流面が水平方向に大きい曲率を持つてゐるので、動水圧の分布は複雑なものと予想される。このうちの場合について最も単純に考えれば、無限に広い水中に於いて、ダムの面が動く場合を考えればよい。そうすると、図-1.1に示すように、ダムの面に立てた法線と運動方向とのなす角を θ とするとき、 θ による動水圧の変化は、

$$P'_d = P_d \cos \theta \quad (1.2)$$

により表わされる。⁸⁾ この P_d は $\theta=0$ のときの動水圧である。



(1.2)式が従来の取り扱い方であるが、水域は兩岸で制限されていることを考えれば、(1.2)式は再検討を行ふ必要がある。小坪氏の研究によると、ダムが河流方向に剛体的に振動するときには、(1.2)式とは逆に動水圧はクランクにおいて最小、アバットメントにおいて最大となる。^{9) 10)} この場合、動水圧の

共振周期は上流面が平面であるときと変わりがない。また河流に垂直方向に振動する際には動水圧の及ぼす効果は非常に小さい。

しかしながら、アーチダムが弾性振動を行なうときについてはまだ解析が行われていない。この解析のためのデータをアーチダムに作用する地震力を求めるためにも、アーチダム自身の振動性を知る必要がある。そのために、著者等は表-1.2に示す楠保アーチダム(東京電力株式会社、須田貝ダムの締切り用)を用いて大規模な実験を行なった。これらの結果はすでに詳細に発表されているので、^{11) 12) 13)} ここでは主要な一般的事項のみを挙げる。

表-1.2 橋梁ダムの寸法

高さ	堤長 ¹⁾	中心角	上流面半径	堤頂幅	堤底幅
12.8 ^m	72.4 ^m	140°	23.0 ^m	0.6 ^m	1.6 ^m

1) スラストブロックの部分を含む。

(a) アーチダムの固有振動周期ならびに振動形を近似的に解く簡便な方法はエネルギー法を適用することである。この場合アーチダムを水平アーチ素片と鉛直片持梁素片に分け、^{この2つの持つエネルギーを考慮し、}振りの影響を無視してもかなり良精度が得られる。

(b) アーチダムの振動型とその型に対応する固有周期との関係は単純でなく、堤長が高さに比べてかなり大きいときには、水平振動型が1次型のものが最長周期を示さなくなる。一般的には、各種振動型の固有周期が接近している。

(c) アーチダムはかなり揺れ易く、そのため堤体の受け口加速度は地震加速度よりかなり大きくなる。もしこの加速度分布がわかれば、この加速度分布にダムの質量を掛けたるものを荷重とすれば、ダムの応力状態を求めることが出来る。このように荷重ならびに応力状態は現行の設計仮定と非常に異なっており、曲げモーメントの影響が著しく現われる。

(d) 減衰常数(減衰係数: 限界減衰係数の比) α は 0.08 ~ 0.09 であり、貯水されているときには、減衰常数は幾分大きくなる。

これらの結果より、ダムの設計に際しては、かなり面倒ではあるが、想定した地震動をうけたときのダムの振動性状を解析し、応力状態を近似的に求めることが可能である。

ダムに於いて問題になるのは、収縮縫目の存在によってダムの一体性が失われるという点かという点である。この点については堰梁ダムにおける振動実験の結果、Keyのみを有しグラウトされていない横縫目を持つているときに於いても、ダムが一体化した振動を示しているという報告⁽⁴⁾があるから、アーチダムのように縫目にKeyをつけるのみならずグラウトを施す構造物では一体化した振動すると思われるが、堰梁ダムの観測結果によると、逆に一体として振動するとは決定できない。アーチダムが振動するとき、半径方向の変位は必然的に縫目の開く場合と生ずるときと起因するのではなからうかと考えられる。堰梁ダムでは $\alpha = 0.1 \sim 0.12$ であり、上述の橋梁アーチダムより減衰性は大きい。

中壘式重力ダムにおいては、河流方向の地震動を受けるときの変位は、だいたいに於て重力ダムに近似したものであると考えよう。ゴム模型による振動実験の結果をみてもこのことが確かめられる¹⁵⁾。ただ、中壘式重力ダムにおいては、相隣りブロックリ間の結合が弱くから、堰原ダムのように一体化した振動性状は示し難いものと考えられる。中壘式重力ダムに於て検討を要する事項は、河流に直角方向の地震動を受けただけの場合である。このときには、扶壁自体の振動は問題ないが、扶壁中の web の部分が大きい振動を行う。丹羽、火田中 氏より寒川氏の研究結果によれば、上下流面ともに隣りの扶壁に接している場合でも、web に加わる最大加速度は定常地震力の 8 倍以上にも達し、高々ダムでは十分注意を要することが明らかになった。web の振動性状はエネルギー法による近似解析によってもある程度把握されることも明らかになっているが、経験の残った構造物であるので、設計方針が確立されるまでには至っていない。下流部工階¹⁶⁾の扶壁と接合させないときには、web はさらに危険度を増すことも示された。

§ 1.3 揚圧力

コンクリートおよび基礎中の空隙、基礎とコンクリートあるいはコンクリートとコンクリートの不完全な継目を通り、水が浸入し、この水の圧力により埋体重量が打消さる。したがって重力ダムに於ける荷重としては非常に重要なものである。揚圧力の概念が考えられるのは非常に古く、1889 年に Fecht がドイツの Alfred ダムの安全計算に際して、導入したのが最初であろう¹⁸⁾。その後 1895 年に M. Levy が揚圧力の問題と明確に論じ、1897 年にはフランスに於て設計に際する揚圧力の規定が設けられた。このように古くから揚圧力の問題が研究されてきたが、いまだに不明の要素が多く、予知の困難な性質のものである。

揚圧力を荷重として採用するときには、任意の点の単位面積あたりに作用する揚圧力は以下の 2 要素を持つていると考えよう。

(a) その点に於ける滲透水の圧力、すなわち揚圧力強度、(b) 滲透水圧が有効に作用する面積、すなわち有効作用面積。

多くの調査結果によると、良好な配合のコンクリートを入念に施工すれば、コンクリートは非常に滲透性が悪いので、ダムの使用期間中では水が堰頂部に浸入する事はほとんどないと考えよう。したがって、次の要素について

は、コンクリート、基礎等から建屋に於ける不完全部分に浸入した水の圧力が主となると考
てゐる。これらの空隙部分は必ずしも均一に分布してゐないで、揚圧力の予測が極
めて困難となる。

多孔性の物質はもちろん、コンクリートが打継がれた建屋に接合して荷重を伝
る以上は、なにかの実質的部分（不透水部分）による連続に似てゐる。したが
り揚圧力は断面の一部のみには作用すると思ふ。この有効作用面積の大きさにつ
いては非常に多くの議論がある。先に述べた M. Levy は、有効作用面積が 1/2 であ
ると考へてゐる。K. Terzaghi もコンクリートについてこの値が 1/2 に近いもの
であると述べてゐる。²⁰⁾ また近年 L. F. Harza²¹⁾ は有効作用面積は 1/2 である
という考えを発表してゐる。一方 D. C. Henry は建屋に於ける有効作用面積に
ついてはほとんど下流面であるが、0.25 ~ 0.40 位の値をとり得ると思はれてゐる。²²⁾
この議論の要点的な事柄からいへば理論は、S. Lelievsky が考へて詳細に論じた。²³⁾
前に述べたように、揚圧力は建屋やコンクリートに於ける弱點に於いて大なる考へてさ
うな中では水の浸入し易い経路と非常に不透水性の部分が存在し、その寿命中には
不透水性の悪い部分に於て圧力水が浸入すると思ふ必要はないから、設計にあ
つて考へるときには、有効作用面積は 1/2 以下の小さな値にとつてよい。

揚圧力を軽減するためには、上流面附近に於ける止水と透過した水の排水が非常に
効果がある。一方有効作用面積を減じようとする、なにか不透水性の悪い密着コン
クリートを入念に施工する位である。基礎岩盤と埋作の建屋に於ける揚圧力は岩盤の性質、
止水から排水工法によつて著しく変化するが、その設計前に予測するとは極め
て困難である。附図-I-1-2 は I. E. Houk の集めた揚圧力強度に関する資料であ
る。揚圧力の設計荷重を予測するのに極めて参考になる。すなわち、排水孔の効果は著
しいと、岩盤その他の状態によつてその程度に変わると考へてゐることを知らせてさ
う。

わが国の建築では、止水と排水を十分に行なへば、排水孔の位置に於いて、揚圧力
強度は上流面の水圧差の 0.2 倍と下流面水圧の和に等しく、上流面ではそれと水圧に
等しく、その間には直線分布をなすものと思ふといふ。ただし有効作用面積は 1/2 であ
るとする。低いダムで岩盤が良好なときの揚圧力強度は、排水孔のない場合に
あつてもかなり小さな値を採用してよいといふ。Creager の述べてゐるよ
うに、その水平断面の大きさは高さの 1 乗にしか比例しないが、揚圧力の大き
さは高さの 2 乗に比例するから、^{25) 26)} 高いダムに於いては揚圧力の仮定を行なうのに

慎重にすべきである。

揚圧力の及ぼす効果の他の面は、コンクリートの強度に対する影響である。微小な空隙において内圧をうける場合のコンクリートの強度についても未知の点が多いので、現行の規定では許容応力は変更を加えられていない。

§1.4 温度変化

現行の設計基準によれば、設計荷重として考慮すべき温度変化は、 $7-4$ ダム（マリンゲル $7-4$ ダムを含む）および扶壁ダムの水平支材に対し、断面が年周期の温度変動により一律に降下するときのみを考慮すべきになっている。それ以外の温度変動が考慮されなかった理由はつぎの通りである。

(a) 温度変動の現象とそれに伴う応力状態が複雑であること。

(b) $7-4$ ダム以外の形式のダムには、静定構造か静定構造に近いので、熱応力は大きくないと考えられていること。

(c) 一般に、温度変動に対する悪影響は主として表面部部分のみに微細なひび割れを生ずるものであり、ダム全体の安定性には支障を及ぼさないと考えられていること。

しかしながら、古くから得られていた経験によれば、上記のような点に關しては不十分な熱応力の影響を無視することからなされた。それらの主要な点はつぎの通りである。

(a) コンクリート材令の若い間に発生したひび割れが時間の経過とともにかなり内部まで及ぶことがあり、このひび割れが漏水の原因になる。

(b) 岩盤から発生したひび割れはダムが冷却するときにもひび割れが上向きで達し、ダムの一体性が確保されなくなる。

このようにして温度変動の影響がダムの安定性に及ぼす影響は無視できない場合がある。ダムの温度変動を小さくすれば熱応力が小さくなり、種々の危険性の少ないことが明らかとなり、コンクリートの水和熱発生を制限するとともに、コンクリート打設速度も制限されることになった。なお、高さ222mという飛躍的に高い $7-4$ ダムであるBoulderダムの建設に際し、人工冷却を行えば建設中に及ぼすひび割れの防止と、水和熱を早期に除去し継目のクラックと実行することの可能なことが理論的に明らかになるとともに、実際

に成功を収めた。

温度変動に対するひび割れは、主として、セメントの品質、単位セメント量、収縮係数の固さ、リストの高さ、打設間隔、打設時期等の要素によって支配される。これらの要素について検討が加えられ、現在では収縮係数の間隔 15m、リストの高さ 1.5m のブロックが標準として採用され、それによってダムの特徴に応じた施工方法を採用することによって、温度変動を抑えている。すでに 1933 年に開催された第 1 回国際ダム会議においては“重力ダムの内部温度の影響および変形”という問題が討論課題となっている。このとき、石井氏は小牧ダムの温度測定結果から、上記の点について示唆を豊富に提案を行っている。²⁷⁾

ダム建設中における温度変動の影響は、このように主として施工方法を律するこのみに終っているのが現状であるが、コンクリートが硬化したときの温度とダムの最終安定温度との間に差があるため、ダムが最終安定温度に達したときに熱応力が残存することになる。また外界の温度変動によってダムは常に温度状態が変わり、そのために大きい熱応力を生ずる。Hiwassee ダム(重力ダム)の測定結果²⁸⁾によれば、これらの場合に生ずる熱応力の大きさはそれ以外の荷重によって生ずる応力と同程度の大きさであることが明らかになった。したがって、ダムの設計に際して、このような温度変化に対するダムの安全性を検討する必要がある。すでに、Hiwassee ダムの測定結果を検討した結果、かかる問題についての考え方が提案されており、詳しくは第 4 章において説明する。

特殊な例としては、ダムを嵩上げするときを考えると、新旧コンクリートを密着せしめる工法を採用する場合には、部分的に温度変動を行なう新堤体とそれ自身は発熱しない旧堤体との相互拘束によって熱応力が発生する。アーチダムのような不静定構造物においては、上流面と下流面との間に温度差の生ずることを考えると、そのために現在の設計標準において採用されているような断面の平均温度の変動による応力よりも大きい応力の生ずることもある。これらの研究結果は後に述べることにして、ここでは熱応力を設計上考慮する必要があることを示すに止めよう。

第 2 章 ダムの応力解析

設計荷重が与えられたとき、ダムの安全性を検討するためには、なるべく正確な応力状態を知る必要がある。一般に、ダムは *masonry* であり、しかも力学的性質を厳密に決定することは困難な岩盤に接して築造されるものであり、そのうえコンクリートが完全弾性体でないために、正確な応力解析を行なうのは困難である。そのため、各種の近似的な応力解析法が使用されている。これらの各種の応力解析法によって得られる結果がどの程度真の値に近いかが知ることが必要であるので、まず各種解析法の特徴と得られる結果を比較することにする。

§ 2.1 重力ダム横断面の二次元応力解析

重力ダムの鉛直横断面は、ほとんど高さと同幅が等しいので、その正確な応力解析が非常に困難である。そこで多くの近似解法が考えられているが、それらの方法について述べることにする。

(1) 平面保持の仮定を基礎とした解

図-2.1

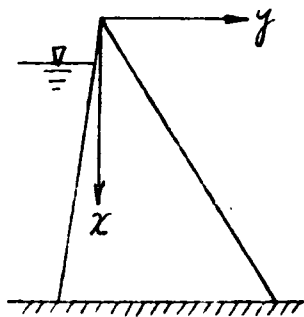


図-2.1 に示すように、重力ダムの横断面形状は一つの片持梁と考えることができるから、最も簡単な応力解析法は、断面の平面保持の仮定が成立するものと考え、曲げ応力 σ_x は直線分布と仮定することである。占束の仮定が用いられ、現在でも一般にこの方法によって応力解析が行なわれている。

このように、鉛直応力 σ_x が直線分布と仮定する解法の中にも、他の応力成分を求める場合に多くの異なった方法が考えられている。

まず第一は水平応力 σ_y および剪断応力 τ_{xy} も直線的な分布と仮定するという考えである。これでは境界条件と釣合条件と同時に満足させることができないので、 τ_{xy} 水平断面中では 2 次曲線形で表わされるという仮定が用いられるようになった。さらに合理的な解を求めるために、W. Cain¹⁾ および新井氏²⁾ は、 σ_x の直線分布と仮定し、他の応力成分は釣合方程式より決定する方法を見出した。貯水池

満水時の場合においては、以上のいずれの仮定においても応力状態にほとんど差が生じない。現在では応力解析には、簡単のために主として、 τ_{xy} を2次曲線と仮定するか、さらに簡単に直線分布と仮定する方法が採用されている。

中空式重力ダムについては、水平断面が等厚でないから応力解析は困難となる。この場合には σ_y のみを直線分布と仮定し、他の応力成分は釣合方程式より求める必要がある。

(2) 半無限楔の解

以上のような σ_x の直線分布の仮定を用いるに、半無限の楔に対する弾性理論解を採用することも考えられている。半無限楔に対する Airy の応力函数 Φ の一般解が明らかにされているので、簡単な荷重条件のもとにおいては比較的容易に解を得ることが出来る。この場合には、ダムの形は図-2.1 に示したような基本三角形に限定する必要がある。この方法による解析した結果、満水静水圧、自重などの主要荷重が作用した状態では、(1) に述べたような直線分布の仮定を採用によいことが、石原と小西の関氏³⁾などによって明らかにされている。複雑な載荷状態の場合については丹羽氏が解析を行ない、このような場合においては、直線分布の仮定から幾分外れることを指摘した⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

たとえば、堤高 $H=57$ m、頂角 $\gamma=39^\circ 30'$ 、上流面勾配 0.1 の

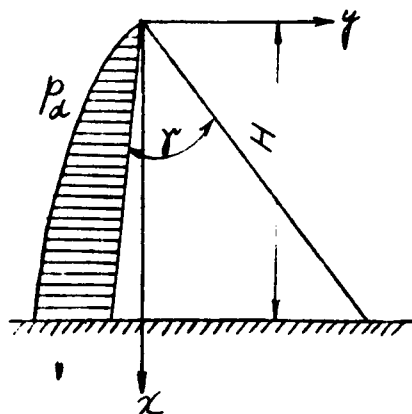
ダム(図-2.2 参照)について、動水圧 P_d が

$$P_d = 0.6848 \sqrt{x}$$

で表わされるとき、堤頂より 40 m 下方の水平断面における動水圧のみによる応力状態は、附図-I-2.1 に示すような結果が得られている。この図における仮定は直線分布と仮定したときの鉛直応力 σ_x を示すものである。この結果によると σ_x の厳密解(実線)との誤差

は上流面で約 -7%、下流面で約 +9% である。このように動水圧自身による応力値の誤差は小さくないが、すべての荷重による応力を考えると、動水圧による応力の占める割合は小さいから、このような誤差の程度はほとんど問題にならない。

図-2.2



に足らないものである。

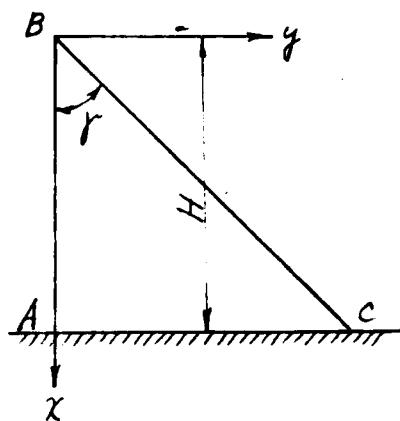
これらすべての研究結果を検討すると、近似的には (1) の方法により応力解析を行ない得る2とわかる。しかしながら、以上に示した方法は、すべて半無限の連続している三角形状の物体に対する解に過ぎないで、図-2.1 に示したように、有限の高さで基礎と接続しているときには、ダム底面の近傍において応力状態が攪乱されるはずである。そこでダム基礎の条件を導入した解が考えられた。つきにこの解法を述べる2とある。

(3) 基礎の接続条件を考慮した解

B. F. Jakobson は、応力分布の函数形を仮定し、この函数の中に含まれる未定係数と歪エネルギー最小の原理によって決定して応力分布を求めた⁶⁾。しかし、F. Vogt が指摘しているように、⁷⁾ 仮定した函数型が、基本三角形頂点からの放射線上では、応力の大きさに比例するという形になっていないために適切な解であるとはいえない。そのため、任意の水平断面以上の部分に見出される歪エネルギーの最小の状態が釣合状態であり、また、任意の水平断面において完全に固定されているという条件になるという部分である。

最近になって、I. K. Silberman は変分法を用いて基礎が完全固定の場合の近似解を求めた⁸⁾。

図-2.3



後述図-2.3 の三角形に対し、応力函数は

$$\Phi = F_e + g(x, y) f(x)$$

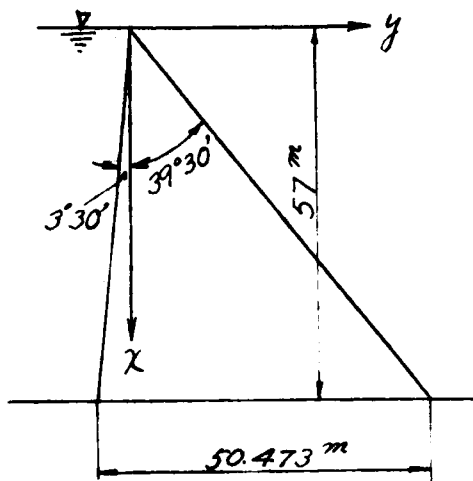
の形に書いた。この F_e は半無限楔の解であり、 $g(x, y)$ はすべての $f(x)$ に対して、辺 AB および BC において応力の境界条件が満足されるように選ぶ。基礎が固定されているときは、三角形 ABC の部分の歪エネルギーが極小にならなければならないから、変分法

を用いて函数 $f(x)$ を決定した。計算例として、Poisson 比 $\nu = 0$ 、頂角 $\alpha = 45^\circ$ のときについて、満水静水圧のみの作用する場合の計算値は附図-I.2.2 の通りであり2と示している。ただし、 w_0 は水の重量である。

この結果をみると、下流面にも引張の鉛直応力が現われ、数多くの解析結果に実験結果と一致した応力分布を示していない。この原因の一つは、計算に際しては、簡単のために応力函数を五次式で表わしたことに由来しているであろう。

別の解法としては、前記(2)で述べたように半無限体の応力函数の一般解が得られているから、基礎における境界条件を満足させるような新しい応力函数を求め、これによって問題を解くことが考えられる。J. H. A. Brahtz⁹⁾ および石原と丹羽氏¹⁰⁾ はこのような方法によって重力ダム の応力解析を行ない、ダム底面附近の応力状態を詳しく解析した。

図-2.4



たとえば、丹羽氏は図-2.4に示す相模川ダムについて、水圧および自重の作用したときの底面の応力分布を求め、結果は附図-I.2.3のようである。図に示して、 E_c と E_R はそれぞれコンクリートと岩盤の弾性係数を表わすものである。この図によれば、すべての応力成分はかなり直線分布から外れている。鉛直応力 σ_x は趾部において直線分布の仮定より小さく、踵部においては E_c/E_R の値によって大きく変化する。 E_c/E_R が大きくなると応力が小さくなる。これ

に反して、水平応力 σ_y は E_c/E_R の値により底面全体にわたって変化が著しく、 E_c/E_R の大きくなると応力が大きくなる。剪断応力 τ_{xy} は踵部において E_c/E_R の値に依りて変化が大きい。

ダムの安定に最も関連の深いものは、 σ_x および τ_{xy} の値である。直線分布の仮定と比較すると、 σ_x は上流面において圧縮応力を減じ、下流面において圧縮応力が増加する。 τ_{xy} は上流面と下流面附近において増加する傾向がある。したがって、直線分布の仮定よりも危険な応力分布を示すわけであるが、最も問題は趾部の σ_x は 3~4 kg/cm² 程度の減少に過ぎないから、直線分布の仮定を用いて趾部の応力に引張が現れないように設計にあれば、この部分の応力が引張強度を越えることはない。したがって、この程度のダムでは直線分布の仮定による応力解析を行なってもよい。しかしながら、非常に高いダム

については、上記の応力差が比例的に増大すると考えられるから、応力の直線分布の仮定のみで解析することは危険を伴うものである。

堰体と基礎とが同一の弾性体であるとすると、ダム本体は基礎の部分に単位円およびその内部に等様に写像し、もとの平面と写像された平面における応力関数の関係式を用いることにより、問題を解くこともできる⁽¹²⁾。しかしながら、これらのように正面から弾性理論解を求めようとすると、いずれも計算労力の大きくなる欠点がある。

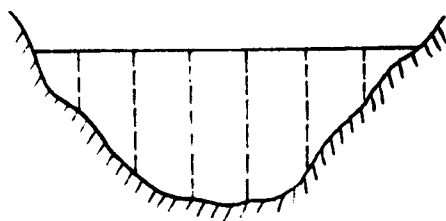
(4) その他の方法

基礎の影響を考えに入れて応力解析を行うためには、Boulderダムの応力解析に際しては、H. M. Westergaard⁽¹³⁾が提唱させた Slab Analogy Method⁽¹⁴⁾が用いられた。堰体温度変形や基礎岩盤の性質など非常に多くの要素を計算に入れようとする方法として、Lattice Analogy Method⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾が考案されている。

最も一般的には差分法を用いることが考えられる。たとえば、P. Lardy⁽¹⁷⁾や O. Zienkiewicz⁽¹⁸⁾は差分法を用いたダム底面附近の応力解析を行ない、応力状態が直線分布と非常に異なる結果を得ている。

§ 2.2 重力ダムの三次元応力解析

図-2.5



重力ダムは、図-2.5に示すように、両岸が傾斜した谷間において、15m程度の幅に収縮継目と設けて築造されるものである。そしてこの収縮継目の構造はつぎの3種に分類される。

- (a) keyで噛み合わせず、グラウトも行わない。
- (b) keyで噛み合わせのみでグラウトは行わない。
- (c) keyと設けそのうえグラウトを行ない、一体性を確保する。

このような構造であると、前節のようない次元応力解析が適用されるのは、わずかに(a)の場合のみである。しかも、このときにおいても、厳密に考えると基礎面が傾斜しているという幾何条件が異なっているわけである。実際のダムを調べると

(b) または (c) の構造が圧倒的に多い。そこで、かかる三次元構造物に対しては力解析を行なう必要がある。

(1) 試し荷重 接り解析法

重力ダムが三次元応力場にあることは古くから認められていたが、計算が困難であり、実行に移されたのは比較的新しいことである。これは組織的に計算の実行できる試し荷重接り解析法がアメリカの開拓局によって確立されたことによるものであり、現在重力ダムの応力解析はほとんどこの方法によって実行されている。この方法は、ダムと鉛直片持梁、水平梁および接り素片の3つの構造要素に分解し、各素片の相対なすきあひける撓みと回転の大きさが等しくなるように、作用荷重が分担して各素片に支持されるものと考えられるものである。この方法の発表は 1933 年 R. Winnerah の研究によるものであり、アメリカの開拓局において完成された¹⁹⁾。§ 2.4 に於いて述べるように、この方法はアーチダムの解析においても極めて有力な手段であり、最近、O. Pfauteller が重力ダムとアーチダムに用いられている試し荷重解析法は全く同一の原理によるものである、しかも近似理論としては妥当であることを証明した²⁰⁾。試し荷重接り解析法によれば、key を有する継目において、グラウト工の有無にかかわらず解析を行なうことができるものである。また、基礎岩盤の弾性性質は F. Vogt の与えた結果を用いて解析に導入することができる。しかしながら、自重による応力状態は、個々のブロックが独立に立つてゐるものと仮定して § 2.1 で述べた方法によって解析している。重力ダムの横断継目には下流面に平行な key を設けることもある。このときには相隣るブロックの間に自重の伝達されることを考えられるので、自重による応力状態は解析仮定とは幾分異なるわけがある。

計算上の手数を問題としなければ、差分法によって三次元応力状態を解析することもできる。§ 2.4 に於いて述べたように、アーチダムについては2のような計算を行なわねばならない例があるが、重力ダムに対して差分法を用いて三次元応力状態を解析した例はないようである。

(2) 試し荷重接り解析と二次元解析の比較

試し荷重接り解析法の確立したアメリカにおいては、非常に多くのダムについてこの方法を以て応力解析が行なわれた。そして二次元解析(鉛直面応力は面梁分布と仮定)

と比較して、ダムが三次元的な挙動を有する場合の応力状態と安定性についての特徴が信用せられた。その結果を示すところの通りである。²³⁾

(a) 接岸部断面における片持梁の基部部を形成する急勾配岩盤面に沿っての滑動係数は増加する。

(b) 接岸部勾配部分の低い区域に基底を有する長い片持梁の滑動係数は減少する。

(c) 接岸部片持梁の急勾配岩盤面に沿う剪断摩擦係数は減少する。

(d) 接岸部勾配部分の低い区域に基底を有する高い片持梁の剪断摩擦係数は増加する。

(e) ダムの中心部分に近い長い片持梁における応力及び安定係数は比較的に変化が小さい。こゝでは荷重の大部分は片持梁が負担する。

(f) 接岸部断面の下流端におけるダム基底に沿う片持梁の傾斜圧縮圧力は減少する。そして構造物中心に向うにつれて荷重の相当部分が接り作用によって支持される。

(g) 接岸部断面の上流端におけるダム基底に沿う片持梁の傾斜圧縮応力は増加し、構造物中心に向うにつれて荷重の相当部分が接り作用によって支持される。

(h) ダム下流面において、下流面に平行な相当の水平圧縮応力が発生し、その大きさは接岸部勾配部分からダム中心に向って減少する。

(i) ダム上流面において、上流面に平行な相当の水平引張応力が発生し、そのための亀裂が発生する可能性があり、その大きさ及び影響は接岸部勾配部分からダム中心に向って減少する。

(j) 水平素片の撓み曲線から比較的高い引張応力の存在の可能性を示す場合には、斜めの亀裂が発生するであろう。この状態は特にダム上部における水平素片の変曲線の附近に発生する。

(3) 試し荷重接り解析の例

わが国においても試し荷重接り解析の合理性が認められるようになり、重要なダムにおいて安全性を検討するため、あるいは断面を縮小して経済的な設計とするためこの方法が用いられるようになった。最初に通称されたのは小河内ダムである。小河内ダムは1948年に本格的な設計が始まり、このダムの高さ149 mという数字は当時のわが国においては飛躍的なものであり、安全性と経済性について根本的な検討を加える必要があった。小河内ダムでは柱状式工法が採用され、継目とクラ

外に計画であったので、試し荷重接り解析を行なうとともに、模型実験（第4章で示す）によって応力状態と安全係数を調べられた。この場合の試し荷重解析は横断継目と全面にわたってクラックがどうかの点についても検討する目的にも用いられた²⁴⁾。解析から実験結果より、横断継目と全面にわたってクラックがと、水平引張に大きな引張応力が生ずるが、全般的に考えれば、中央部片持梁の底面上流側に圧縮応力が増し、剪断摩擦安全率が增大することが判明し、全面にわたってクラックされることがない。

小河内ダムにおける応力状態は第3章で示すことにし、ここでは著者が行った大谷ダムの試し荷重接り解析の例を挙げて、二次元解析との差を具体的に示すことにする。

大谷ダムは松江市の上下水道水源造成のために作られたものであり、その形式は附図-I-2.4～5に示す通り高さ37mのダムである。附図-I-2.5において、岩盤掘削結果は石灰岩の通りであるが、計算にはこれを実地におよそ対称形とした。このダムは横断継目にkeyを設けるが、クラックが生ずるか否かを検討され、ここに示す結果に基づいてクラックを行なわないことと決定されたものである。試し荷重接り解析においては、越流部の埋戻り欠き部分が非常に小さいこの部分にもコンクリートがあるものと考え、基礎岩盤の弾性係数はコンクリートと等しいと仮定した。上記のように継目にクラックされないと仮定して得られた荷重の分担状況と応力を附図-I-2.6に示し、表面の主応力を附図-I-2.7に示す。ただし、試し荷重解析では水位が1m高、 $E.L. 142.00\text{ m}$ と設計水位と仮定している。

片持梁の鉛直応力は、試し荷重接り解析の結果によると、上流面において 47.2 t/m^2 、下流面において 41.2 t/m^2 である。これを附図-I-2.4に示した二次元解析と比較すると、片持梁の分担荷重が減るために曲げ応力が減り、片持梁上流面における自重による圧縮応力の打消されることが著しく低下することがわかる。附図-I-2.7の主応力図によると、上流では最大圧縮応力 -124.0 t/m^2 、最大引張応力 24 t/m^2 、下流面ではそれぞれ -70 t/m^2 および 17 t/m^2 である。圧縮応力の大きさは問題とされたおぼつかない大きさであるが、上流面接岸部附近と下流面中央部に引張応力の生ずることに注意しなければならない。一般に重力ダムは設計において、ダムに引張応力が生ずることは許されないが、この例のように試し荷重接り解析を行なうと引張応力の発生は避けられないとしてもクラックがと、梁の分担荷重が増して曲げモーメントによる水平引張応力がさらに増大するものである。このように生ずる引張応力におとしダムにひび割れが生ずるとしても、そのひび割れがダムの安定性に直接減少させられるが、その引張応力はあり

程度の大きさを許してよいであろう。引張応力の大きさを許容するかという問題は、生じた引張応力の性質と計算方法によって決定されなければならないためであり、現在では統一した基準は与えられていない。

剪断摩擦安全率を求めると、傾斜基礎面に対して表-2.1の通りになる。

表-2.1 片持梁断面の剪断摩擦安全率

片持梁	E	D	C	B	A
剪断摩擦安全率	18.60	10.00	12.10	7.42	7.76 (5.78)

() 内の数字は二次元解析によるもの

ダムにかかると荷重の一部は水平に兩岸に伝達されるため、ダム中央部の基礎において安全率が増加し、全体的には二次元解析（附図-I.2.4に示す）よりも一様な安全率が得られる。このように(2)に述べた一般的な結論はこのダムの解析からも成立している。次に次章に述べる模型実験結果によると、試し荷重解析法により、かなり正確に応力状態を把握できるものであったことがわかる。

別添図として、G. S. Sarkaria が 198 m のダムについて継目の構造と安全率から応力とを比較したものを示すと表-2.2の通りである。²⁵⁾

表-2.2 高さ198mのダムの比較

継目構造		keyなし	keyあり	key, グラウト
鉛直直応力 ¹⁾	上流面	-93	-143	-198
	下流面	-301	-252	-197
上流面水平直応力 ¹⁾		0	0	66
剪断摩擦安全率		3.24	5.62	6.47

1) 単位は t/m^2

この結果においても(2)で述べた一般的な結論が支持される。ダムが高いので水平梁要素の引張応力がかかり大きくなる、という点に注目する必要がある。

§ 2.3 アーチダム 水平断面 (アーチ) の二次元応力解析

(1) 二次元解析法

アーチダムの解析に水平な二次元アーチが独立して存在するものであると仮定することは、最近では低いダムが非常に谷幅の狭い地質に作られるダム以外には用いられない。アーチダムを水平な二次元構造と仮定する考えの中でも、円筒理論と名付けられているのは、ダムの各水平素片が完全に全周環であるとして仮定するものであるから応力解析は非常に簡単である。したがって、設計の予備段階において、ダムの各標高において厚さを決定する目安と得るために用いて有効である。これに対し、弾性アーチ理論と呼ばれている方法は、実際の水平素片の形を対象として (ときには反支持条件も考えて) 解くものであり、鉛直方向の荷重伝達を無視するわけであるから円筒理論よりは優れている。アメリカにおいては、高さ9m以下のダムに対してこの方法で応力解析を行なうこともよいとしている。

一般に弾性アーチ理論がよい近似を与えるのは鉛直方向の荷重伝達が小さい場合であるから、ダムが薄いと、スパンと高さの比が小さいとき、各標高における岩盤変形がかなりよく評価できるといえる。この場合、ダムの頂部および底部附近を除いて、この理論を用いてもよい結果が得られるものである。アーチダムに加えられる荷重の大部分は水平アーチの応力状態の研究はアーチダム構造の研究に欠かすことのできないものであり、古くから多数の研究が行なわれていた。これらでは円弧を主軸としてアーチが論じられているが、円弧が最も適した水平素片の形状であるとはかぎらない。解析が簡単であり、しかもアーチダムに適した水平素片の形状に対する研究が望まれるものである。

近代のアーチダムでは、荷重の大部分がアーチ作用によって支持されるので、アーチの構造上の特性を十分明瞭ならしめる必要がある。それゆえ、非常に多くの研究者がアーチの応力解析法と構造上の特性について研究している。以下には、反支持条件がアーチの応力状態に及ぼす影響について、著者が行なった研究の結果を述べる。

アーチダムを二次元的なアーチに置き換え、しかもダムの三次元的な特性を把握する解析法としては傾斜アーチ法があるが、これは次章において述べることにする。

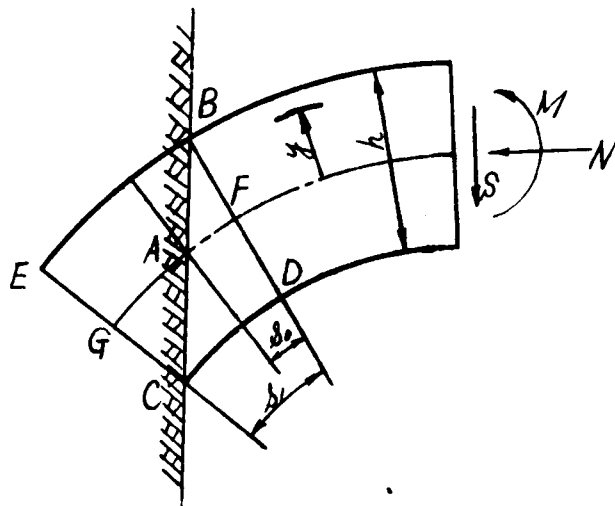
(2) アーチの応力状態に及ぼす非半径方向アバウトメントの影響

従来の梁モデルはアーチなどの構造計算を行なう場合、端面は構造物の重心線に垂

直交平面であると仮定している。しかし、実際にはしばしばアーチ要素のアバウトメントは必ずしも半径方向の条件を満足していない。このような場合慣用法算法は明らかに不合理であり、この端面の支持条件を計算過程に導入しなければ正確な応力計算を行なうことができない。しかしながら、これにより計算がいちじく煩雑になることは、多大の労力を要する試行荷重解析法によるアーチタムの計算など大いに好ましくない。この見地から、端面近くにおいて応力状態が擾乱されないという仮定に立脚して計算を行ない、その結果と光弾性実験により検照し、両者が比較的良好一致することを明らかにした。

(i) 計算式の誘導

図-2.6



ここでは、一般的に図-2.6に示すような単位厚さの曲り梁を取り扱うが、梁の高さは一定、荷重は紙面内に作用する二次元構造とする。この応力分布は単純な直線梁で成立する(2.1)式で与えられ、断面の重心線中立軸は一致するものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y \\ \tau &= \frac{3}{2} \frac{S}{A} \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} (2.1)$$

ただし、断面力は図-2.6に示す向きとし、応力は圧縮を正とする。また

A, I はそれぞれ梁の高さ h であるときの断面積、断面 2 次モーメントを表す。

端面 BC は完全に固定されるものとし、B 及び C を通る垂直断面を BFD, CGE とする。この場合 BCD 領域の応力分布は複雑であるが、単純なために(2.1)式がその場成立するものと仮定すれば、この部分の歪エネルギー W_{BCD} は、

$$W_{BCD} = \frac{1}{2} \iint_{BCD} \left[\frac{M^2}{EI^2} y^2 + \frac{N^2}{EA^2} + \frac{9}{4} \frac{S^2}{EA^2} \left\{ 1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right\}^2 + 2 \frac{MN}{EIA} y \right] dA ds \quad (2.2)$$

となる。ここに ds は中立軸に沿う微小長さである。

もし BCD 領域における断面力が一定であれば、この積分値は BCDE 領域についての積分値の約 $1/2$ に等しく(直線梁では $1/2$)、近似的に B から A 断面間の全梁高さ h についての積分値に等しい。したがって(2.2)式の最初の 3 項は近似的に

B ~ A 断面間の全深高さを h といふ積分値に等しいと考えることができる。しかし BCD 領域では梁の高さが一定でないから最後の項は 0 にならない。すなわち、断面力が一定であって A 断面の値に等しいとすると、近似的に (直線梁) は等しい

$$2 \iint_{BCD} \frac{MN}{EIA} y dA ds \doteq -2 \frac{h \delta_1}{12} \frac{M_A N_A}{EI}$$

となる。ただし、 δ_1 は F から G までの中立軸に沿う長さであり、係数 A は A 点における値を示す。したがって (2.2) 式は近似的に下記のようになる。

$$W_{BCD} \doteq \frac{1}{2} \int_0^{s_0} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{EA} + k \frac{S^2}{EA} \right) ds - \frac{h \delta_1}{12} \frac{M_A N_A}{EI} \quad (2.3)$$

ただし、 $k = (0.5)(E/G) = (12/5)(1+\nu)$ (ν は Poisson 比)、 δ_1 は凸側 (上側) の純スパンが凹側 (下側) の純スパンより短いときは負、逆のときは正となる。

上述のように考えれば、近似的に (2.3) 式より、側定端部が中立軸に垂直な場合の計算は簡単に行なうことが出来るのであって、慣用計算法と比較して最後の項を加えなければならぬことが明らかになった。実際は端部の完全な固定は考えられないのであって、さらに厳密に取り扱う必要のある場合には弾性支持と考へ、基礎の変形を考慮に入れなければならぬ。この場合通常接触面における断面力が計算に用いられるので (2.3) 式の最後の項が接触面の値であることは注意が必要である。また、応力分布についてより大きい仮定を設けるので、(2.2) 式の代りに取扱いに便利な (2.3) 式を一般的に使用すればよい。しかし (2.3) 式の誘導過程より考へて、BCD 領域が梁全体にわたって大きいほど誤差が大きくなり、端部附近の応力状態を (2.3) 式から論ずることができなくなることは明らかである。このように本問題を厳密に解析するためにはもちろん弾性学によらねばならぬが、次に述べる光弾性実験と (2.3) 式による計算値と比較したところ、固定端附近を除けば (2.3) 式による十分近似的な解を求めることが明らかになった。⁽²⁶⁾

(ii) 固定アークに対する影響

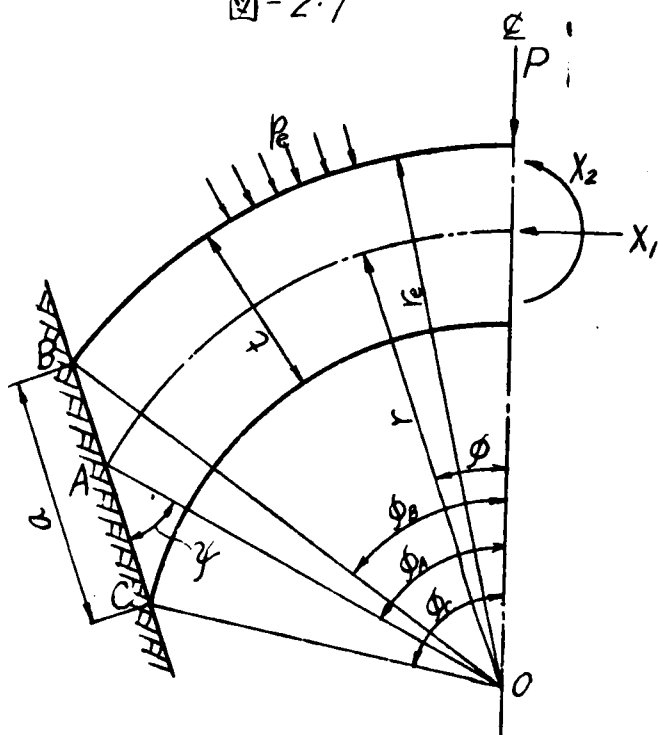
図-2.7 において断面一定の両端固定対称川弧について、外側より半径方向に等分布荷重 p_e を与える場合を考える。いま、

$$p_e r_e = p r$$

とすると、 $\nu = 1/6$ (コンクリートと考へる) としたときの t/r , ϕ_A , $\phi_C - \phi_B$ に対する静定力 X_1 及び X_2 を求めれば附図-I-2.8 のようになる。この場合 X_1 及び X_2 は無次元として示したものである。

この結果より一般に $\phi_C - \phi_B$ が大きいほど X_1 が大 X_2 が小となる。しかしながら、

図-2.7



$t/r = 1/3$, $\phi_A = 40^\circ$ では逆に $\phi_c - \phi_B$ が大きくなるほど X_2 は大きくなっている。
 $X_1 = PR$, $X_2 = 0$ のときには円環の周囲より一様な圧力の作用する場合の応力状態を表わす。一般にクラウン下流縁およびアバウトメント上流縁に引張応力が惹起される方向にあるが、 X_1 が増大して X_2 が減少すれば通常この引張応力が減ずるものであり、附図-I-2.8 より $\phi_c - \phi_B$ を大きくすれば応力状態の改善されることとなる。

たとえば、クラウンにおける縁応力を示すに附図-I-2.9 に示す通りである。大抵の場合に $\phi_c - \phi_B$ の大きさは、すなわち通常のアーチダムで見られるような平行に近い非半径方向アバウトメントにあるほど、クラウンにおける応力状態は良好になる。しかし、 $t/r = 1/3$ のようにアーチが厚いとき、 $\phi_A < 50^\circ$ においては逆に応力状態が悪くなる。このような寸法のアーチはダムの底部に於いて起るものであり、ダム底部においては、§3.4 に於いて示すように、クラウン下流側に於いて引張応力が生じ易いものであるから、十分注意する必要がある。

t/r が大きい場合はもちろん曲り梁として考えねばならない。^{27) 28)} また基礎の変形を考慮すればかなり応力分布に変化を生ずる。コンクリートアーチに於いて端面 BC で打ち継ぐときは BC 面に於ける合力の大きさと方向も考慮せねばならない。アーチダムの慣用計算法では端面が半径方向であると考へ、基礎掘削もこの条件を満足するように努力

以上から、以上のとおりアーチダム全体にわたる応力状態のみならずアバウトメントを
らわね基礎岩盤に於ける応力状態についても詳細に検討を加え不安がないかどうかを確
かめる必要がある。

(3) アーチの応力状態に及ぼす岩盤変形とサドルの影響

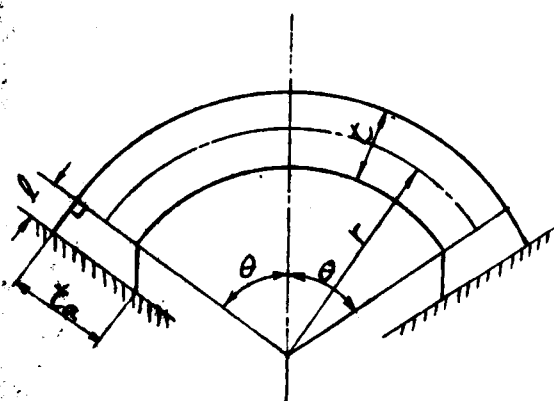
アーチダムに於ける重要問題の1つは、基礎岩盤の弾性性質に於いてアーチダムの
状態にどのような影響を及ぼすかということである。基礎岩盤の弾性係数が小さいほど、アーチダ
ムはアーチ作用により荷重を支持する機能が⁽²⁷⁾⁽³⁰⁾増大するので、基礎岩盤の弾性係数の小さい
に於けるアーチの応力状態を十分研究が必要がある。このために基礎岩盤の弾性係数と
アーチの応力状態の関係を研究した。

一方、最近のダムではサドルを設けられることがある。この場合には、サドルの大きさや形状
とアーチの応力との関係を調べる必要がある。そのためにこの要に於いても調べることとした
ので、アーチダムのアバウトメント附近に於いてアーチと下流側に於いて、アバウトメント
を設けるにアーチ自身に於ける応力状態を改良しようとする案が採用されることもある。本節
では、この場合のアーチ増厚部分もサドルと見做すことにする。以下に解析結果を示すが、
この結果は実験的にも検討を行なった。⁽³¹⁾

(i) アーチの形状

岩盤の弾性係数ならぬにサドルの寸法によってアーチの応力状態がどのように変わるかを調べる
ために、アーチの寸法は図-2.8に於いて、中心角 $= 100^\circ$, $t/r = 0.3$ という比較的

図-2.8



厚いアーチと見做すことにした。これに附加
されるサドルについては表-2.3に示す
各種類のものも考へた。

アーチダムの構造要素としてアーチ
と見做すために、基礎岩盤の変形計算
に際しては、基礎展開図の長さ⁽³²⁾と幅の比
 b/a は、サドルの底幅がアーチの厚
さ⁽³²⁾に等しい場合に1ととし、その他の
場合には b/a とサドルの底幅に反比例

に置かすことにした。このように仮定して、上流面に静水圧 p が作用しに於ける応力状
態を求めた。

表-2.3 サドルの記号と寸法

記号	ta/t	l/t	ta/t	l/t	ta/t	l/t	ta/t	l/t
	A		B		C		D	
O	—	—	—	—	1.00	1.00	—	—
I	1.25	0.50	1.25	0.75	1.25	1.00	1.25	1.25
II	1.50	0.50	1.50	0.75	1.50	1.00	1.50	1.25
III	2.00	0.50	2.00	0.75	2.00	1.00	2.00	1.25
IV	—	—	—	—	3.00	1.00	—	—

(ii) 基礎岩盤の弾性係数の影響

IIの系列についての計算結果を本表の付図-I・2・10の通りである。コンクリートと岩盤の弾性係数をそれぞれ E_c , E_R で表わすと, E_c/E_R が大きくなるほど, クラウンの応力状態は悪化し, 逆にアバットメントにおける応力状態は良好となる。これは曲げモーメントの増減によるものである。 $E_c/E_R > 8$ のときには, かなり大きいサドルをつけてもクラウン下流側に引張り応力が現われずこれを避けることができる。

(iii) サドルの影響

付図-I・2・10に示れるサドルの高さが変化したときのアーチの応力状態を次の通り。サドルが高くなれば, アーチの中心角が大きくなるのと同様の効果が現われ, クラウンのサドル前アバットメントにおいても応力状態が良好となる。

付図-I・2・11はCの系列について, サドルの底幅が変化したときの応力の变化の様子を示したものである。一般に, サドルの底幅によるクラウンの応力には大きな変化を生じないが, アバットメントにおいては著しい変化を示す。特にサドルの底幅を大きくすると岩盤の弾性係数が大きくなったときと類似した性質を示し, クラウンの応力状態はやや良好となるが, アバットメントにおける応力状態は悪化する。したがって, E_c/E_R 比較的小さいときにはわざわざサドルの底幅を拡げると, アバットメントと流側に引張り応力を生ずる可能性が現われて好しくない。岩盤が悪く E_c/E_R の大きいときには, サドルの底幅を大きくすると軟弱岩盤による悪条件がある程度改良するのの効果がある。

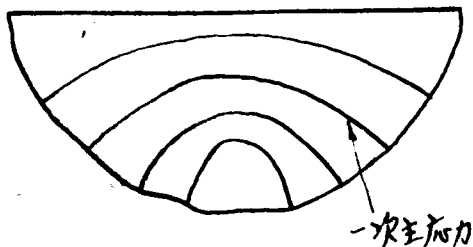
§ 2.4 アーチダムへの応力解析

前節に述べたように、アーチダム⁽¹⁾の主要構造要素であるアーチ自身の応力を求めること以外に、アーチダムの三次元的な機能と正しく把握することは必須の事項である。本節では、アーチダムを三次元構造物として応力解析を行う方法と、その応力状態について述べることにする。

(1) 傾斜アーチ法

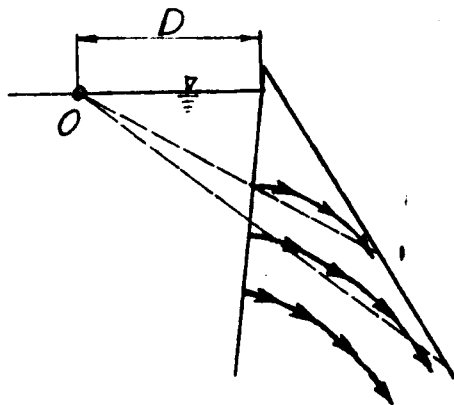
上記のように要求に応ずる一つの簡単な方法は、フランスの A. Coyne の発表⁽²⁾による傾斜アーチ法である。アーチダムの模型実験によると、ダム下流面における主応力図

図-2.9



一次主応力

図-2.10



は、図-2.9 に示すように、一次主応力（圧縮応力の大きい方）はアバウト大⁽³⁾に傾斜し、この傾斜はダム下部ほど顕著である。ダムの内部には図-2.10 に示すような状況で上流面は作用する荷重が伝達されるものと考へられ、その図に示すように、設計水位の標高において、クラウソン⁽⁴⁾の距離 D だけ上流側に隔たれた位置に一本の水平軸 O を考え、この水平軸の回りに同軸の平面で切断したアーチを考へる。このアーチは上下の相隣のアーチとは全く独立した挙動をするものと考え、ダムをこの二次元的なアーチの集積したもの置き換えて解⁽⁵⁾くという方法である。

この解析法で得られる結果を示す下記の通りである。アーチが傾斜した

平面に於て切断されるために、水平断面よりもライズが増加し、アバウトメント⁽⁶⁾に於いてはクラウソンに比べて厚さの増加が著しい。そのためにアーチの応力状態は一時的に水平断面を採用するよりも良好となる。

この解析法を理論的に正当性が証明さるものではない。むしろ多数の計算ならぬ実験の結果を適宜し、経験的にアーチダムの挙動の性質を把握し、その特性を生かした解析法である。したがってかかる場合にも適用するものではない。高さに比べ

ア-4 タムでは片持梁作用が卓越するので、かかる場合には不都合であると考へられてゐる。

(2) 殻理論による解法

ア-4 タムは曲面構造でありから、本来は殻理論により解かれるべきものである。この方面の研究も古くから行なわれ、たとえば、H. M. Westergaard³⁵⁾ は Stevenson Creek タムについて近似解を求めた。また F. Tölke³⁶⁾ および J. Lombardi³⁷⁾ はその著書において殻理論による解法と計算例を求めている。殻理論の基礎微分方程式が複雑で一般技術者になじみ難いことを、タムの形を変更すれば全く最初から計算を行ふ必要のあること、複雑な条件（たとえば建設途中における湛水、クラウチ時期の急激な水位差など）を計算に導入しきかねるなど、設計に用ゐられることは少なかった。殻理論による応力解析を行なつて、他の方法によつて得られる結果と比較検討し、タムの挙動をより正確に知るために用ゐられることが多かつた。

最近では M. Herzog³⁸⁾ がかなり簡単な解法を案出している。一般にこれらの理論を用ゐると、厚さか曲率半径とかの parameter が組織的に重要なことになり応力状態を知るのに好都合である。近年のア-4 タムでは、より合理的な形を追及し、鉛直方向にも大きな曲率を持つものか採用されるようになって来た。殻理論による組織的な研究によつて、谷の形、岩盤の性質などにより合理的なタムの形状を選んで得ようとする資料の得られようことが望まれる。

(3) クラウン片持梁法

ア-4 タムを近似的に解析する方法の一つとして、ア-4 タムを水平なア-4 と鉛直な片持梁の2つの構造要素に分解し、それぞれが加へられる荷重の一部を支持すると考へるとき、両者の構造要素の撓みが一様なる荷重分担の状態が得られればよいという考へ方が古くから採用されてゐた。クラウン片持梁法はその最も簡単なものであつて、水平方向にはア-4 の分担荷重は一様であると仮定し、ア-4 のクラウンにおける撓みをクラウン片持梁の撓みと一致せしめる方法である。これはつぎに述べる試み荷重解法に発展したものであり、試み荷重法と最も簡易化したものと考へてよいものである。

この方法は比較的速かに実施でき、タムの三次元的挙動を考慮に入れたとしてもよいわけであるから、二次元解析より進んだものとして予備設計に、あるいはせめていタムの設計に利用されてゐる。

(4) 試し荷重解析法^{39) 40)}

この方法は、§ 2.2 (3) において述べたように、重りダムにおける試し荷重採り解析法と同じく理論上その正当性が保証されている。アークダムを幾つかの水平アーク集片と鉛直面橋梁集片に分け、両構造要素の相対変位（半径方向撓み、接線方向撓みと回転）を一致するようにそれぞれの構造要素の支持荷重を決定し、その荷重によって応力計算を行なう方法である。この方法は現在、*Abridged Trial-Load Method* と *Amplified Trial-Load Method* に大別されている。これらの方法の詳細は右図各図が、大要つきの通りである。

Abridged Trial-Load Method は、アークが等厚の片状であり、基礎岩盤の弾性係数がコンクリートの弾性係数に等しいと仮定し、アークのアーバメントは鉛直面であると仮定したものである。この方法によってもつぎに述べる *Amplified Trial-Load* によつて得られる値との誤差は、10~15% 程度に抑えられ、多くの計算例から確かめられている。

一方 *Amplified Trial-Load Method* は *Abridged Trial-Load Method* において単純化のために採用した仮定をすべて用いない。しかも非常に複雑な条件（たとえば不等厚アーク、岩盤の弾性係数の変動、ひび割れを生じた片持梁）をも解析に導入することからである。

複雑な条件を導入し詳細解析を実行するほど計算が面倒になる。そこで上記の成分の変位をすべて一致させるとはせず、一部分の変位成分のみ一致させる方法がとられることがある。それぞれの場合についてつぎのように分けられている。

(a) 半径方向調整 ----- 半径方向変位の一一致

(b) 接線方向調整 ----- 接線方向変位の一一致

(c) 振り調整 ----- 回転角の一一致

この中で最も影響の大きいのは (a) であるから、単純のために (a) の調整のみ実行されることも多い。さらに詳しく解析を行ないた場合には (a) と (b) の調整、最も正確には (a), (b), (c) 全部の調整を実施する。一般的には接線方向調整を実施すると、ダムの半径方向変位に大きな変化はないが、そのためにアークの曲率力は変動する。振り調整を行なうと、振り抵抗を考慮をわけであるから、ダムの半径方向の撓みはかなり減少するとともに応力も減少するものである。一般には振り調整は接線方向調整より影響が大きく、ダムの形によっては、これがかかり大きな影響を及ぼす場合のあることに注意する必要がある。Bureau of Reclamation では、多数のダム

について Amplified Trial-Load Method で計算した応力と、その他の方法により求めた応力と比較して、採用した計算法により得られる応力状態の特性を明らかにしている。簡易計算を行なうときにはこれが大いに参考になる。⁴¹⁾

(5) 試し荷重解析の例

外国に特にアメリカにおいては非常に多くのアーチダムが試し荷重法により解析され、その結果を用いて設計されている。わが国には上推葉ダム⁴²⁾の解析に用いられたのが最初である。著者もすでに §1.2 に述べた樫原アーチダムの振動時の応力解析にこの方法を採用した。ここでは、以後の各種研究結果と比較する便宜上、天ヶ瀬ダムの解析結果を挙げて、クラウン片持梁法と試し荷重法により得られるアーチダムの応力状態の特性を比較する。以下の計算は建設省天ヶ瀬ダム工事事務所において実施されたものである。

図面-I.2.12 は天ヶ瀬ダムの第1次計画に採用されたダム形状である。高さ 61 m、堤頂長 342 m、堤長/堤高 = 5.1 のかなり幅の広いダムであり、同じにはサドルを付けクラウンに対して対称形としている。設計要項は表-2.4 に示す通り

表-2.4 天ヶ瀬ダムの設計要項

堤頂標高	82.00 ^m	堤底標高	15.00 ^m
設計水位	79.50 ^m	堆泥面	57.00 ^m
コンクリート比重	2.35	堆泥の水中重量	0.8 ^{t/m³}
堆泥圧係数	0.4	水平震度	0.12
E_c	$2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$	Poisson 比	0.2
$E_R(\text{EL.60以上})$	$3 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$	$E_R(\text{EL.45以下})$	$5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$
温度変化	(註)		

(註) 温度降下 T は $^{\circ}\text{F}$ とし $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{680}{t+8}$ となる。

ここに、温度降下 T は $^{\circ}\text{F}$ 、アーチの厚さ t は feet。

である。アーチ素片に関する主要な数値は表-2.5 に示した。

クラウン片持梁法と試し荷重解析法による計算値の比較は附図-I.2.13 に示す通りである。後者の解析は、Amplified Trial-Load Method を用いて半径方向調整の外が行なわれたものである。EL. 73 m 以上はアーチ作付けがないものとし、片持梁の軸線は鉛直であると仮定された。この

計算には温度降下は考えていない。

表-2.5 ア-4 素片の主要数値

標高(m)	82	73	60	45	30
t/r	0.0304	0.0430	0.0749	0.1208	0.2069
中心角	105°00'	106°08'	112°00'	114°35'	109°22'
温度降下(℃)		7.210	5.311	4.382	3.785

t : 厚さ, r : 中心線半径

試し荷重解析とクラウン片持梁法とに於いて、個々の部分に於いて、荷重分担および底力の値に差があるが、全般にわたっては、クラウン片持梁法によってダムの変動と解析とを比較することが認められる。この解析によれば、クラウン片持梁の基礎に於いて大さ一引張応力を生ずるので、これを軽減する対策が望まれるわけであり、一方では片持梁の底面上流側にはひび割れを生ずるものと仮定して解析を進める必要がある。しかし次第にその模型実験の結果、この引張応力はかなり小さいものであることが明らかになる。

このダムでは荷重の大部分は水平ア-4素片が支持しているから、もし片持梁にひび割れが生じても、ダムの応力状態に重大な変化は生じないことが推測される。実際にクラウン片持梁の底面上流側に全厚さの $1/3$ ひび割れを生じた場合を考えた解析の結果は附図-I-2.14の通りである。ア-4底力の増加は最大 4.5 kg/cm^2 程度に過ぎない。したがって、ひび割れを生じても漏水の危険を心配すれば、ダムの安全性は確保されるであろう。ア-4 ダムに於いて引張応力とどの程度まで許すかという点について、明確な基準はなにも基準を定め難いものである。参考のため、アメリカの Bureau of Reclamation が片持梁底面で許すものと考えている引張応力の値を挙げると、F流面の圧縮応力が 31.6 kg/cm^2 以内であり上流面の引張応力が 10.5 kg/cm^2 を越⁴³⁾えなければ、片持梁底面にひび割れを生ずることを必要はないものとしている。

つまり、温度降下のみを生じたときの応力状態を求めた。年平均気温に於いてクラウン片持梁を、温度降下量は

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{680}{t+8}$$

によって求めることになる。ここに、 T は温度降下量(°F)、 t はダムの厚さ (foot) である。計算結果は附図-I-2.15 に示すように、最大のア-4底力は $\pm 5 \text{ kg/cm}^2$

以内である。天り坝ダムはかなり薄いため、表-2.4に示す通り温度降下量は幾分大きい。発生応力は比較的小さいことがわかった。設計に際しては、高さ方向のみならず断面中では一様な温度変化を計る考え方が普通であるが、氷庫内において示すように上流面と下流面との間に温度差のある場合にはかなり大きい熱応力が生ずるものがある。

(6) その他の方法

イギリスにおいては非常に手数をかけて、差分法によってアーケダムの応力を求め計算が実行された。⁴⁴⁾ これは変位に対する弾性体の微分方程式を差分式で表わし、relaxation法によって解いたものである。アーケダムの三次元的な構造特性と正しく与えるために、立体格子を造り、格子の変位を未知数として円筒座標で表わした微分方程式を差分式で表わした。Dokan ダムについて計算を行なっているが、そのために未知数の数は極めて膨大なものとなった。格子数は350であって、10%以内の精度で応力が求められたと述べている。ただし、この解析と平行にゴム模型による応力状態の実験的研究が行なわれたこと、relaxationを行なうときには、最初加振定値は実験値を参照して選ぶことが出来る便宜があった。

途方もない面倒な計算であるが、自重、水圧による応力状態の他に熱応力状態も求めた。たとえば、表-2.6に解析結果の最大応力を示す。この結果によると、

表-2.6 Dokan ダムの最大表面応力 (kg/cm²)

応力成分	(1)	(2)	(3)
鉛直圧縮	23.9	28.8	30.2
鉛直引張	8.4	8.1	14.1
水平圧縮	33.7	30.9	36.2
水平引張	なし	なし	9.1

(1) 水圧と自重のみを考へる

(2) 最高温度時の熱応力を(1)に加算

(3) 最低温度時の熱応力を(1)に加算

ただし、クラウトは年平均気温以下2.8℃において実施。

温度降下によるアーケダムにかなり大きい引張応力が生じている。こうして得られた結果は、試し荷重解析法によって求められていた結果と決定的に大きい差はない。

ダム模型によって行われた実験結果ともかなり良く一致している⁴⁵⁾。この研究のように細かい格子を作れば差分法によりかなりよい近似人が得られてくるものと考えられ、応力集中の状況も知ることが出来る。ただし、変位を求めたわけであるから、応力を求めるためには得られた変位に差分法を適用して微分するのじ、一般的には応力の値は変位ほどに精度が良くない。

このように有限差分法で解析しても、解析の基本仮定であるダム砌体の基礎の連続性、均質等方性、完全弾性などか必ずしも成立しない。また、この方法では片持梁にひび割れが入るとき、途中の高さまでクラックが入るときなどの条件は事実上導入することは出来ない欠点がある。したがって設計計算に差分法を用いるのは不適当である。

差分法を適用する場合、R. Prişcu と M. Constantinescu はダム中央面の変位に対する微分方程式にこれを適用して割合簡単に問題を解いた⁴⁶⁾。この場合、鉛直方向変位は無視し、中央面が単曲面となる場合のみを取り扱っている。Neyarvanu ダムに適用して計算した結果、附図-I・2・16 に示す変位を得ている。このダムは正面展開図で谷がほとんど 90° の開きをしているので、境界上に正方形格子の格点を選ぶことが出来る、差分法を適用するに極めて便利である。図よりわかるように未知数は 28 である。したがって未知数は半径方向変位 28 個、接線方向変位 21 個、合計 49 個である。このようにして得られた変位を微分して断面力を求め、さらに表面応力を計算した。それと類似のダムの模型実験と比較したところ満足すべき一致が得られたと述べている。この全計算の所要時間は 800 時間であったと記載されているから十分設計に利用できるであろう。この方法は試し荷重のように複雑な条件の導入には適切を欠くけれども、電子計算機を使用すれば非常に能率よく実施することが出来る種類の計算であるから、今後設計段階において有効に用いられるものと思われる。そのため、このような方法によって得られる結果の精度についてもう少し詳しく研究が必要である。

§ 2.5 応力解析法に関する考察

(1) 重力ダム

重力ダム横断面の二次元応力状態の解析には、基礎の影響を考慮して

半無限の梁と考えることができれば、鉛直応力が直線分布を呈するという仮定に立脚しても良い。しかしながら、実際には基礎に接着した構造物に於ては、正確な応力解析は基礎岩盤の影響と解析に導入が必要である。このための解析は面倒であるが、労を惜まなければ工学的に必要な程度の精度で応力状態を知ることが出来る。また現在までに得られている解析結果を参照すると、直線分布の仮定にとっても誤差をある程度正しく指定することが可能である。基礎岩盤の影響をうけて、ダム底面付近では応力が攪乱されることが直線分布と異った状態を示し、応力状態は悪くなる。しかしながら従来の直線分布の仮定に設計した既設のダムは危険な状態であるというものは少ない。

一方、現在のほとんどのダムは斜め主構造による三次元的な構造作用によるものである。このための有力な解析法は試し荷重法解析法がある。この方法は面倒ではあるが、各種の構造上の条件ならびに載荷条件に対しても適用可能なものである。この方法によって解析した結果を二次元解析の結果と比較すると、荷重の一部は水平に両岸に伝達されるため片持梁の分担荷重は減少し、鉛直断面の応力状態は良好となる。しかしながら必然的に水平に近い方向に引張応力が現われる。この引張応力によってもしびひ割れが発生するとともに、ダムの安定性には重大な欠陥を与えるものであるから、ある程度の引張応力の発生は許容されるものである。この引張応力の許容値について、今後の研究に待つところが多い。

以上の結果を総合すると、三次元構造作用を呈する重力ダムのより正確な応力分布を求めようとするとき、まず試し荷重法解析法によって分担荷重を求め、つぎに、それぞれの構造要素の分担荷重による応力状態をなるべく正しく計算するのがよい。重力ダムの破壊の主要原因は滑動である。ダムの三次元的な構造作用を考えると、剪断摩擦安全率が場所的に均一化するため、最高ブロック底面に於ける剪断摩擦安全率（この位置が最小）が増加し、ダムは二次元構造へと有利安全になる。

(2) アーチ ダム

アーチダムは重力ダムより薄いという点では応力解析が容易であるが、曲面構造物であるという点で非常に解析が面倒である。このために各種の解法が考案されているが、最も正しい結果を得ようとする期待では試し荷重法であり、この方法は、場合に依りて適宜簡易化して使用できるとして、複雑な条件をも考慮できる利点がある。これを最も簡易化された方法であるクラウン片持梁法を用いても、ダムの

応力状態について十分実用的な知識が得られる。ダムのかたちに応じては必要斜アーク法、数値理論、あるいは差分方程式による解法を有効に利用することができる。R. Prigou と M. Contantinescu が用いたような差分方程式の利用法は、今後さらに進むものと考えられる。

これらの計算法はすべてアークのアバットメントが半径方向であると仮定しているが、アバットメントが半径方向よりも平行に近いと、薄くて中心角の大きいアークではクラウンの応力状態が良くなる。しかしながら厚く、中心角の小さいアークでは逆にクラウンにおける応力状態が悪くなる。後者のアークはアークダムの底部に見られるものにあるから、底部のアークにおいては特に注意して応力状態を研究する必要のあることを示すものである。一方基礎岩盤の弾性係数が小さいときには、片持梁の分担荷重は小さくなるので必然的に応力が軽減されるが、アーククラウンにおける応力状態が悪くなる。これを改善するためには、接岸部付近においてアークを拡幅するか、サドルをつけサドルによってアークを増厚し、接岸部の厚さを増大すれば一変力果がある。しかしながら、基礎岩盤の弾性係数が極度に小さいときには、アーククラウンにおいて引張応力の生ずる危険性を避けることができないから、基礎岩盤そのものを改良するか、アーク中心角を大きくとらなければならぬ。

設計条件として挙げられているような年周における温度変動の埋体における平均値を考えると、大きいアークダムほど断面が厚くなるために温度変動は小さくなり、一方では温度変動以外の荷重による発生応力は大きくなる。高さ70m程度の天ヶ津ダムにおいては、この温度変動による応力は $\pm 5 \text{ kg/cm}^2$ 程度にあるから、これ以上のアークダムにおいては、設計条件として挙げられている温度変動はそれほど重要でないことになる。

次章に述べる模型実験の結果によれば、理論的により正しい解法による結果はやはりより正確な応力状態を与えることが知られる。ある程度正しい結果を得ようとするとき、上述のように計算がかなり面倒であるので、近似度が高いながらもさらに計算の簡便な解析法と設計上の組織的な方針の得られることが望まれている。

第 3 章

模型実験による応力状態の研究

前章において非常に多い解析法を示したが、実用に使おうものはいずれも条件を簡易化した近似解析法にあつたので、その方法がどの程度の妥当性を持つ、いゝものが実験的に確かめなければならない。実際に築造されたダムにおいては非常に複雑な条件のもとにあり、机上における計算仮定と同条件にないため、計算結果と実測値とがどの程度かけ離れるかは止むを得ないものである。この問題をゆるがせにすることはできないので、近年は実物に対する観測が極めて活発に行なわれている。実測値の荷重の大きさとも関連して論じなければならぬ問題であるから、次章において述べることにする。

前章に示した解析法、妥当性を確かめるためには、なるべく計算仮定に一致した模型による実験的に検証する必要がある。このような模型実験は古くから行なわれていて、解析法の限界がかなり明らかになつてゐる。

つぎの問題になるのは、実際のダムに発生すると考えられる条件の中で、解析に際しては簡単のために採り入れない条件があるとき、その条件の及ぼす影響を知ることである。そのために、たとえば模型に特殊な条件を与えて実験されることがある。最近では、ダム地質を詳細に調査し、なるべく実際の近い条件を再現せしめて、計算の予備な値を補正に用いて模型実験を行つたことが多くなった。

以下に模型実験の結果と計算値との差を示し、ダムの力学的な挙動を明らかにする。

§ 3.1 ダム横断面の応力状態

(1) 従来の研究

重力ダムあるいはアーチダム、横断面における応力状態は、理論解析とともに古くから実験的研究が行なわれて来た。古くは 1904 年に、英国に於いて L. W. Atch-erly と K. Pearson が木製の重力ダム断面において実験を行つてゐる。その後、ダムあるいは石膏などの模型によつて多数の実験的研究が行なわれた。光弾性実験による研究も進み、計算値と比較検討され、横断面の応力状態はだんだんよく明らかにされた。

これらの実験の中で注目すべきものは、石膏模型を用いた大規模の実験が、Boulder ダムを対象として実施され、slab analogy method と比較されたい研究である。この模型は石膏製で、ダムの高さ 1 m 、基礎の高さ 1 m という大きいものである。この模型に水圧と自重を加えた実験を別個に実施し、変位と歪の測定が行われた。その結果得られた結論はつぎの通りであった。

(a) ダム上部では応力分布が直線と違ってほとんど誤差がないが、ダム底面附近では非直線応力分布を呈する。

(b) 趾部および趾部における応力が最大である。理論上では隅角で極めて大きい応力集中を生ずるようになるが、実際の場合には材料の塑性変形によって応力が軽減される。たとえ大きい応力を生じても、構造物のごく微小な一部分にすぎないから、構造物全体としての安全性にさし支障はないであろう。

(c) slab analogy method による解析結果と実験値とを比較すると、ダムと基礎の接合部附近の応力状態はよく一致を示した。なおこの実験で、水圧によって生ずる上流面の鉛直引張応力は、通常の解析によって示されるように自重によって抵消され、ダムには引張応力の生じないことがわかった。

光弾性実験によれば、ダム横断面の応力状態を比較的小規模の実験に求めることができる、とくに表面応力ならびに応力集中の状況を調べるのに便利である。J. H. A. Brahtz は光弾性実験の結果と § 2-1 (3) で示した解析法による結果と比較して、両者が良好一致を示すと示した。²⁾ また丹羽氏は光弾性実験と重ねる計算値と比較するとともに、各種の条件の場合について系統的に実験を重ね、基礎岩盤の影響を詳しく研究した。^{3)~5)} これらの結果によると、やはり § 2-1 (3) で示したような計算法によれば実験値とかなり良好一致を示すことがわかった。注意しなければならないのは、岩盤が下流に向つた下流側においては、堤底において滑動に対する安全性が低下するのみならず、趾部において引張応力の生ずる可能性が増大することである。

ダムの内部には監査廊を始めとする各種の孔がつけられるとともに、収縮継目などによって不連続的構造となる場合がある。これらの場合に対する計算は極めて困難となるから、模型実験によって応力状態の特徴が研究されている。^{6)~8)} これらの結果によつて、計算上は面倒から無視されている応力集中度が明らかになった。

(2) 設計荷重をうけたいときの応力状態

従来の研究では、単純な個々の荷重の作用の場合、あるいは基本三角形断面について

応力状態の研究されること多く、設計上採用されている各種の荷重およびそれらが同時にダムに作用する場合、あるいは基本三角形から甚だしく修正された断面などについては、応力状態に不明な点が多い。そこで、基本三角形から著しく修正された一定の断面のダムについて、設計に用いられる個々の荷重（揚圧力を除く）、およびこれらの組合せ荷重による応力状態を光弾性実験により求め、実際に生ずると考えられるダムの応力状態の把握に努めた。この実験を行なうに際しては、2種の新しい光弾性実験法を試みた。

(i) 実験条件

基本三角形を大まかに修正したものとて秋葉ダムを研究対象とした。このダムは附図-I.3.1に示す通りである。ダム下部は深い砂利層に入っており、バケットカーブは極めて上部にあり、スキップジャンプ形式と考へることもできる。附図-I.3.1に示した断面を標準とし、バケット構造のない場合、あるいは上部の橋脚のない場合についても適宜実験を行なった。

設計荷重は表-3.1に示す通りである。

表-3.1 設計荷重

コンクリート重量	2.4 t/m ³	堆泥の水中重量	1.1 t/m ³
上部橋脚重量	307.8 t/m ³	上流面設計水位	85.0 m
下流面設計水位	63.5 m	堆泥面	66.0 m
上流面動水圧作用水位	84.0 m	下流面動水圧作用水位	63.5 m
堆泥圧係数	0.4		

(ii) 実験方法

光弾性材料としては Epoxy 樹脂（スイスの Ciba 会社製 Araldite Casting Resin, Type B）を用い、基本三角形の高さ 9~11 cm、厚さ 1~3 cm の模型を作った。模型に与える基礎の大きさは、高さの埋高の約 2/3 とし、上、下流側にダムの踵、趾の堤高の約 1/2 だけ張り出した。載荷に際しては、この基礎の下部の4か所⁽¹⁰⁾に支持した。

Epoxy 樹脂は凍結実験を行なうに優れた材料の一つである。⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ この材料の特性を利用し、つぎのような実験方法を採用した。

(a) 接着法による模型作製： ダム本体にこれと厚さの異なる橋脚のついている模型を作るために接着法⁽¹²⁾を採用した。

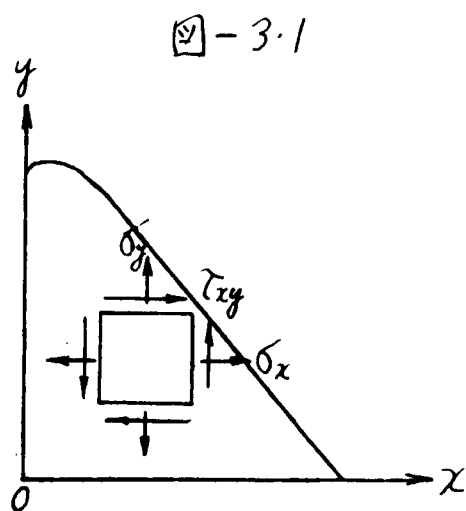
(b) 液体圧拡大載荷高温光弾性実験： 模型に水銀圧を拡大して加える220-

で、さらに任意の荷重分布が得られるように、つぎのような荷重法を行った。二次元模型に一定幅(たとえば模型厚さ)の液体圧を加えれば、荷重分布は液体の深さとともに直接的に変化する。しかしながら、二次元模型の1点に与える線荷重強度(kg/cm)は、その点に与える液体圧(kg/cm^2)とその圧力の作用幅(cm)との積になるから、模型に作用する液体圧の強度と載荷幅を変化すれば任意の荷重分布を得ることができよう。直径1mmの銅線と適当な寸法に切った紙、これをゴム板で貼り合わせ、任意の形状をとり、模型の厚さの方向には剛性が大きく、これに直角方向には柔軟性の大きい載荷板を作った。凍結実験用貯槽中に、この載荷板を介してゴム袋中の水銀圧を模型に加え、等色線および等価線系を求めた。

(C) 低速度遠心力凍結光弾性実験： 高速度遠心力光弾性装置⁽³⁾⁽⁴⁾の真空室の部分と自由に温度制御のできるようにして応力凍結を行なった。回転数は500~850 rpm程度にあつたので、模型の空気抵抗の加わつたを防ぐために遮蔽板をそのみで、真空室中は減圧しなかつた。

以上の方法を用いて行なった実験の種類を一括して附図-I・3・2に示す。簡単のため、実験の種類別は同図に示した記号により呼ぶことにする。

(iii) 表面荷重による応力状態



坐標軸は図-3・1に示すように選ぶ。内部応力は基準解より上側を正とし、表面応力は正負にかかわらず表面から外向きの結果方向にその値をとる。内部応力は堤底断面およびEL. 13.189mの断面について算出した。附図-I・3・3は上流側から静水圧の作用した場合(IAおよびIA')の応力状態を示すものである。IA'の場合には従来の実験結果とほとんど同様の傾向を示して、高さ13m附近の断面には直線応力分布に近く、この附近以上では基礎の影響は実際に考慮する

必要のないことを示している。IAの場合にはバケット構造の存在により、その下端では応力集中を示していること、バケットカーブの始点附近でやや応力集中を示していること以外には、応力分布に大きな影響を及ぼしていない。仮にバケット構造があれば、その下端

と趾部と同程度の大きい応力集中が生じるため、趾部の応力集中は幾分軽減される傾向がみられる（表-3.2 参照）。

附図-I.3.4は上流面に動水圧が作用した場合（IB）の応力分布を示すものであるが、この傾向は静水圧によるものと大差はない。また堆泥圧による応力分布状態もよく似たものになるから図示することは省かれる。これ以外に、越流水がバケットカーブの部分において応力及び断面圧力の影響を実験したか、バケットカーブの部分において表面応力が増大する以外には、大きな影響を及ぼすものはないことがわかった。

表-3.2 上流面荷重による応力集中度
(実験値 / 計算値¹⁾)

実験種別	位 置		
	踵	趾	隅角 ²⁾
IA	3.5	1.1	1.3
IA'	3.5	1.3	
IB	3.1	1.0	1.1
IC	1.4	1.2	1.2
VA	3.1	1.2	1.2
VA'	3.0	1.3	

1) 直線分布¹⁾の計算

2) バケット構造下端

また応力集中度について述べたが、その概略値は表-3.2に示す通りである。踵、趾部の応力は計算上では曲げモーメントの分布より定まるものであるが、実際にはこの実際の応力分布は剪断力¹⁾の大きさに左右される。この実験では、踵、趾に於ける（剪断/曲げモーメント）の値は、IB, IA, ICの順に逐次大きくなり、応力集中度も同様の傾向を示していることより明らかになる。上流面に前記荷重が加わる場合の応力は一般に小さく、それ以外の場合と大差ない。

応力分布を示すに、代表例として II A の場合の応力分布を附図-I.3.5に示す。水の重量が有効に作用し、 σ_y は趾部における引張応力を示すことができる。バケット構造のない場合には、その下端において応力集中を呈することは知られている。

(IV) 自重による応力状態

自重の作用（II A, II A'）による応力状態を附図-I.3.6に示す。II A の場合には、上部断面では σ_y はほとんど直線分布を呈し、埋底断面では踵部に大きな応力集中を生じ、趾部における応力集中は小さい。断面中央部ではやや上に凹の曲線となり断面中に引張応力を生じない。剪断力は上部断面では B. F. Jakobson の示した傾向¹⁵⁾と類似し、埋底断面ではこれが非常に著しい。II A' のようにバケット構造が追加されると、この下端で大きな応力集中が生ずるのを見られる。これ以下の断面下流部の鉛直圧縮応力が増大し、

趾部の応力集中度も大きくなる。またバケットカーブの部分における表面応力は、その値は小さく圧縮応力であり、上流面に荷重が作用する場合とともに、越流水によって生ずる引張応力を消去するのでも好都合である。付図-I-3.6よりわかるように、上流面の応力がバケット構造の附加によって影響をうけることは少ない。

つぎに、堤体と同一厚さの橋脚を附加した場合(ⅡB)の実験結果は付図-I-3.7に示す通りである。バケット構造と橋脚を併せた附加構造物がダム全体の応力分布に及ぼす影響を考えると、表面に作用する荷重に対しては、これらの附加構造物はその附近の荷重伝達状況に影響を及ぼすのみであり、その近傍の応力状態に影響を及ぼすにすぎない。しかし自重や地震力のような容積力に作用する場合には、附加構造物自身の重量によって必然的に荷重が増加するため、その近傍の荷重伝達状況のみならず、ダム全体にわたって応力状態に変動を及ぼす。ⅡAとⅡA'の比較から、このことが明らかになり、ⅡBのように大きな橋脚を附加された場合には非常に顕著な影響が現われる。すなわち、ⅡAと比較すると合力が増大し、その作用位置が上流に移るため、ダム下部の σ_y は上流側では著しく圧縮応力が増大し、下流側ではやや減少する。また下流端に生ずる応力集中度もやや減少する。その他バケットカーブの始点から中央にかけてわがわが応力が増大する。

堤体にその厚さの $1/5.77$ の厚さの有る橋脚(107.8 $\frac{1}{m}$ に相当)を接着して三次元実験を行ない、橋脚重量がダムのブロック内で埋庫田方向に分布される様子(ブロック幅を15 m とする)と厳密に幾何学的相似になる)を調査した。その結果によれば、橋脚とダムの接合部は非常に複雑な応力状態となるが、ダム下部では橋脚重量がブロックの厚さ方向に一様に分布されたと考えられ、異なる。付図-I-3.8はかかる考え方に従って付図-I-3.6およびI-3.7からブロック幅の $1/5.77$ の橋脚を有するブロックの平均応力を求めたものである。

(V) 水平地震力による応力状態

下流向きの水平力を加えた場合(ⅣA)の応力状態を付図-I-3.9に示す。さらに上記橋脚を附加された場合のブロックの平均応力は付図-I-3.10に示すようになる。上流面静水圧の作用による応力状態と類似しているが、 σ_x は上部断面に現われ、断面の上流部では σ_y の増加するとは、上流面静水圧の作用する場合と逆である。

(VI) 組合せ荷重による応力状態

上流面静水圧、堆泥圧および重力水圧を同時に加えた場合(ⅤA)の実験結果は付図-

I・3・11に示す通りであり、IAの場合と若干の傾向は類似している。この結果はまた実験Iの各場合の結果と重ね合わせることも求められる。

自重、水平地震力および上流面に作用する全荷重による応力状態は附図-I・3・8, I・3・10およびI・3・11を重ね合わせて求めることができる。その結果は附図-I・3・12に示す通りである。揚圧力に依る実験が不可能であるのでこれを考慮外にすれば、この状態はダム設計の1つの標準状態である。上流面作用荷重および水平地震の影響が自重の影響とほぼ逆の傾向にあり、それらを重ね合わせた結果は、附図-I・3・12に示されるようにかなり異なる応力分布を示し、 σ_y は断面すべての位置において圧縮応力である。踵、趾部における応力は正確な値を求められなかったが、これも互に応力集中を打ち消し合っていると考えられている。附図-I・3・13はこのときの堤底面における主応力を示している。踵、趾を除く、主応力は圧縮応力 25 kg/cm^2 、引張応力 7 kg/cm^2 程度の値を示している。

この実験では揚圧力を考慮できなかった。揚圧力係数を $1/3$ 程度に取ると、本実験結果では踵部の σ_y にわずかな引張応力の生ずる可能性が考えられる。しかし一方では、第4章に示すように、現在の重力ダムの施工方法によれば、熟成力によりダム完成後には踵、趾部では圧縮応力の生ずる傾向にあることが示されている。そのうえ附図-I・3・4に示すように、下流側水位により趾部に圧縮応力を生ずるから、もしこれらの影響を無視した場合に踵部にわずかな引張応力の生ずる可能性があっても、実際には問題にする必要はないと考えられる。

(3) 重力ダム断面の応力状態と安全性に關する考察

本実験では堤体および基礎岩盤は同一弾性体であると仮定しているが、以上に述べたように現行設計法による場合のダムの応力状態が、始めてかなり詳細に判明した。その結果によれば、各種荷重による応力状態が複雑に影響し、最悪の荷重状態に対してはかなり現行の解析法による応力状態に近いものとなる。しかし断面形状、荷重条件、岩盤条件などによつては、現行の解析法とはかなり異なる応力状態を呈する可能性のあることに注意しなくてはならない。

現在おこなっている、基礎岩盤の影響を考慮に入れた簡単なしかも適切な解析法はないように思う。たゞ F. Vogt が示した方針¹⁶⁾は興味深いものであり、本実験における結果は、この方針において示された結果とかなり一致した応力状態を示している。

ダムの安全性を論ずる場合には、ダム全体としての安定性からさらに進んで、ダムの詳細な応力状態とダムの破壊機構をわちコンクリート、基礎岩盤、あるいは両者の接着部

に於ける破壊面は破壊条件を明らかにしなければならない。さらに同様にダム安全性能がコンクリートや岩盤、それらの接着部の破壊に及ぼす影響についても考察が必要がある。

コンクリートの破壊に対しては、Mohrの説あるいはこの特殊の場合である内部摩擦説が有力な指針であることは異論がないであろう。内部摩擦説によれば、単純剪断強度を τ_0 、破壊面に作用する垂直力を σ_y とすると破壊条件は、

$$\tau_0 - f\sigma_y = \text{const.}$$

で表わされる。ここに f は内部摩擦係数である。ダムの安全性の判定に用いられる剪断摩擦安全係数はこの概念によるものであるが、ここでは水平断面で破壊するものと考え、 $\tau_0 = 40 \text{ kg/cm}^2$ 、 $f = 0.65$ とし、断面中の各点で上式の考え方を(1)といふ安全度 ϕ は、

$$\phi = (40 - 0.65 \sigma_y) / \tau_{xy} \quad (3.1)$$

となる。畑野氏はコンクリートおよびコンクリートと岩盤の接着面に対して内部摩擦説の成立することを確かめ、ダムの滑動安全度に関して優れた研究をしていられた。^(文献18) において畑野氏は打ち継ぎ目の滑動安全度の計算例として次式を採用された。

$$\phi = (20 - 0.80 \sigma_y) / \tau_{xy} \quad (3.2)$$

附図-1.3.13の実験結果と(3.1)および(3.2)式に適用すれば、附図-1.3.14のような結果が得られる。畑野氏の計算例によれば、安全度は踵部に近いほど大きく、上流側ほど安全度が大きくなると考えられる恐れがあるが、本実験結果よりそれはむしろ底面全体にわたって一様に近い。この結果は採用した応力状態の差、ことに剪断力分布の差によるものである。以上のダムが水平断面において破壊するものと仮定した議論であるが、実際の破壊面は複雑なものをなすであろう。そうすればその破壊面に対して安全度を検討する必要があるが、問題は非常に困難になる。さらに上流面では引張による破断に対する安全性を考慮する必要があり、踵部近くでは附図-1.3.14に示した値よりもさらに安全度は減る傾向にあることに注意しなければならない。これ以後に示すように、重力ダムの三次元的構造作用を考えると、二次元解析の結果よりかなり安全なものであることがわかる。

§ 3.2 ダム水平断面の応力状態

ダムの応力状態の研究の基礎として、おてに述べた横断面のみならず、水平断面の變形をふくみ応力状態を知る必要がある。重力ダムの水平断面は両端が弾性支持

され、梁（収縮縫目をクラウトするとき）であり、アーチダムでは両端が弾性支持されたアーチである。このような不静定構造物では支持条件によって応力状態が甚だしく変化するので、単に応力解析法を研究するのみならず、基礎岩盤の力学的な性質・調査方法と十分研究する必要がある。

§ 2.3 において述べたが、アーチの応力状態を解析するのに、恒等式は弾性理論による解法を得ている²⁰⁾。しかしながら一般にアーチの応力解析はかなり面倒であるから、実験的にアーチの応力状態を研究することがなされて行われている。

(1) 水圧によるアーチの応力状態

水圧の作用に及ぶアーチの応力状態は G. Oberti と B. Bonfiali によって研究されている²¹⁾。アーチは等厚円弧で、その厚さ t と曲線半径 r の比が $1/3$ および $2/3$ の模型について、光弾性実験によって応力を求めた。その結果の一部を表-3.3

表-3.3 水圧によるアーチの応力 ($t/r = 1/3$ のとき)

中心角	模型材料	クラウン		アバットメント	
		上流	下流	上流	下流
70°	フェライト	-39 (-370)	5.5 (9.5)	14.0 (28.5)	-40 (-63.5)
100°	ガラス	-50 (-475)	9.0 (3.5)	12.0 (23.0)	-85 (-75.5)
	バークライト	-52	6.5	10.5	-80
130°	フェライト	-48 (-50.0)	-5.5 (-5.8)	12.0 (10.0)	-66 (-72.5)

註 1) 水圧強度 10 atm が作用に及ぶ応力を kg/cm^2 単位で示す。

2) 括弧中の数字は通常の計算法によって得た応力。

の通りであり、 $t/r = 1/3$ においては、かなり計算値に近い応力を示している。しかし t/r が大きく中心角が小さいときには、計算値と実験値の差が大きくなる。一連の実験結果に基づいての結論を得ている。

(a) t/r が大きくなり、中心角が 100° 程度より大きくなると、通常の応力計算を行ってもよい。

(b) 逆に t/r が小さければ、計算値は実験値より離れる。実験値の方が、クラウンにおいて大きくアバットメント上流側で引張応力が小さくなる。しかしアバットメント下流側で

は圧縮応力が大きくなる。

(C) 中心角が小さく、 t/r の大きいアーチでは、厚さと曲率を一定としたアーチは合理的な形である。

一方、U. S. Bureau of Reclamationでは石膏から石膏製の模型で大規模な実験を実施した。その結果、岩盤に加わる水圧により岩盤が変形することを知ると、 t/r が大きい中心角の小さいアーチではかなり大きい引張応力の生ずることが明らかになった。²²⁾ したがって、Boulder ダム²³⁾や Grande Dixence ダム²⁴⁾などの大ダムの建設に際しては、かかる基礎の変形量について考察を進めている。たとえば Boulder ダムにおける計算では昇水水圧による岩盤の水平変位の計算値は ± 3 mm にすぎないが、Grande Dixence ダムについて実験したところではさらに大きい値が得られている。基礎の変形量は正確に推定できる性質のものではないから、一般には、ダムの温度降下量を大きく取るなどによりアーバットメントの沈下りの影響を含めるという方針が採用される。

(2) 温度変位によるアーチの応力状態

上記の研究中において、G. Oberti と B. Bonifidi はさらにアーチの熱応力を調べている。アーチリブの温度低下による収縮を考慮するときには基礎に同量の膨張を与えなければならない。したがって、基礎に隙間を作り、この隙間を強制的に抗げることにより実験を行なった。 $t/r = 0.3$ 、中心角 $= 120^\circ$ のものについて得られた結果を示すと表-3.4 のようにかなり大きい応力を示している。ただし、コンクリートの弾性係数は $3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

表-3.4 一様温度降下によるアーチ応力
($t/r = 1/3$, 中心角 $= 120^\circ$)

位置		計算	実験
クラウン	上流	-15.3	-14.0
	下流	28.3	29.5
アーバット	上流	44.3	24.0
	下流	-38.2	-28.5

註 1) 温度降下 10°C に対する応力を kg/cm^2 単位で示す。

2) コンクリートの弾性係数 $= 3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

3) 岩盤の弾性係数 $= 3 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

としているのは少し大ききる仮定であろう。実験値と計算値はクランではよく一致しているがアバットメントでは局部的な応力集中によって差が著しい。この実験では、水圧の作用の場合ならびに温度降下の場合ともに、計算値との差は同程度である。

§ 3.3 重力ダム の 応 力 状 態

前節において述べたように、試し荷重振解析法は、重力ダムの応力解析にあつては方法であるが、この方法では各構造要素は細い構造物であると仮定している。したがって重力ダムのようにマシブな構造物に対する試し荷重解析法の適合性を検討する必要がある。そこで2種類の重力ダムについて三次元凍結光弾性実験を行い、試し荷重^{25) 26)}解析の結果と比較検討を行う。ある程度重力ダムの構造上の特性を知ることができ。

(1) 実験および計算仮定

堤高 100 m の非越流型重力ダムと考へ、実物寸法は附図-I-3-15 に示すように堤頂長は A 型においては 311.4 m、B 型においては 230.0 m の対称形とした。A 型は小河内ダム、B 型は辰川ダムを対象としたものであり、ここでは両者の応力状態と比較するために便利をうける、高さを 100 m に揃えたものである。これに加わつた荷重としては、上流面静水圧および堆泥圧のみを採用し、自重や地震力の作用は考慮しないとした。通常の設計方針とは異なり、次式に計算した堆泥圧 P_e は上流面に垂直に作用するものと仮定した。

$$P_e = C_e w_s d$$

ここに、 C_e = 堆泥圧係数、 w_s = 堆泥の水中における単位体積重量、 d = 堆泥面からの深さである。

2 種のダムにおける載荷条件は表-3.5 に示す通りである。

表-3.5 載荷条件

ダム形状	A	B
貯水面標高 (m)	93.8	100.0
堆泥面標高 (m)	59.8	39.0
堆泥圧係数	0.4	1.0
堆泥の水中単位重量 (γ _m)	1.0	0.8

実験用ゴムコンクリートおよび基礎岩盤は同一弾性性質を有するものと仮定し、その弾性係数は $2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, Poisson 比は 0.20 と仮定す。ゴムはその総目かグラウトミキサーにて外力に抵抗するものと仮定す。

(2) 実験方法

模型は Epoxy 樹脂にて作製した。ゴムおよび基礎岩盤は同一材料を用いて作り上げた。模型縮尺はゴム A においては $1/150$, ゴム B においては $1/75$ とした。基礎の大きさは、鋳型、焼鈍、凍結、ゴムの構造機能など実験上の種々要素を考慮に入れて決定した。ゴム A について模型寸法を示すと附図-I.3.16 の通りである。

模型が塊であるので、鋳型によって生ずる初期応力の除去と温度低下中に発生する応力の防止に極力努めた。すなわち、焼鈍および応力凍結過程は 135°C の油中で行ない、温度低下も徐々に行なった ($135^\circ\text{C} \sim 70^\circ\text{C}$ の間は 1 時間につき 3.5°C の割合)。

100 kg 程度の荷重を模型に加えるために、コイル・バネを利用した小型の加圧装置を作製した。この装置の構造は、附図-I.3.17 に示すように、円筒の内部を滑動する車軸 A をコイル・バネ B で押し、この車軸によって模型を加圧するようにしている (C はバネの長さを測るための標尺、D は外枠にあってこれを載荷装置に取り付けの)。附図-I.3.18 は模型の載荷状況を示したものである。基礎岩盤の底面に埋め込まれたボルトによって模型に載荷枠を取りつける。この載荷枠に加圧装置の外枠円筒を固定し、規定の加圧力を鉛球、金属板、厚紙パッドを通して模型に伝える。

応力凍結を行なうには、まず常温で荷重を加え、これを油中で高温 (135°C) に加熱する。模型材料は高温に弾性係数が非常に小さくなるので、高温時の変形による荷重の変化を生じる。かかる荷重変動を避けるために、まず規定の荷重を加えて予備凍結を行ない、その後ふたたび荷重を規定の値に調節して本凍結実験を行なう。

(3) 変形状態

ゴム表面の変形を測定するため、模型の表面に標尺を記し、応力凍結の前後における各標尺の相対位置を $1/100 \text{ mm}$ 読みの読取顕微鏡によって測定した。さらに片持梁断面中の変形状態を知るために、応力凍結を行なった模型から切取った。

片持梁薄片に標更を記し、これを焼鈍する前後における標更の相対位置を測定することによって変形状態を決定した。

以上の方法によつて、模型の絶対変位を求めることができた。附図-I.3.19 はダム B の相対変位を示すものである。附図-I.3.19 (a) に上流表面の変形は堤頂 A に付した鉛直変位と基準変位との相対変位を表わしたものである。堤頂では梁自身の剛性に対して基礎の剛性が極めて大きいので固定梁に似た撓み曲線となっているが、EL. 62.0 m では基礎の剛性が梁自身の剛性に対して小さい。

この状態は実験、計算いずれの場合にも示されている。

附図-I.3.19 (b) に示した片持梁下の鉛直面内の変形状態は、自重と基準変位とを基準線とした場合の相対変位によって表わしたものである。撓みの計算値は便宜上堤軸の面を示すものと仮定して図に記入した。実験によれば片持梁断面中の変形状態は、基礎^{27) 28)} 附近の水平断面が変形後 S 字型になる。この様子は F. Vogt が示した通りであり、材料の弾性性質と応力状態によって必然的に現われるものである。断面の水平寸法(厚さ)が変形後に減少しているが、これは主に上流面荷重による水平圧縮応力によるものである。ダム厚さの変化については F. Vogt によって求められている²⁹⁾。このことは水平直応力 σ_y があるとして厚さが変化するとして簡単に計算を行つてみる。ダム A の EL. 24.6 m における厚さは 53.6 m であり、この断面の σ_y の平均値は実験より -7.0 kg/cm^2 である。これから断面縮少量は、

$$7.0 \times 5360 / 200,000 = 0.188 \text{ cm} = 1.88 \text{ mm}$$

となる。断面縮少量の実験値は表-3.6 に示す通りであり、計算値の約 1/2 である。

表-3.6 ダム A の EL. 24.6 m における水平変位 (mm)

片持梁	F	D	C
上流面	1.94	1.79	0
下流面	1.11	0.92	-0.97
差(縮少量)	0.83	0.87	0.97

このように実験値が小さいのは、鉛直直応力 σ_z や水平直応力 σ_x などの影響によるものと推定される。表-3.6 に示すように、ダム下部ではかかる縮少量がダムの全変位に対して決して無視できない程度のものであることがわかる。また附図-I.3.19 (b) に示れ

は、タムの高さは変形後に増大し、タム上流面は伸縮、下流面は縮むことが認められる。以上のように、タムの変形状態は下流表面の測定値のみにより把握することはできないことに注意する必要がある。

タム A に関する変形状態は示さなかったが、タム B よりも接合は大きくなり、その最大値は 14.1 mm である。タム B の場合よりも実験値と計算値はより一致を示している。試しに解析にすれば、タム A はタム B に比べて長さが短いので片持梁構造の支持する荷重が大きくなり、接合が大きくなる。このことは実験的にも明らかに示されている。

(4) 表面応力状態

応力凍結を行なった 3 個の模型から鉛直および水平の 3 直交方向の薄片を切取り、*shear-difference method* により応力解析を行なった。タム表面では、タム表面に平行な薄片を切取り、表面応力の解析に利用した。本実験では接岸部表面における鋭い応力集中を正確に解析しなかった。また上流面では荷重の影響により応力状態が複雑なもので正確な応力を求められなかった。応力成分はタム右岸側について附図-I.3.24 に示すように選ぶ。直応力は引張を正とし、剪断応力は普通定義されている向きとは逆の向きを正とする。

附図-I.3.20 および I.3.21 に下流表面の片持梁鉛直直応力 σ_z および水平梁水平直応力 σ_x の実験値と計算値と比較した。実験値と計算値の差はタム A よりもタム B の方が大きい。とくにタム B では、計算による下部には σ_z はむしろ減少する傾向があるが、実験では下部に行くと従って連続増大している。 σ_z についても実験値の方が圧縮応力が大きくなり、とくに下部ではすべて位置で圧縮応力を示している。長くて薄いタム A においては、タム B に比べて荷重はわずかに小さいが σ_z は大きく増えている。

附図-I.3.22 および I.3.23 はタム B の下流表面の主応力状態を示すものである。下流表面最小および最大主応力は、タム A においては -54.0 kg/cm^2 および 1.0 kg/cm^2 、タム B においては -37.4 kg/cm^2 および 1.6 kg/cm^2 である。ただし前述のようにこれらの値は正確なものではない。計算値は示していないが、附図-I.3.20 および I.3.21 より推測されるように、タム下部および接岸部近傍ではかなり実験値と差がある。タム A の片持梁 D の基礎に於いて見られるように、基礎岩盤の凹んだ場所ではかなり応力が増える。

(5) 断面の応力状態

附図-I.3.24 はタム A における片持梁の応力状態の例を示したものである。

これらの図において一般に基礎付近において著しく応力が撓曲され、踵、趾において顕著な応力集中を来している。三次元実験によれば σ_x は上流面ではかなり引張応力が小さい値となり、下流面では圧縮応力が増加していることに注意するべきである。この傾向はとくにタム B において著しい³⁰⁾。したがって Poisson 比の二次的効果により、タムが短かくかつ厚いことおよび上流面に加わる鉛直荷重をば、かかる傾向をかなり助長するものと考えられる。

このようにタム B においては試し荷重解析による結果とかなり異なった応力状態を来し、水平梁における応力状態を付図-I.3.25 に示した。剪断応力 τ_{yz} は下流表面で消滅せず、また接岸部近くでは撓曲され、放物線分布とならない。直応力 σ_x は EL. 62.0 m ではかなり梁の曲げ応力状態に近いが、EL. 24.0 m では全く複雑な状態を示している。EL. 24.0 m のような下部では、水平断面の図に示されているように極めて厚い梁となり、その基礎の影響をうけるので、かかる梁は単純な曲げ応力状態を来さないことは明らかである。模型材料は Poisson 比が大きく約 0.5 であるので、側方への伸びが拘束される結果 σ_x は圧縮応力が増大するものと考えられる。このように Poisson 比の二次的効果が実験結果に大きく現われ σ_x の合力は圧縮応力となっているが、実際のタムではコンクリートの Poisson 比は普通 0.2 以下であるから、この実験結果のように大きい影響はない。しかしながら、ここに示されたような結果がある程度現われるであろう。この効果は一般に圧縮応力を増加するものであるから、とくに注意する必要があるであろう。

(6) 基礎岩盤面における応力状態

傾斜接岸部における応力状態は付図-I.3.26 に示す通りである。 σ_a は基礎岩盤面に作用する直応力、 τ_{ap} はタムと下流へ向いて滑る剪断応力、 τ_{ra} はタムと下方へ滑る剪断応力を表わすものである。タム A の片持梁 F の水平基礎岩盤面における応力は、付図-I.3.24 において示すように示されており、この場合には、 $\sigma_x = \sigma_z$, $\tau_{ap} = \tau_{zy}$, $\tau_{ra} = 0$ である。したがって、EL. 0.0 m においては片持梁 D の基礎について示した。

水圧の作用する場合には各断面の τ_{ra} の合力はほとんど零であり、自重の作用した場合のみかなり大値となるが、タムの安全性には大きい影響を及ぼさない。

断面における τ_{ap} の平均値は表-3.7 に示す通りである。実験値は試し荷重解析結果と同様の傾向を示しているが、タムの上部の τ_{ap} は計算値より小さい。 τ_{ap} は長かつ断面の薄いタム A の方がタム B より大きく、中央部片持梁基礎における τ_{ap} が

二次元解析による値より減少する割合は小さい。

表-3.7 基礎岩盤面に於ける剪断応力 τ_{xy} の
平均値の比較 (kg/cm^2)

片 持 梁		B	C	D	E	F
タム A	実 験	3.5	3.7	5.3	-	6.3
	試し荷重解析	5.8	7.8	5.4	-	5.8
	二次元解析	3.1	6.9	6.7	-	6.7
タム B	実 験	2.4	2.7	2.7	3.2	4.2
	試し荷重解析	3.1	3.9	3.7	3.3	3.6
	二次元解析	2.1	3.3	4.4	5.6	6.4

(7) 実験結果の考察

模型実験の条件を考へれば、基礎の大きさも附図-I.3.17に示すように制限し、また材料の Poisson 比の値が試し荷重解析に使用した値と異なっているため、実験値と計算値と直接比較することは難い。一方、実際のタムでは、各築造時の状態により種々の特殊条件が加わり非常に複雑な状態を示す。したがって、ここでは厳密な数値を考察するのではなく、実験値と解析結果と通覧に重カタムの応力状態の一般的傾向について考察を行なう。

附図-I.3.19に示すように変形状態は実験値と計算値とは類似している。下部にやや大きい差がある原因は、(1)に基礎変形状態の差があり、(2)には Poisson 比の差があると考えられる。基礎岩盤の変形状態を正確に求めることは困難であるが、この変形によるタムの応力状態にかなり差を生ずるものがある。Boulder タムにおいて石膏あるいはゴムを用いた 3次元模型実験と試し荷重解析結果と比較すれば、変形状態はよく一致しているにもかかわらず、応力状態は比較的大きい差を呈している³⁾。かなり薄い T-4 タムについて行なわれた多数の実験結果に比べて、本実験および Boulder タムの実験における応力の差は大きい。断面が厚く長さの短いタムほど、試し荷重解析法に用いられている単純な仮定では無視しているような要素の影響が大きくなり、試し荷重法の適合性が悪くなる。

変形に比べて応力に大きい差を生ずるのは、単に各素片分担荷重の大きさの差によるのみ

ながら、変形後の応力状態の局所的な相違に注意を要する。ダム基礎附近では、従来を要位でもこれに近似的な応力は大きく、その応力分布は本来非直線的を示すものである。このようにダム下部や接岸部附近では応力の計算値に誤差が大きくなる。

模型材料の Poisson 比と実物と異なることの影響については詳しい研究があるが³²⁾、ここではつぎのように簡単に考えてみよう。ある物体が x 方向のみ完全に拘束されている場合に、 $\sigma_y = \sigma_z = 0$ なる応力が作用したときに生ずる σ_x は、

$$\sigma_x = (1/\nu - 1) \sigma$$

により表わされる。ここに、 ν は Poisson 比である。いま $\nu = 0.5$ とすると $\sigma_x = \sigma$ であり、 $\nu = 0.2$ とすると $\sigma_x = 0.25 \sigma$ となる。したがって本実験では Poisson 比の二次的効果のかなり大きい個所があると考えられるが、この影響を補正したい。この影響はダムの下部ほど顕著に現われる。ダム下部の σ_z が実験上大きくなったのはこの影響によるものであろう。 σ_x は上流面において引張応力が小さく、下流面において圧縮応力が大きい。かかる状態を呈する原因は Poisson 比の二次的効果のみならず、上流面に作用する鉛直力、模型基礎の大きさなども幾分影響を与えているものと考えられる。いふにこれらも実験結果に於いて、これらの影響によりダムは全体にわたって圧縮応力が増大するので、ダム上流面接岸部における引張応力を減らすことになる。

峡谷の形状が応力状態に及ぼす影響は試し荷重解析による結果と類似している。したがって、第2章において述べた数多くの解析結果から得られたダムの形状と応力状態に関する従来の一般的な結論は成立する。

基礎岩盤附近における非直線的な応力分布は、ダムの三次元的な傾きにより、二次元横断面を考えたときよりもむしろ好ましい状態となる。前章において、ダムの鉛直応力と直線分布の仮定で計算したことも示したから、重たダムの三次元的な構造物として設計の場合、試し荷重法解析法によりよいことがわかる。

§ 3.4 アーチ ダムの応力状態

アーチ ダムの応力解析はすでに前章に述べたように数多くの方法で解析でき、かなり大きいアーチ ダムでは圧縮応力が 50 kg/cm^2 以下に設計されるので、発生応力を正確に正確に知り、それに対処した構造と施工を実施することが望まれる。そのために模型実験によってアーチ ダムの応力状態を研究することは、世界各国においてよく行われている。

模型材料としては、ゴム、石膏、コンクリート、合成樹脂等が用いられる。その模型に於けるゴムを以て基礎岩盤の性質を模擬するに於ける条件に近づけてあるから、極めて単純化して理想的な条件の下に行なわれた実験より、種類が非常に多い。これらの研究数は極めて多いので、この間の実験値を説明するとはできないが、そのために、実験結果は試し荷重解析の結果に近く、試し荷重解析結果よりやや安全な応力状態を示している。

33) 34)

著者は最初に石膏模型に流体圧を加えて実験を行なったが、その後油圧ジャッキによる載荷を行なった。これでは、すでに前章において示した天ヶ津島ダム模型に於いて、油圧ジャッキによる載荷の実験の結果より、そのダムの応力状態の特徴を明らかにする。

(1) 模型材料

材料としては石膏と珪藻土の混合物を用いることにした。模型実験に際しては材料、弾性係数の良好な点、接着型歪計の使用しやすい点などを考慮、模型製作上からは凝結時間の長い点、ワークカブルな面を有する点、水和熱の小さい点などを必要とする。以上のような点を考慮し、表-3.8に示すような石膏を用いることにした。

表-3.8 石膏の性質

含水量	室温	水温	凝結時間 (min-sec)			昇温度	強度 (kg/cm^2)		膨張率
(%)	(°C)	(°C)	流動時間	始発	終結	(°C)	引張	曲げ	(%)
69.0	19.0	18.0	14-00	26-30	40-00	16.1	8.1	29.9	0.069

表-3.9 材料の性質

材料 (記号)	弾性係数 $E (\text{kg/cm}^2)$	Poisson比 ν	圧縮強度 $\sigma_c (\text{kg/cm}^2)$	引張強引係 数 $\sigma_s (\text{kg/cm}^2)$	曲げ強度 $\sigma_b (\text{kg/cm}^2)$	破壊歪 $\epsilon_c (10^{-6})$	材料 (day)	対応模型
堤体 (C)	86800		162			>2500	50	A
	90000	0.204	171	21.7	55.4	>2500	80	B
	90500					>2500	90	C, D
	93400					>2500	140	D
岩盤(R1)	37000		65	10.4		>2400	80	
" (R2)	31000		53	8.4		>2300	80	
" (R3)	19900		39	7.2		>2300	80	

表-3.9には材料の性質を総括にある。実験に際しては、模型をA, B, C, Dの順次形状を変更し、それぞれの場合について測定した。期間がかなり長期にわたった。そのために堤体材料については各時期に対応させて材料試験を行なった。圧測定にはMartensの鏡式歪計を用い、破壊歪はこの歪計で読み取り得る限度までの値をとったものである。すなわち、材令80日において、堤体材料に圧縮強さ σ_c の $1/3$ の荷重を数回加えた後1分間放置にやみだに生ずるクリープ歪 ϵ_y を測定した結果、 $\epsilon_y = 9 \times 10^{-6}$ の値が得られた。 ϵ_y と弾性歪 ϵ_e を比較すると $\epsilon_y/\epsilon_e \div 1.5\%$ であり、弾性実験において発生せしめた歪力は $\sigma_c/3$ 以下であり、測定のための規定荷重を保持せしめた時間は約1分であった。

(2) 模型

岩盤を指定された形に仕上げた後に埋体（ダム本体とサトウを一体として作る）を載せ、サトウと岩盤をEpoxy樹脂に埋め接合した。ダムに於ける越流部や放水孔の位置の影響を及ぼすために附図-I-3.27にある、ダムに全く切欠きのないもの（模型A）から順次切欠きを持つ模型を作った。すなわち堤頂越流部の切欠きをもったものを模型Bとし、さらに模型Cにおいては堤内放水孔を設け、最後にEL. 75.0m以上は収縮縫目に相当する切欠きを入れ、この標高以上にはアーチ作用の働きが構造上、これを模型Dと名付けた。

また、ダム設計（附図-I-2.12参照）に基づいてダム本体は対称、岩盤は非対称、したがってサトウは非対称とした。ダムの形状および模型実験の対象とする実物の弾性係数（解析に際して仮定と幾分異なる）は附図-I-3.27および表-3.10に示す通りである。

表-3.10 弾性係数の比較（材令80日）

材 料	模 型		実 物	
	$E (kg/cm^2)$	E_c/E_R	$E (kg/cm^2)$	E_c/E_R
C	90000		210000	
R1	37000	2.43	60000	3.50
R2	31000	2.90	50000	4.20
R3	19900	5.02	30000	7.00

模型材料は実験中に加えてもわからず硬化が進行したため、材料の E_c/E_r を正確に算出できなかった。模型の岩盤は実物を完全に再現することはできず、弾性係数の大きいものを用いた。すなわち E_c/E_r の値が最初の予定より小さく、理想値の約 0.7 倍であった。Poisson 比は解析に 0.2 と仮定されている。模型の Poisson 比は表-3.9 に示すように 0.204 であるから、模型の Poisson 比は解析仮定と同一であると推定される。

(3) 実験

(i) 載荷

表-3.4 に示した荷重の中で、実験では本圧と減圧のみを指定することにした。荷重は式(5)で仮定された値よりも小さいので、圧力も小さい。したがって、実験値と比較する計算値としては、対応する載荷条件による計算値を用いることにした。自重はクランプの荷重とそれらの片持梁が全副支け荷重とを考慮し、圧力測定のための実験では自重をばり考慮することにした。

上記のような荷重を加えるためには油圧ジャッキを用いた。油圧ジャッキの最高圧力は 400 kg/cm^2 としシヤッキは各種類を使用した。最高油圧のとき、シヤッキの能力と使用個数は表-3.11 に示す通りである。

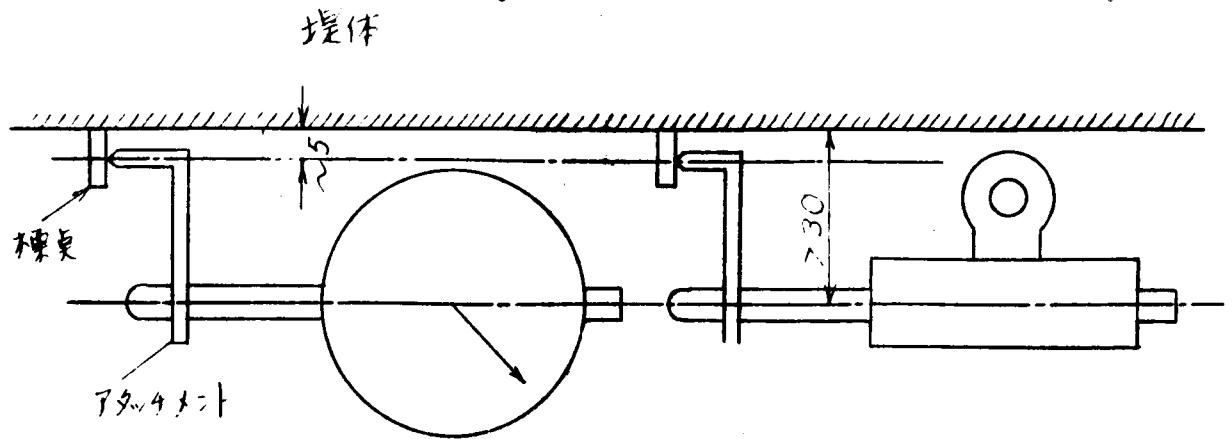
表-3.11 ジャッキ能力

ジャッキ能力 (ton)	2.6	6.5	9.1
個数	12	18	14
最大荷重 (ton)	275.6		

(ii) 測定

歪測定は接着型電気抵抗歪計を用いることにした。主として長さ 22 mm のものを用い、液流孔周辺の局部応力を測定するために長さ 8 mm のものを使用した。接着剤には polyester 系のもので採用した。表面上の1点に、互に 45° の角度をなす4方向の歪成分を求め、2つの直交方向の膨らみが等しいという条件を参照するとともに、測定値の補正を行った。接合線方向および鉛直方向の変位を測るためには、断面の回転を防止するため断面の中心において変位を測定し、これを平均する。ダイヤルゲージで測定するときには図-3.2 に示すように、表面より 3 cm 以上の高さに位置で測定することにした。また、断面の中心を避けるために、図に示すようにダイヤルゲージの針

図-3.2



真鍮製のアタッチメントをとりつけ、表面から約 5 mm 離れた位置において変位を測定すべき部分に決めた。

シヤッキを取り付けた後、幾分無理の生ずる可能性のあること、およびシヤッキに少し摩擦のあるところから、油圧 5 kg/cm² と 75 kg/cm² の間に測定を行ない、その差 70 kg/cm² の間は、測定値を平均して変位を求めたことにした。油圧上昇および測定に要する時間はそれぞれ約 1 分であった。この大きさの荷重には最大歪が 600 × 10⁻⁶ 程度であり、応力-歪曲線はほとんど直線と見えてよく、応力は圧縮強度の 1/3 程度にある。しかしながら測定中に幾分クリープがあられたことが認められた。

主要な実験を行うためには表-3.9 に示す通りの 10 回の測定を要したため、この間に材料の性質が幾分か変化した。但し前述のようにクリープその他影響をうけず、同一模型の同一測定点において測定値はほぼ同一の測定値は得られた。しかし、一部の測定においては、切欠き部における影響を正確に把握するために、前回の模型について測定後、測定計器に手を触れず直接に所定の切欠き部として再び測定を行い、両測定値の差をとることにした。測定値を要するときに得られた結果は必ずしもこのときの変位と一致しなかったが、個々の模型についての実験値としては全測定値の平均をとることで、上記のような模型図に於ける測定値の差は、個々の模型について示した実験値から差をとる場合とは一致しないことがある。

(4) 模型 A の実験結果

模型 A は EL. 82.0 m 附近に存在する。全く切欠き部の形状である。

(1) 変位

附図-I.3.28 ~ I.3.30 に半径方向、接線方向および鉛直方向の変位を示す。図は

ついて上流から下流を見た状態を示すのである。

基礎岩盤は非対称に作られたが、変位には大きい非対称が現れていない。この実験の程度で基礎岩盤の非対称性は埋填の変位に大きい影響を及ぼさないと考えてよい。

片持梁の半径方向変位曲線が下流に凹んでいる。この方向は鉛直方向・曲率半径は54.片持梁は上下に伸びようとする。そのため、附図 I-3.30 に見られるように、右の支端にありかなり大きい上向きの変位を生ずることになる。このように結果から片持梁の下流側に引張応力を生ずることが予想されるものであり、応力測定の結果によるとこの傾向が明確に現れている。

(ii) 応力

附図 I-3.31 および I-3.32 は主応力を示すものである。測定の右下に記入にある数字は上から順次第1主応力、第2主応力、第3主応力の水平線とある角と示すものである。サドルにおける測定の位置は、サドルと基礎岩盤との交点より水平距離 5 ~ 10 cm の場所である。最大および最小主応力は表-3.12 に示す通りである。下流面の EL. 30.0 - D に付する 62.6

表-3.12 最大および最小主応力 (kg/cm^2)

模型	上 流 面		下 流 面	
	最 小	最 大	最 小	最 大
A	-42.0 (EL. 45-E 附)	7.0 (EL. 30-D')	-42.8 (EL. 79.5-A)	23.0 (EL. 15-E)
B	-40.3 (EL. 45-E 附)	7.1 (EL. 30-D')	-43.7 (EL. 79.5-A)	17.5 (EL. 15-E)
C	-42.6 (EL. 60-E)	7.8 (EL. 60-B')	-45.7 (EL. 79.5-A')	11.5 (EL. 15-E)

kg/cm^2 という値は後述するように誤差が大きい実験には測点 EL. 15-D' における値と大差のないと思われる。ただし EL. 82.0 の左岸サドル上流面において $-17.7 \text{ kg}/\text{cm}^2$ という値が現れている。

一般的に応力状態にも著しい非対称性は認められない。左端主応力の大きいのは下流面アバウトにおけるアバウトの縁と直角に近い方向と、上流面クランにおける水平方向である。右の引張主応力の大きいのは下流面のサドル中央部における鉛直方向と、上流面下部のアバウトにおけるアバウトの縁と直角に近い方向である。これは試し荷重解折 1-8-2 に示す傾向と一致する。

アバウトの応力は附図 I-3.33 および I-3.34 に示す。上流面ではクランよりアバウトメントの方が応力が小さくなるが、引張応力は全く認められない。下流面においてはこれと逆の傾向を呈し、クランの最下部すなわち EL. 15.0-E において局部的に $7.6 \text{ kg}/\text{cm}^2$ という

引張力が現われている。この部分では卓越したアーチ作用を期待することは無理であり、
 したがって模型の引張力の生ずることは正しく得たものと考へられる。

また下流側に 20° 傾けられている、この部分については断面が厚くなることと中心軸
 までアーチの接合部より急に下流側に傾くこと、この結果により、EL. 30.0m を降くと、サ
 ルの部分には上流側の底力が増加し下流側の底力が減っている。

片持梁底力は附図-I.3.35に示す通り、接合部が下流側に傾いていることに
 対応し、その中央部では下流面に引張力、上流面には圧縮力が現われ、サ
 ルは 1.20 kg/cm^2 を越えるまでに達する。片持梁底面の上流側には幾分引張力を生
 ずる。

(5) 模型 B および C の実験結果

模型 B および C の実験結果については、概ね各の梁のみを説明する。

(i) 模型 B

模型 B は FL 75.0m の中央部に越流のための切欠きを作ったものである。そのために、
 模型 A より全般的に底力と幾分変位が増えただけ、接合部の形はほとんど模型 A の
 場合と変化がなかった。

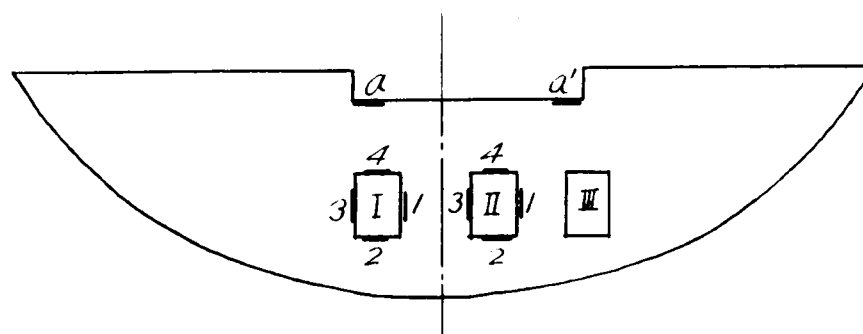
アーチ底力を調べると、切欠きのために上部クラン附近にあって増大することが認められ、
 片持梁底力は上部アーチの接合部増加することになり、下流面中央部に発生して引張力、
 および上流面中央部に発生して圧縮力が減すの傾向を示す。越流部の隅角に於ける集中
 底力は際限のない値をもちあつた。

(ii) 模型 C

模型 C は模型 B に於いて3つの埋内放流孔を設けたものである。模型 A と B とを比較
 すると変位は底力と両方について大差なもので、模型 C に於いても全体的に於いて
 これらの値について極端な変化が生じないものと考え、この場合には主として埋内放流孔周辺の
 底力とクラン片持梁 および EL. 60.0m に於ける底力のみを測定することにした。また模型
 B に於いて測定した越流部の隅角極近傍のアーチ底力を測定した。放流孔が作られ
 ことにより底力の変化は極めてわずかであった。

表-3.13には放流孔周辺と越流部切欠き隅角に於ける底力を示すものである。放流孔
 上流面の上、下縁では圧縮底力が 6.6 kg/cm^2 を越える。この程度であれば同一要素は所
 が、測定位置は辺の中央である。したがって隅角では当然これよりもさらに大きな底力となる
 から十分注意が必要である。下流面の鉛直面では大きな引張力が現われている。これは

表 3-13 堤内放流孔周辺および堤頂
越流部隅角の応力



放流孔周辺応力 (kg/cm^2)

	孔	位置	実験 C	実験 D	D - C
上 流 面	I	1	-4.8	-3.4	1.4
		2	-63.0	-65.0	-2.0
		3	-2.3	-0.7	1.6
		4	-60.2	-61.5	-1.3
	II	1	-3.2	-2.6	0.6
		2	-51.0	-53.1	-2.1
		3	-8.3	-7.4	0.9
		4	-59.0	-62.7	-3.7
下 流 面	I	1	27.9	26.7	-1.2
		2	-35.7	-36.2	-0.5
		3	22.5	23.3	0.8
		4	-39.9	-41.1	-1.2
	II	1	10.5	10.3	-0.2
		2	-30.8	-29.4	1.4
		3	16.3	16.3	0
		4	-35.7	-33.5	2.2

越流部隅角応力 (kg/cm^2)

	位置	実験 C	実験 D	D - C
上 流 面	a	-43.0	-39.2	3.8
	a'		-29.7	
下 流 面	a	-31.6	-32.2	-0.6
	a'		-29.4	

後述するように自重に与える圧力が重ね合わせの問題を生じない。また上流面上、下縁の圧縮底力は自重の影響を考慮に入れたと幾分変化することを考慮に入れる必要がある。

(6) 模型 D の実験結果

模型 D は模型 C においてさらに EL. 75.0^m 以上のアーク作用を付したものである。この構造は前章の計算値に相当するものであり、実験に用いた載荷条件に対しては試し荷重法による解析が行なわれていたため、適宜結果と比較することが出来る。なお計算上は EL. 73.0^m 以上においてアーク作用がないとしている。

(i) 変位

平均方向の横変位は、附図-I-3.36 に示すように、EL. 75.0^m 以上のアーク荷重を支持しないため、模型 A に増加している。この図にはウーパ片持梁についての計算値も示している。両者の最大値はほぼ同一であるが、計算による横変位曲線は上流側にわずかに凸の曲線となっている。この傾向は実験結果と全く逆である。

(ii) 圧力

さらに、アーク底力および片持梁底力は附図-I-3.37 ~ I-3.41 に示す通りである。この図より、模型 A の場合よりも EL. 60.0^m より上部においてはアーク底力の増加していることがわかる。圧力の最大および最小値は表-3.12 に示した通りである。

EL. 45.0^m においては 3 つ並んだ放流孔の周りにける圧力は、模型 B の場合に比べて極端に大きくなり、模型 D において近傍の奥とかなり連続した圧力曲線を描くことが出来る。この程度の放流孔では広い範囲にわたって圧力を攪乱しないことがわかる。しかし、表-3.13 に示すように孔の周辺には局部的に大きな圧力が生ずることは避けられず、模型 D においては、孔の上流面上、下縁に生ずる大きな圧縮底力は模型 C におけるよりも小さくは増大している。また表-3.13 において越流部隅角において、模型 C と D における圧力の差は小さいことから、底力集中は大きくないと考えられる。

模型 D において標高 140 日のとき 10 測点において歪計と埋り替えて測定を行なった。その結果に於て下流面の測点 EL. 30.0 - D を除けば、以前に得られた値と大差はなかった。しかし下流面の EL. 30.0 - D においては表-3.14 に示すような大きな差が現れた。そこで再度歪計と埋り直して測定したところやはり新しい値を示したため、この値を採用することにした。模型 A において示した奥の圧力は訂正する必要がある。

模型 D の圧力を計算値と比較するとアーク底力は EL. 60.0^m および 30.0^m と除くとほぼ同一である。上流面のアバウトメントにける圧力は実験値の方が小さく、下流面の

表-3.14 下流面測点 EL. 30.0-Dにおける主計貼り替へ前後の応力比較
(kg/cm^2)

条 件	主 応 力			直交応力成分		
	σ_1	σ_2	θ	アーチ応力	片持梁応力	剪断応力
主計貼り替へ前	-14.4	-51.3	$43^\circ 50'$	-32.1	-33.6	18.5
主計貼り替へ後	-6.3	-40.6	$43^\circ 50'$	-21.8	-24.8	17.1

アバウトメントの応力は実験値の方が大きい（ただし EL. 30.0 m においては例外）（しかしながら下流側アバウトメントにおける応力は幾分集中応力が測定されたものと考えられる）。上流面において $-10 \text{ kg}/\text{cm}^2$ 程度の圧縮応力を示すところ、下流面においては最大 $-45 \text{ kg}/\text{cm}^2$ 程度の値を示すところから、特に不安はないであろう。

変位曲線よりわかるように、片持梁応力は計算値と大さく差がある。実験結果によれば、上流面に引張応力を生ずる傾向が少なくなつた。片持梁応力としては、さらに自重による応力を加えておかなければならない。

(7) 形状変化の影響と計算値との比較

(i) 変位

模型 A \rightarrow B \rightarrow D のように、頂部のアーチ作用が減少されて、半径方向下位の変位量が増大した。模型の形を変更に直前と直後に於ける測定値の差をとり、これを形状変化による変位の差であると考えたところから、表-3.15の通りである。

模型 A から B に変えて越流部を作ると、全体としておおよそ半径方向の撓みが増加し、特に上部のクラウチ付近には撓み増加がとくに著しい。さらに模型 D のように EL. 25.0 m 以上のアーチ作用を全くなくすると、A \rightarrow B に於けると同様に撓みが増加する。クラウチ付近のみならず上部アーチ全体にわたって撓み増加量が大さく。

(ii) 応力

まずそれらの模型に於いて主応力の最大値と最小値はすでに表-3.12 に示した通りである。模型 A \rightarrow D のようにつれて、その一部分に於いてアーチ作用が消滅するから、応力の増大を期待することになる。このように原因によつて、表-3.12 に示すように幾分主応力の最大値は増大し、発生位置に於いても変動がある。下流面に於ける最大主応力が減少するのは、この最大主応力は片持梁応力であり、片持梁の全長荷重が増加することによるものである。すなわち、模型 A に於いて、クラウチ片持梁の下流面中央部に大さく引張応力が

表-3.15 タム形状の変化による変位の差 (mm)

位 置	(模型B)-(模型A)	(模型D)-(模型C)
EL. 82-A	0.2	0.5
EL. 82-B	0.6	4.0
EL. 82-D	1.9	2.2
EL. 82-D'	1.6	2.5
EL. 82-B'	0.4	3.1
EL. 82-A'	0.4	1.2
EL. 73-E	1.0	1.4
EL. 60-E	3.2	0.9
EL. 45-E	0.9	
EL. 30-E	1.0	0.4
EL. 15-E	1.0	

か生じようか、模型B, C, D とすると上部のアーチ作用が増大するため、必然的に片持梁の分担荷重が増加し、その反の曲げモーメントは下流面に圧縮応力が增大する。

アーチの荷重分担状況を調べるために、上、下流面応力よりアーチに与えられる平均軸応力を求めるのが図-I.3.42である。ここ、

$$\text{平均軸応力} = (\text{上流面アーチ応力} + \text{下流面アーチ応力}) / 2$$

である。模型AとDとを比較すると、明らかに上部アーチは模型Dの方が軸応力が大きくなり、分担荷重が多いとわかる。下部のアーチは模型Dの方が軸応力小さくなり、分担荷重は幾分疑問がある。以下このよう軸応力を各ホースアーチについて平均したのが表3.16である。

表-3.16 アーチ軸応力の平均値 (kg/cm^2)

アーチ標高	79.5	73.0	60.0	45.0	30.0
模型A	-19.4	-18.4	-20.6	-23.6	-23.4
模型B	-17.3	-19.0	-21.8	-23.1	-22.0
模型D		-23.0	-21.3	-22.5	-21.0
計 算		-22.4	-20.2	-23.3	-25.5

これによつて 模型 A では下部より上部の方が車軸圧力・平均値が小さいが、模型 D になると、上部アーチの負担荷重が増加し、その結果にたいして模型 D のアーチが同じ大きさの車軸圧力を示していることがわかった。模型 D の車軸圧力を計算値と比較すると、その平均値は極めてよく類似している。模型 B における車軸圧力は模型 A と D の平均値を示しているのは当然であり、EL. 79.5m においては越流部のためアーチは埋没されているにもかかわらず、車軸圧力の平均値はかなり大きいことが注目すべきである。

つぎに、アーチの曲げモーメントによる応力分布を附図-I-3-43に示す。ここに、

$$\text{曲げモーメントによる応力} = (\text{上流面アーチ圧力} - \text{下流面アーチ圧力}) / 2$$

であつて、図には上流面の応力を示している。この図より模型 A および D の実験値と計算値とを比較すると、曲げモーメントは互に近似していることがわかる。これより、模型 D のアーチは計算値と近い値を示していることが注目される。

附図-I-3-44には片持梁の曲げモーメントによる応力分布を示している。この図より、片持梁の応力は上流面に圧縮応力、下流面に引張応力を生ずる傾向にあることがわかる。また、片持梁の底面にける曲げ応力も非常に小さい。しかしながら、計算によつては、この曲げ応力は把握されていない。

上記のよう車軸圧力および曲げ応力の分布は、模型の形状によつて大きく変化するが、その変化の様子は表-3-17にある。模型 B では越流部を作るために、模型 A と比較すると、下流側の EL. 73.0 - E では車軸圧力が著しく増大し、かつ片持梁圧力は上流面曲げ応力の数値 kg/cm^2 程度減じ、上流面下流面では同じ値に増加する。模型 D では EL. 60.0m の数値と模型 C の場合と比較すると、このときは上部面側のアーチ作用が消滅したため、この影響によつて EL. 60.0m のアーチにおいても内側のアーチ車軸圧力が増大している。片持梁の曲げ応力にたいしては全般的に変化があることがわかる。このよう現象によつて、模型の形状が変わるに依つて表面応力分布は大きく変化するが、その変化の様子は表-3-18にある。応力変化の様子は場所によつて異なるが、模型が A から D に変わるにつれて、全般的にアーチ圧力は増加し、片持梁圧力は上流面に引張、下流面に圧縮応力の増加する傾向があることがわかる。

埋設放流孔をあけても、その全般的な応力状態に大きな変化を及ぼさない。しかしながら、放流孔の周辺には 60 kg/cm^2 程度の大きな応力を生ずる傾向がある。模型 C と模型 D とを比較すると、やはり模型 D の方が放流孔周辺に高い応力分布があることが危険な応力状態となる。

表-3.17 形状変化による軸圧力と曲げ圧力の差
(kg/cm^2)

(模型 B) - (模型 A)

位 置	ア - 千		片持梁
	軸 圧 力	曲 げ 圧 力	曲 げ 圧 力
EL. 73-A	2.20	2.10	0.15
EL. 73-E	-5.55	1.65	-4.35
EL. 73-A'	-0.70	2.60	0.75
EL. 60-B	-1.20	2.40	-2.40
EL. 60-E	-2.15	0.75	4.00
EL. 60-B'	0.60	-0.60	-0.35
EL. 30-E	2.90	2.70	3.50

(模型 D) - (模型 C)

位 置	ア - 千		片持梁
	軸 圧 力	曲 げ 圧 力	曲 げ 圧 力
EL. 60-B	-1.80	0.60	3.85
EL. 60-C	-0.20	2.10	2.80
EL. 60-D	-1.65	1.45	2.30
EL. 60-E	1.10	1.20	1.60
EL. 60-D'	-1.25	1.05	1.65
EL. 60-C'	-1.05	1.20	2.75
EL. 60-B'	-3.25	1.95	3.35

表-3.18 形状変化による圧力差 (kg/cm^2)
(模型 B) - (模型 A)

位置	上流面			下流面		
	ア-4底力	片持梁底力	剪断底力	ア-4底力	片持梁底力	剪断底力
EL. 73-A	0.1	0.1	0.1	-1.0	-0.2	-0.1
EL. 73-E	-3.9	5.4	-0.2	-7.2	-3.3	1.6
EL. 73-A'	1.9	0.9	-1.1	-1.0	-0.6	-0
EL. 60-B	1.2	-0.5	-0.1	-3.6	4.3	-1.2
EL. 60-E	-0.9	4.1	-0.4	-3.4	-3.9	-2.1
EL. 60-B'	-0	0.2	0.1	1.2	0.9	1.5
EL. 30-E	5.6	0.7	1.0	0.2	-6.3	0.5

(模型 D) - (模型 C)

位置	上流面			下流面		
	ア-4底力	片持梁底力	剪断底力	ア-4底力	片持梁底力	剪断底力
EL. 60-B	-1.7	2.5	0.5	-2.4	-5.2	-1.4
EL. 60-C	1.9	0.7	-3.4	-2.3	-4.9	-0.2
EL. 60-D	-0.2	2.1	-1.1	-3.1	-2.5	2.9
EL. 60-F	2.3	3.4	-4.2	-0.1	0.2	0
EL. 60-D'	-0.2	0.7	2.4	-2.3	-2.6	0.4
EL. 60-C'	-0.3	3.2	-0.4	-2.7	-2.3	-0.8
EL. 60-B'	-1.3	3.1	1.0	-5.2	-3.6	-0.3

(8) 模型 D の実験値の検討

前記計算値と実験値を比較した通り、総合的に考えれば両者の結果はかなり一致している。主要な相違点をあげれば、アバットメントにおける底力と、ア-4の計算値よりも大きいということ、片持梁底力が非常に異なっていることである。主底力図は右の図に於いて附図-I.2.13に示した計算値と類似している、底力の伝播状況は傾斜

ア-4法の假定と同様な傾向であることがわかる。

(i) ア-4抵抗力

ア-4の曲げモーメントによる抵抗力が曲げ力による抵抗力に比べて小さいので、ア-4に引張抵抗力を生ずることはない。したがって下流面ウラウラに最下層 (EL. 15.0 m) において約 8 kg/cm^2 の引張抵抗力を生じているが、この裏打ち部分から上へ EL. 22.0 m へは -3.6 kg/cm^2 の圧縮抵抗力を生じているので、上記のような引張抵抗力は極く局部的なものと考えてよい。

表-3.18 に示す抵抗の標高のア-4においても曲げ抵抗力はほとんど同じである。ア-4の曲げ力はここに示した曲げ力に断面種別により異なるから、曲げ力は同じ断面の厚さの比で材料に与えられることになる。

(ii) 片持梁抵抗力

片持梁抵抗力は実験値に自重による抵抗力を加える必要がある。自重による片持梁抵抗力は表-3.19 に示した通りであり、これに実験値を加えると表-3.20 に示す抵抗力となる。この抵抗力と片持梁抵抗力は引張と圧縮とを区別しない。しかしながら

表-3.19 自重による片持梁抵抗力 (kg/cm^2)

片持梁 標高	上 流 面					下 流 面				
	E	D	C	B	A	E	D	C	B	A
75.0	-6.4	-1.5	-1.8	-2.2	-2.5	-3.2	-2.1	-1.9	-1.4	-1.2
60.0	7.2	3.2	-2.4	-7.7		-14.7	-10.8	-5.2	0.4	
45.0	12.5	0.3	-19.5			-24.6	-12.8	6.8		
30.0	11.6	-26.2				-27.4	7.7			
15.0	5.7					-22.6				

ウラウラに片持梁においては上流面の上部および底面において数 kg/cm^2 程度の引張抵抗力が認められる。この引張抵抗力は主として自重に起因するものがあり、水圧その他の荷重が作用しても打消されずに残っているわけにある。ウラウラに片持梁の上流面基礎に於ける抵抗力と比較すると、表-3.21 に示すようにウラウラにア-4の作用を保持せしめると、やはり片持梁の分担荷重が減少するので、なおかつア-4の片持梁底面上流側の引張抵抗力が減少する。

表-3.20 実験値と自重と10cm片持梁底力 (kg/cm²)

	標高	片 持 梁								
		A	B	C	D	E	D'	C'	B'	A'
上 流 面	73.0	-1.0		-3.7	-1.3	1.4	-2.9	-4.9		0.2
	60.0		-7.2	-5.7	-1.5	5.2	-1.1	-3.5	-3.3	
	45.0			-16.0	-8.3		-6.3	-17.1		
	30.0				-19.0	-1.0	-19.2			
	15.0					6.6				
下 流 面	73.0	1.1		-1.7	-0.2	-3.6	-4.0	-3.6		-3.1
	60.0		-2.6	2.0	-5.7	-13.6	-10.7	-0.7	-4.4	
	45.0			-4.7	-7.3	-10.8	-4.5	-1.2		
	30.0				-17.1	-20.1	-8.5			
	15.0					-23.8				

表-3.21 クラウン片持梁上流面基礎の底力比較 (実験値+自重: kg/cm²)

模 型 A	模 型 B	模 型 C	模 型 D	計 算
4.3	7.0	5.7	6.6	18.4

(iii) サトルの影響

サトルは下流面を20°傾け付けた形としたため、かなり板留めの反力果が現われ、附図-I-3.42 および I-3.43 に示すように曲底力は減少し、曲底力は EL. 60.0^m には減少し、EL. 30.0^m では増加している。サトルの底力は正確に測定することは困難であり、これらの結果の信頼性には多少疑問があるが、サトルは曲底力の軽減に役立っているものと見て、附図-I-3.33, I-3.34, I-3.39. および I-3.41 に示すようにサトルの底力状態はダム本体とサトルの接合部におけるよりも良好 (EL. 30.0^m を除いては圧縮底力の上流面で増え、下流面で減少する) である。

(iv) 埋込放流孔周辺底力

放流孔に与えたダム全体の底力は殆んど傾斜しなかったことは以前に示した通りであるが、放流孔周辺に大きな底力の生ずることを避けることはできなかった。放流孔下流面の側壁に生ずる引張底力は、自重による底力を加之したむしろ圧縮底力と仮定でき

ものである。放流孔と流面の上、下縁部に現われている -60 kg/cm^2 を越える圧縮応力は自重による応力に加えると増加の傾向にあると考えられることであり、また上流面における鉛直壁には、自重によって大きい引張応力が生ずると考えられるから、この応力に加えると引張応力となる可能性がある。またこの実験では測定していないが、放流孔の隅部には当然応力集中現象を呈する。このように放流孔の上流面ではかなり危険な応力状態となる。

§ 3.5 主要荷重による応力状態に制約考察

模型実験によると、面制ではあるが詳しい応力解析を行なえば行なうほど、計算値は実験値に近づくことが明らかになった。解析法の中に、重カラムにもアークダムにも適用でき、しかも精度の高いものは試し荷重解析法にある。試し荷重解析法によって得られた結果はダムの三次元的な構造上の特徴を満足する程度にとらえている。そこで、試し荷重解析による結果に模型実験結果を加えて、重カラムならびにアークダムの応力状態を明らかにした。

(1) 水圧その他の外力による応力状態

(i) 重カラム

ほとんどの重カラムは key による荷重が水平方向にも伝達される。その結果水平方向に引張応力が生ずることは避けられない。しかしながら、この引張応力はダムの安全性を直接左右するものではないから、ある程度大きさまで許されるものである。横断断面はコンクリートと基礎との間に連続して打設したコンクリートより引張応力が小さいから、引張応力が大きいのは事実上はこの断面が用いられるためであると考えられる。その結果水平方向の荷重伝達が要となる。最初この断面が完全に張着しているとは仮定したのであれば、水平方向の引張応力が非常に大きくなるこの仮定が成立しなくなるから、このような引張応力はコンクリートの引張応力よりは幾分小さい値までより許すことはできない。

横断面を考えたとき、最も危険なのはダム中央部における最高ブロックである。このブロックの分担荷重は、谷幅が狭いほど軽減される。換言すれば谷幅が狭いほど荷重の水平に伝達される率が大きくなる。そのため、ダム中央部における応力値が軽減されるとともに剪断摩擦安全率は増大する。一方、接岸部のブロックの支持荷重は大きくなり、剪断摩擦安全率は減少する。このように、二次元解析のときと比べ

7 応力分布に剪断摩擦安全率が均一化する²⁾、ダムを経済的に設計する²⁾ことができる。

横断面の詳しい応力状態を研究してみると、底面附近においては非直線的な応力分布を生ず。特に水圧とか自重などの荷重が個別的に作用するときには足座および趾部において極めて大きい応力集中を起す。しかしながら、これらの荷重が同時に作用するときには互に影響を打ち消し合つて足座および趾部における応力はそれほど大きくはならない。そのため、直線的な応力分布の仮定を採用し、応力集中を無視しても大きな不安は存在しない。堤底面における剪断摩擦安全率は平均値のみを計算しているわけであるが、これも最悪条件の設計荷重が作用するときを考慮し、場所的に行きとど一定であるので平均値のみを考慮してよいと考へたわけである。

三次元模型の実験結果によつて、試し荷重解析結果よりもダムには圧縮応力が大きく生ずる。この結果上流面において鉛直引張応力の現われの危険性は遠ざかり、水平に近い方向の引張応力も減する。したがつて試し荷重解析による結果よりも安全な状態にあると考へた。ただし、底面における剪断応力の平均化は実験値の方が小さく、そのため、ダム中央部底面における剪断摩擦安全率は小さくなった。これは1例にすぎないのでさらに詳しく研究する必要がある。

(II) アーチダム

五ヶ所アーチダムに於いてもかなり厚い断面のものを用いてゐたが、近年基礎岩盤の改良工法が進步するとき安全性と経済性が考慮されるようになり、アーチダムに関する研究が進み、よほど悪い地盤でない限りは非常に薄い断面が採用されるようになった。このようなダムにおいては大部分の荷重が水平なアーチ要素によつて支持され、その応力状態の1例は図3.4に於いて示して通りである。ただし、この例に示した天ヶ澤ダムは（最大厚さ/底幅）の値が0.216に於いて極端に薄いといふほどのものでは無い。

このようなダムに於いては、高さの中央附近の下流面のアバットメントに於いて最大の圧縮応力の生ずる場所が多く、その方向は岩盤線と直交に近いものである。一方、この位置に於いて岩盤線に沿う方向にわずかな引張応力を生じ易い。これはダムの安全性に直接関係がない。上流面においては、これと逆にアバットメントに於いて岩盤線と直交方向に小さい引張応力が現われ易い。この引張応力によつてひび割れが発生し漏水にいたることを避けるため、周辺を注目を要してゐるから止め止水工法を施してゐるところがある。以上の結果は試し荷重解析法によつて得られた応力状態と一致するものである。試し荷重法によつて種々の条件を解析仮定に採り入れることのできるのみならず、得られた結果が

比較的満足すべきものであるから、現在ではダム設計ならびに応力解析に広く用いられている。

しかしながら、ダム中央部における片持梁の応力は試し荷重法の結果と著しく異なっている。主要な原因は天ヶ澤ダムではかなり大きい鉛直方向の曲率を持つていかに加わらず、この曲率を無視して解析した点に在る。鉛直の曲率を持つ片持梁は鉛直変位を生ずるので、正確な解析を行うためには、試し荷重解析において鉛直方向変位も考慮する必要を生じる。この条件を満足するための解析は面倒であるので、現在までには実施されていない。§3.4における測定値による鉛直変位の無視でよいことが明らかである。実験結果によれば、鉛直曲率の大きいアーチダムでは片持梁底面上流側に生ずる引張応力が計算値よりも著しく小さくなり、実際は安全側にある。多くの研究結果を参照すると、一般にはその他の位置においても、局部的な応力集中を除外すると、実験値の方が計算値よりも安全側の応力を示している。

また、クラウチン層の下流面において、計算では把握するべきでない水平引張応力が部分的に現われ易いことが、計算よりも危険な状態を示す現象である。この原因は底層アーチがほとんどアーチ作用を呈しないことと、基礎岩盤の形状（谷幅の拡大）によるものである。これらによって避ける難いものである。この引張引張応力は、ダムの下流側の一部に生ずるものであるから、ダム全体の安全性に因るは不慮である。しかしながら、基礎岩盤の形状状況がアーチダムの応力に及ぼす影響は大きく、さらに詳細に研究する必要がある。

アーチの中心角を 100° くらいまで大きくすると、アーチが薄くなって基礎岩盤の要くもアーチに引張応力も発生しない。また、アーチを増厚するかサトウをつけて、アバウトメントにおける岩盤接触面積を増大せしめて軟弱地盤の悪影響を軽減することが可能である。中心角が小さく厚いアーチにおいては、アバウトメントが半径方向にならず平行に近ければ、クラウチンの応力状態が要くならから注意が必要である。

アーチダムの特徴は面荷力の大きいことである。前に示した実験結果より明らか通り、アーチダムでは高次の不連続的構造であるから、ダムの一部に切欠きを作られたり、上部数層にわたってアーチ作用が消滅しても、残りの部分の応力が幾分増大するから安全に荷重を支持する点からである。このようなアーチダムの特徴を正しくするため、アーチダムの面荷力に関する実験が盛んに実施されるようになった。著者の天ヶ澤ダムについて実験したところによると、設計荷重の 8.7 倍

まの荷重を支持し得るようになった。これに、このダムで使用される圧縮強度の $1/6$ である。M. Rocha の行った多くのダム模型についての実験³⁵⁾、あるいは、(1) 国、
- 佐々木川ダムの実験³⁶⁾ などの結果を参照しても類似の値を算出されている。一部に引張
底の欠陥が割れが発生しても、アーチダムは壊れることなくさらに大きな荷重を支持
するのを実験によって認められる。したがって、アーチダムの安全性は単に設計荷
重による応力状態のみで論ぜられないことに注意が必要がある。

(2) 熱応力状態

現行の設計規程によれば、温度変化を考慮するものはアーチダムと扶壁式
ダムの流水面より比較的小さい断面に對するものである。考慮すべき温度変化は
15年温度変動の断面中における平均値を採用すべき。アーチダムに對してこのよう
な温度変化を採用するときには、堤体が年平均気温のときに冷却されて一層となる
仮定すると、70m 級の天ヶ原ダムに對するは熱応力が発生応力の割程度である。
低いダムでは発生応力が小さい割に、断面が薄いため平均温度の変動が大きいか
ら熱応力が重大な問題となるが、高いダムに對してはほとんど熱応力を考慮する必要
がないとなる。第3.2 の実験に對して熱応力からかなり大きい値を算出しているのは、
その指摘に對して弾性係数を大きく仮定している以外に、厚い断面に對して大き過
ぎる温度変化を仮定した場合の値を算出しているからである。二次元アーチに對ける
熱応力の計算と実験を比較すると、慣用の解析法による水圧の作用する場合と同
程度の精度で応力の値を算出できていることがわかる。

実際のダムに對しては、コンクリートと土が接するところ水和熱が発生、コンクリート
とコンクリート表面と内部とに對して大きい温度差を生ずる。水和熱の発生割合が次第に
減ずるとともに表面からの熱放散が多くなるためダムの温度は徐々に低下して行く。こ
の間に對してダムに比較的大きな熱応力が生じ、そこから内部に波及するようにダムに
びび割れが発生する³⁷⁾。水和熱が完全に放散されたときにおいては、ダムの表面は
外界の温度変動に對して温度が変動する。ダムの内部と外部との温度差により熱応
力を生ずる。もしコンクリートの温度が設計時と同じ温度になったとしても、コンクリート
の割合が若いときには著しく塑性を示すので、塑性性によって応力が消滅するとい
うことはない。すなわち残留応力が存在するわけである。

コンクリートに生じたびび割れがダムの安全性に重大な影響を及ぼすことがある。
この割れがダム全体を考慮したときの安全性にほとんど影響がない場合でも、漏水の

原因となり、耐圧性を減じたりして間接的にタンクの安全性を減するようになる。
また、残留応力の大きさと、それがタンクに対して好都合なものか否かという性格を知
る必要がある。本章までに述べたことより、設計荷重に対する応力状態はだいたい
において明らかになったが、このような熱応力及びその影響を判然とせしめないと、
真のタンクの応力状態を把握するわけが難しく、タンクの安全性を判定することはでき
ない。

タンクの熱応力状態は非常に複雑である。実験的に研究するにしても実験方
法に困難が多いので³⁸⁾、実験的研究は最近ポルトガルにおいて初めて行
はれ³⁹⁾た。熱応力状態の研究は、まず実在するタンクの測定結果より明らかにな
された。その結果によると、熱応力はその他の荷重による応力と同程度の大きさに
達し、極めて重要であることがわかった。そこで次章においてタンクの実測値につ
いて述べることにする。

第 4 章

既設ダム、応力状態の調査と研究

ダム、応力解析と模型実験の結果を比較すると、幸いにして原則的に比較的良好一致が得られ、しかも模型実験の結果の方が、局部的応力に集中を呈せると、一般的に安全側の値を得ている。この事実から、実際に建設されたダム、応力状態は計算応力/応力より実験による方が正確に判明しているものがあると考えられる。従って、実際のダムに於いては計算応力より実験に採り入れるべき複雑な条件に多数存在するものがある。

たとえ、均質等質性弾性体と仮定していても、基礎岩盤は不均質である。ダムは建設中に於いても完成後に於いても複雑な温度変動を受ける。施工条件により、応力状態が変わる。さらに、継目の機能、材料の大きさなど単純な仮定通りであるとは考えられない。したがって建設されたダムについてその実情を観測し、詳しく記録と検討することは次代のダム工学に寄与するところが多い。この場合、たとえば温度、揚圧力、変位、応力、継目の変位など個別の観測値が得られ、それらは利用価値がある。上述の数値は使用に、フックリー、材料、基礎岩盤の性質と基礎処理の方法、さらに施工条件などと密接な関係があるから、これら使用について調査を計画して行い、設計応力/応力より模型実験に採用した仮定との差を明らかにするとともに、観測値、予測値と予想した値との差について、その原因を究明することによってさらに検討が必要となる。

§ 4.1 ダム、観測

(1) 初期の観測

ダムについてはコンクリート、水和熱放散が顕著なため、コンクリート打設後間もなく内部がかなり高温になる。内部と外部の温度差によりコンクリート表面にひび割れの生じ易いことがあるから経験された。したがって、ダムに於いては温度変化を生ずるものがあるからその実状を知るために、ダムに於いてコンクリートの温度測定が行われた歴史は非常に古い。たとえば、1915年に C. H. Paul と A. B. Mayhew¹⁾ は Arrowrock ダム (重力ダム) について温度測定を行ない、マスコンクリートは打設後1ヶ月以内に最高温度に達し、数ヶ月間は内部まで冷却され、このことを明らかに

気温は変じ、乍変じに依りて、測定位置により温度変化の様子が異なることを明らかにした。

このため、観測資料はタム機能がある程度明らかになつて、L.R. Jorgensen²⁾は Salmon Creek タム (アーク タム) のクローウの撓みを測定し、水位と季節における撓みの変動の様子を述べた。この結果によつて、温度変動に依りタムへ撓みはかかり入るものといふことがわかり、後に、F. A. Naegle³⁾は、Jorgensen の示した測定値から温度変動に依り撓みを分離することを試みた。

一方、揚圧力の大ささがタムの安定性に重大な影響を及ぼすといふ、これに第1章において述べたように、古くから理論的研究が行なわれてゐることも多数の渠在タムについて調査が実施された。しかしながら、1930年頃までは揚圧力、温度、撓みなどを個別的に観測されるものが多く、それらがタムにどのような影響を及ぼすものかといふ点に於いて、一貫した研究はほとんど行なわれてゐなかつた。タムに於ける各種の観測がダム工学の進歩に必須のものであることが認識されるとともに、1930年以後にはタムに於ける観測の技術ならびに理論の長足の進歩を遂げ、測定計器の著しい進歩も亦それによつて信頼できる資料が長期に亘つて得られるようになった。

(2) 測定計器

フークリットの温度は古くから電気抵抗体の温度変化を利用して測定されてゐてゐた。現在でもこれを用ゐられてゐる。しかしフーリップに於いては熱電対も利用されてゐる。⁴⁾ 温度は比較的測定し易く、いふれの計器によつても良好な結果が得られてゐる。

タムへ撓みは精密な測量に於いて絶対要位を求めようことが実行されてゐる。このように絶対変位を求め、基礎岩盤へ撓みも測定するものが最も利用価値の大きい資料が得られるわけである。しかしながら、このような測定は多額の費用を要するもの、常に測定を実施するのことが困難である。したがって測定値を補正する意味に於いて、あるいは費用を節約するため、簡単にフーリップによつて相対的な撓みを常時測定するものがしばしば実行される。

タムへ撓み測定に關する最も注目すべき発展は、歪を測定する信頼性の高い遠隔測定用の計器が行なはれたこと、直接応力を測定する計器の発達したことである。

歪測定のためには、アメリカにおいては電気抵抗変化を利用すること古くから行なわれてゐた。初期のものは炭素棒の応力による抵抗変化を利用した計器が作られ、⁵⁾ 以後の改良を加へられて、弾性的な電気抵抗線を用いて信頼できる歪計が完成された。⁶⁾ 一方ヨーロッパにおいては、銅線への振動数が張力による変化を利用する計器が行なわれてゐた。現在ではこの2種類の計器が広く利用されてゐる。電気抵抗線式

歪計の代表的なものはアメリカの Carlson 歪計である。振動式歪計はドイツの Altkhak 型、フランスの Cogné 型、オランダの土木試験所型などヨーロッパで多数製作されてゐる。

これらの計器は理論上優劣の性質を持てゐると考へられるが、わが国に於いて未使用であるため、まず Carlson 型歪計を試作してその特性を調ひ、十分実用になることを確かめた。⁽⁷⁾ ついて、第1章に於いて述べた橋梁の歪計測には、この歪計を用いて測定すべき結果が得られた。Carlson 型歪計の利点の一つは振動歪を高感度で測定できることである。この特徴を利用して、ダム試験に於いて歪測定に成功し、振動時の応力状態を明らかにした。⁽⁸⁾ また、Carlson 型歪計は元来コンクリート中に埋設して使用するように作られたものであるが、これを改良して表面に取り付けるようにし、降雨などの急激な温度変化力に対して保護するは表面応力の測定に利用することに着目し、橋梁の表面応力を測定した。さらにこの計器に建築物の応力測定にも成功した。⁽⁹⁾

ダムのように長期間にわたって観測する場合には、コンクリートと弾性棒とを接合することはできないので、測定された歪経歴から応力を求めるのは非常に困難である。この点については、アメリカの Bureau of Reclamation の技術者の多くが研究により、歪から応力を求める方法が確立された。⁽¹⁰⁾ 最近では電子計算機を用いて速かに計算を行ふのに便利な方法も考案された。⁽¹¹⁾

歪計歪棒から応力を求める計算が幾分便利に実施できるようになったが、うしろも面倒さが解消したわけにはない。とくに前測り歪はコンクリートの性質をばきり数字に表わす必要があるため、この試験に非常に手数と経費と必要とがたつてゐる。そこで応力を直接測定できることが望まれているため、かかる計器を作られたのは比較的近年である。R. W. Carlson と D. Purdy は、内部に水銀を封入したコンクリートと同程度、圧縮性を有する偏平な受圧板を作つたことにより、直接圧縮応力を測定することに成功した。⁽¹²⁾ この応力計によつて圧縮力を直接測定できるようになったが、計器の埋設には熟練を要し、また引張応力を受ける場合にはこの応力計を使用できないので、使用条件はかなり制限される。もし引張応力の測定が可能な応力計が完成すれば、ダム工学に寄与することは多々である。

いままでに述べた以外に、実在のコンクリートダムに於いて必要とする観測事項は、滲透水圧、漏水量、コンクリートの湿度、継目の開き、傾斜、見守水位、気象（気温、水温、日射量、降雨量など）など非常に多い。近年ではこれらの事項の遠隔測定

1) 計器が発達し重量の製品が用いられた⁽¹⁴⁾。

わが国はとくに世界有数の地震国にあり、タム振動の性状ならびに面振動性について理論的研究を進めるとともに、第1章においても少し触れたが、実在するタムの振動測定のみならず、タム地盤の岩盤ならびに埋体の地震計を配置し、タムと⁽¹⁵⁾岩盤の地震時の挙動の観測に力が注がれた。

また、タム建設に当り最も問題の多いのは岩盤の性状の不定である。岩盤の弾性ならびに塑性性状を決定するために各種の試験が実施され、あるいは建設後において基礎岩盤の変形状態を知るために多くの観測が行われていた。わが国は地質構造が複雑なため、均一な性質の岩盤を有する地盤が少なく、基礎岩盤の状況に常に留意することは必要であること、ならびに将来のタムに対し参考資料を与えるために、地球物理学のよく使われる精密な傾斜計あるいは膨脹計により、岩盤の変動状況を観測し、それに基づいて現象を捉えている⁽¹⁶⁾。

(3) 観測値の解明

実在のタムに於ける観測値に値は、非常に多種多様な要素が長期間に及ぼす影響を及ぼして結果によるものであるから、測定値を分析し原因と結果を明らかにする必要があり、いかなる原因がタムに影響を及ぼしたかを解明し、タムに及ぼす影響を及ぼす要素とそれらの要素を明白に決定すること、将来のタム工学の進歩に役立つ道である。このためには長期間にわたる継続した観測と、広範囲に及ぶ環境条件の綿密な調査を組織的に実行しなくてはならない。もちろん、従来からこのような分組組織的研究が行われてきたが、観測値の整理方法については理論的に薄弱な点が多かった。

第6回大タム会議においては、大会議題 NO. 21 とし、"タム、タム基礎のポテンシャルと応力及び変形の観測、これらの観測と計算および小型模型試験結果との比較"という問題が討議され、観測値と応力及び変形と各種の原因と分析の方法が多数発表された。これらの論文においては、主としてア-4 タムの変形およびその観測値を分析するために種々の理論を適用している。その分析結果によれば、ア-4 タムの変形および応力に最大の影響を与えているのは、あるタムでは貯水圧であり、他のタムにおいては温度変化である。タムの寸法、形あるいは環境条件は、一変にないけれども、ア-4 タムに決定的影響を及ぼすのは貯水圧と温度変化であることは一致している。このことは、第2.5で述べたように、設計上は温度変化の影響の少ないことと非常に異なることであるから注意を要する点である。

§4.2 貯水圧によるダム応力状態

一般に実在のダムにおいては設計荷重に等しい荷重の作用が与えられるとはほとんどなく、通常貯水荷重は設計荷重より小さいもので、もし計算上完全なとしとしても設計計算に於いて予測したような応力状態を与えることは極めてまれである。尤も、すくなくとも、実在のダムの蒙る条件は非常に複雑である。したがって、設計上予想したような荷重状態における変形、応力、揚圧力などを測定し、それらの値から推測する必要がある。そこで、以下には貯水圧とダムの応力状態との関係と、実測値による検討を行う。

(1) 重力ダムにおける観測結果

長年月の間観測を続けていると、設計荷重に近似した載荷状態が実現するものがある。Grand Coulee ダムにおいては15年間観測を続け記録が発表されている⁽¹⁷⁾。この間、設計と埋設はブロックの完成後の9年において、ほとんど設計荷重に等しいものを受けた場合があった。このときの応力状態は図-4-1に示されている。この結果を設計荷重より解析の結果と比較すると、大抵においてよく似た結果を得られる。ただし、鉛直荷重の一部は隣接ブロックに伝達されて圧縮応力が少くなり、また、ダム重量の中心位置において設計埋設標高よりも岩盤が高くなっているため、水平剪断応力の測定値は幾分小さい。

このように鉛直応力ならぬに剪断応力は解析値に近く、解析結果の差については定性的な説明が可能である。ただし、水平直応力は解析結果とかなり異なっているという。すなわち、かなり濃しい非直線分布を呈して、上流階段に比較的大きな引張応力を生ずる以外に圧縮応力を示し、その最大値は鉛直応力よりも大きい。このような水平直応力は水圧以外の原因の大きい影響を与えていると考えられている。

急速に水位変動を与えたダムについての観測を行うことができれば、水圧によるダムの応力状態を知ることが極めて好都合である。Poglia ダム（中空式重力ダム）では毎年1回見守り池の清掃のために排水が行われる。所要時間は排水、貯水とも約1日、なおかつ2日〜1日の水位変動が定まっている。このときに中空式重力ダムの1つのブロックについて、変形計等から水平断面の回転を観測された⁽¹⁸⁾。その結果によると水位変動に伴って、水位に応じてダムは弾性的に変形し、水平断面の傾斜から求めた堤頂の傾きは直接観測値とも一致するところから、

一方、この図の右側はダム¹⁹⁾の測定結果に示すと、自重と水圧の合力による応力を考慮すると、これらの影響による鉛直方向の応力分布は比較的直線的分布に仮定した応力状態に近く、計算値からかけ離れた値となつては熱応力、浸透水の影響あるいは局部的な擾乱によるものであつたと示されている。しかしながら、Oberai ダム²⁰⁾のように、基礎岩盤の不均一により、ダムの応力状態に大きな擾乱が生じ、かなり広い部分において非直線的な応力分布を示しているものもある。Shasta ダム²¹⁾においても岩盤の不均一によりダム下部の応力状態がかなり乱れている。

一般には最初の湛水に際しては、ダム自身からみて基礎はかなり異変を要する功の応力状態を示すことがある。たとえば、すでに述べた Grand Coulee ダム²²⁾においては、湛水は始後しばらくの間は、計算値と比較すると踵部に於ける圧縮応力が増大し、逆に趾部に於ける圧縮応力が小さく、しかしそれに従って水位変動に対しては、ダム自体は基礎の挙動はほとんど弾性的にあるという報告がある。

(2) アーチダムにおける観測結果

アーチダムにおいては厚さが薄いので温度変動をうけ易く、ダムと実体と一体として作用する温度状況によっては熱応力も大きくなる。したがって、異常な圧力によるアーチダムの応力状態といふことがあり、同一の温度条件の下において水位の急激な変化による応力状態を求め、2種の状態に於ける応力と差を引かなければならない。

(i) 櫛俣アーチダムにおける測定結果²³⁾

櫛俣アーチダムは $\delta/2$ において述べたように仮設引掛のダムであり、水位変動が非常に速やかに実施できるので、このダムを用いて貯水圧力による応力の測定を実施した。このダムは表-4.1 および附図-4.2 に示すように、上流面が鉛直であり、中心角の大きい定中心型アーチダムである。

表-4.1 櫛俣アーチダムの寸法

高 さ	12.8 m	堤頂長 ¹⁾	72.4 m
上流面半径	23.0 m	中心角	110°
天端厚	0.6 m	越流幅	16.0 m
堤頂標高	693.5 m	越流標高	692.0 m

註: 1) スラストブロックを含む

2) 堤頂における値

の施工時に、附図-I-1-3 に示すように、ダム右岸側の外にあり、表面より 1.5^m の距離にあり、表面に平行に 100 本、Cablemc 型歪計を埋設した。したがって、上流側の歪計は鉛直面内にあり、下流側の歪計は鉛直面に対し 45° 傾斜した面内にあり。使用した歪計は書式作したゲージ長 20^m のものであり、水圧による応力測定を行なった時期には、7 本が使用可能、絶えず不良な他の原因で測定不能となり、下流側を測定値と指示したものが他に 3 本あり。

さらに、下流面の表面応力を測定するため、同様の歪計 (ゲージ長 30.5^m) を金矢盤給具に 2 表面に取り付け、これらの歪計はその中に結果が下流面より 3^m 突出している。附図-I-1-4 は金矢盤カラーを埋め込む位置を示している。

測定は満水から空座、空座から満水にわたる歪変化について各 2 回埋設歪計について行なわれ、さらに部分的に空座から満水に至る歪変化の測定を追加実施した。貯水池の湛水および排水に要する時間はそれぞれ約 5 時間および 10 時間であった。測定時における水圧の同様な条件に基づき局所的な温度変化を避けるために、表面に取り付けの歪計はビニールカバーで覆うた。1 回の歪測定中にわたる温度変化は埋体内部の歪測定位置においては約 $\pm 0.5^\circ C$ 、気温は約 $\pm 2.5^\circ C$ であり、最悪の場合は埋体内部の 1 点においては約 $3^\circ C$ 、気温においては約 $5^\circ C$ の温度変化があった。なお、満水位は毎朝 $EL. 692.00^m$ として、水位調節用弁の操作方法としては、最大約 0.5^m の水位低減を繰り返した。

堤体より採取したコアの試験から得られた弾性係数、 $E_c = 236 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\nu = 0.20$ を用いて、歪測定値から応力計算を行なった。さらに、下流表面に取り付けの歪計はその中に結果が表面より 3^m 外側にあるので、厳密には測定値と表面における値に補正しなければならない。ここではこの補正を省略し測定値そのものを表面の歪と考える。

附図-I-1-5 は上下流の埋設歪計位置における表面に平行な方向の面内歪応力を示している。これらの位置におけるアーチ応力及び片持梁応力を求め、応力の直交成分を規定に算出した表面におけるアーチおよび片持梁応力が附図-I-1-7 および I-1-8 に示されている。なお、下流面片持梁応力は鉛直面と 45° 傾斜した下流面に沿う方向の応力に換算して示している。

附図-I-1-6 は表面に取り付けの歪計により求めた下流面の主応力が記入されている。さらにこの主応力の大きさをアーチおよび片持梁応力と算定し附図-I-1-7 および I-1-8 に示す通りである。

この圧力状態をモデル実験と比較すると、模型実験の結果と圧力差の大きいものが数個あり、附図-I-4-6に示したAにおける下流末流圧力が全管にわたって実験値より大きいことが多く、一般的には模型実験の結果と一致しない。附図-I-4-7およびI-4-8には実験値と模型実験の結果を同時に示し、両者を比較すると、局部的な圧力差を除外すると、実物のダムにおいて水圧をうけたときの圧力状態は、大いによい模型実験結果に類似していることが明らかとなる。

(ii) その他のダムにおける測定結果

次に、12月中において代表的なアークダム（薄いアークダムから厚い重力式アークダムまで含む）における変形の実測値と模型実験の結果と比較した論文によると、一般的には両者が一致した結果を生ずるものが多いとしている。ただし、薄いダムにおいては良好な一致をみられ、厚いダムでは無視されるような小さな変形が生じていることがあり、これは一時的な現象である。

また、12月中における多数のアークダムの実験結果からも、実験値に含まれる誤差の多い一組は、模型実験と同一条件の材料の影響を顕く出せば、変形おそくたか状態はよく一致する結論となる。ただし、計算に際しては仮定を極端に単純化しており、計算値と実験値との相違値は値を多く含む。岩盤の状態によれば、アークダムの材料や他の種種原因でアークダムの変位が大きくなり、ダムに大きな影響を及ぼしていることが観察されている。

(3) 考察

重力ダムにおいてもアークダムにおいても、特殊条件を除外すれば水圧による実物のダムに生ずる圧力状態は模型実験によって知らることができるとあり、計算値との適合が適当であれば、大いなる場合は計算値と著しい差はない。もし水圧が作用しなくても、実物のダムにおいて異常な圧力状態を生ずる場合は、それはダムの一体性の不足、基礎岩盤の特殊性などのダム構造機能上の仮定の差によるか、揚圧力の仮定の差などにより生ずるものかと考えてよい。したがって、ダム工学の進歩とともに、ダム建設前にいろいろ十分な調査対策によって大部分の異常現象は除かれるであろう。

本章において紹介的に触れた重要要素は、実物のダムにおいてはかなり大きな温度変動があり、そのために、圧力状態が非常に大きく変動するのである。温度変動はアークダムに現れるものであり、温度変動による変位が大きな変動を及ぼすダムもあればあるまい。

少くともある程度観測されている。また熱応力についても割れなどの主要原因となっていることがよく知られてきた。また、熱応力がそれ以外の荷重によつて生ずる応力と同程度のものがあることがわかった。そこで、次節において実在のダムにおける熱応力状態について、観測された代表的な結果を示すことにする。

§ 4.3 重力ダムにおける熱応力状態

構造物の熱応力の研究に際しては、まず第一に構造物における温度変動と材料の性質を知る必要がある。そのつぎは温度変動とそれによつて生ずる熱応力の関係を知る必要がある。温度変動と熱応力の基本的な関係は第II章において述べたことにする。ここでは、実在のダムについての温度変動がそれに伴つて熱応力状態を測定した結果を述べ、コンクリートダムにおける熱応力状態の特徴を示すことにする。

多数のコンクリートダムにおいて応力測定が実施され、それらのダムにおける応力値がダム工学の発展に寄与していることが述べられてきた。そのうち、代表的なものは、熱応力について説明されているものも多い。ここでは、まず著名な応力解析を行つたダムについて述べる。次節において、他の測定結果を参照してダムの熱応力状態の一般的傾向を示すことにする。特に注意すべきことは、実在のダムにおいて応力測定を行つたのは、熱応力のみならず他の種々の荷重による応力が重ね合はれたものが測定されたこと、純粹に熱応力のみを取りださなければならぬという点である。

(1) 研究対象とした宮川ダム

宮川ダムは高さ 88.5 m、長さ 231 m の重力ダムである。その中央部に越流断崖があり、温度、歪率の観測が実施された。宮川ダムの建設は昭和 27 年 8 月に始められ、当時のわが国においてはこの種計器の使用経験は極めて少なかった。このダムにおいてはすべてドイツの Mahrke 型の計器が用いられた。測定結果は計器の多くはその結果の満ち足りたものであるといえる。

測定計器の配置は附図-I-4.9 に示す通りである。計器は基礎岩盤より約 9 m 上の所に配置された。使用された計器の種類、個数等は次の例に於ける記号は表-4.2 に示す通りである。

主要計器の埋め付けは、昭和 30 年 2 月 26 日より行設を始め、逐次コンクリート打設を進め、橋脚部を除いて昭和 31 年 6 月 7 日に打設

表-4.2 計器の種類と数量

記号		用途	数 量		
			1ヶ所当り	埋設箇所	計
		指示器	携 帶 式		2
		スイッチボックス	監査廊に据付		6
○	S	歪 計	7 個	7 箇所	49
○	VS	無負荷歪計	1	6	6
●	T	温 度 計	1	18	18
X	F	圧 力 計	5	7	35
⊙	W	滲透水压計	1	5	5
—		連絡用ケーブル			4,400 ^m

計器の埋設は、コンクリート打設状況は附図-I-4.10に詳細に示されている。1つのブローンは3個の管に5個の計器 A, B, C の3つの管に分け、埋設方向の異なる3個の断面に平均して1個。1層の打設高さは1.5mと標準とし、岩盤に接する下層数層（岩盤より EL. - 200.50m の間）は0.75mとした。

附図-I-4.10には打設温度も示している。本ダムでは人工冷却を行なっていない。打設温度、最高は28.0℃（昭和30年8月9日）、最低は3.5℃（昭和31年2月12日）であった。

打設温度と日平均気温の差は季節的に明白な変動傾向がみられない。打設温度と気温の差の平均は-0.77℃であり、したがって官川ダムでは季節には無関係に、コンクリート打設温度と日平均気温は等しいと考えた。

打設温度と気温の差は天候とか時間によって変動し、この温度差は個々の場合にも多少なり変動あり。しかしながら、打設したときについて、打設温度と気温の差の平均値はほぼゼロと認められなければならない。

日平均気温の変動は時間的に正弦函数で表わせれば、つぎのような曲線となり、実際、温度変動は非常に近いことがわかった。

$$T = 10.25 \sin \frac{2(n-125)\pi}{365} + 17 \quad [^{\circ}\text{C}]$$

ここに、 T = 日平均気温、 n = 年々始のり数と日数。下式に示す観測値でも正弦曲線に良好な近似を得られることが示されている²⁶⁾。

野水池水漏は季節、水位、放流状況、気象条件に大きく要素により支配される。そこで附図-1・4・11に野水池水漏の代表例を示した。表面には季節によらず28.7℃の温度変動があるが、EL. 23.0m以下にある場合は常時約7℃であると考えられる。

設計上揚圧力係数は0.7を仮定したため、湛水後2年間の測定では揚圧力の大きさはこれ以下である。

(2) コクリート養生質

宮川ダムで使用したセメントは中庸熟ポルトランドセメントであり、配合はA, B, Cの3種に分けられた。3種の配合ならびに使用位置は表-4.3に示す通りである。

表-4.3 コクリートの配合 (コクリート 1m³当り)

種類	セメント	水	ビゾル(70%水)	使用位置
A	250kg	132kg	200cm ³	エバンの導流壁
B	225	130	180	ダム表面厚さ2.5m
C	175	125	140	堤体内部

重測定値から応力の求め方必要上、C配合のコクリートについて弾性係数をクリープ養生を求めるとともに圧縮強度をも測定した。このための供試体は直径20cm、長さ40cmの円筒を用い、コクリートは骨材最大寸法60mmにウェットスクリーニングしたものを採用した。

供試体の養生条件をマスコクリートに近似させるため、供試体を型枠から脱型後直ちに防水塗料を塗布し、さらに塩化ビニル製の袋で供試体を密封し、高野氏の実験にも示されているように、養生温度によってコクリートの性質がかなり変化するが、ここでは20℃に保つことにした。

圧縮試験より求めた強度と弾性係数 E は附図-1・4・12に示す通りである。実験結果より E と材令 t との関係は、

$$E(t) = 0.25(1 - e^{-0.14t}) \times 10^6 \quad (t > 0.5) \quad (4.1)$$

である。ここで、 K は day, E は kg/cm^2 で与えられる。一方、クリープ曲線の附図-I-4.13 に示す通りである。単位荷重に与るクリープ Q は次式で表し得る。

$$Q(K, \tau) = \left\{ 3.5(1 - e^{-0.009\tau}) + (1.0 + \frac{41}{K+22})(1 - e^{-0.07\tau}) \right\} \times 10^6 \quad (\tau > 0.5) \quad (4.2)$$

ここで、 K = 載荷開始時刻 (day), τ = 載荷継続時間, Q = 応力 / kg/cm^2 与るクリープ (cm^2/kg) である。式 (4.1) 式 (4.2) 式 (4.3) の単位荷重が作用したときの総歪, あるいは $(\frac{L}{E} + Q)$ を示す附図-I-4.14 の通りである。

Poisson 比は 0.17 である。

コンクリートは緩慢なセメントの化学反応による原因で、硬化後も徐々に容積変化を生ずる。これは自己成長 (Autogenous growth) である。この容積変化のコンクリートについての測定結果は附図-I-4.15 に示す通りである。これは次式で表し得る。

$$G(t) = \left\{ 265(1 - e^{-0.007t}) - 0.93 \right\} \times 10^6 \quad (4.3)$$

なお、小野セメント株式会社中央研究所において測定された熱特性を示す表-4.4 の通りである。セメントのコンクリートについての温度伝導率の測定²⁷⁾を示す表-4.5 の通りである。

表-4.4 コンクリートの熱特性

温度伝導率	$0.00273 \text{ m}^2/\text{hr}$
熱膨張係数	11.0×10^{-6}

表-4.5 諸ダム温度伝導率 (m^2/hr)

ダム名	国別	温度伝導率
殿山	日本	0.0039
佐久間	"	0.00404
井川	"	0.0036
上椎葉	"	0.00315
Bha Kra	インド	0.00649
Myponga	オーストラリア	0.00596
Hoover	U. S. A.	0.0044
Grand Coulee	"	0.0027
Shasta	"	0.0033
Hungry Horse	"	0.0046

あと、管川ダムに温度伝導率は小さい。

(3) 温度経歴

歪計の測点における最高温度と最大温度上昇を図-1-4-16に通りであり、最大温度上昇は打設時期とほとんど無関係である。最大温度上昇は 29.8°C に達している。22クリートの温度は打設後数日においてほとんど最高温度近くまで上昇し、その後リフトの降下と後の収熱により、真の最高温度は打設後2週間程度において現れる場合が多い。

22クリート打設後1年を経過すると、表面附近の歪計(表面からの距離約3m)は気温に応じて変動するが記録上明らかと認められる。この場合上流側の測点においては位相が約2.5ヶ月遅れている。下流側の測点における年変動は約 8.5°C であり、これは気温の年変動の41%に相当する。内部の測点では打設後2年間に最高温度から 15°C 値しか降下しない。ブロック8の温度変化の状況と示す図-1-4-17に通りである。

昭和30年7月14日には、後続のBブロックの打設が進行先行、Aブロック以上の高さに達した時期である。AブロックよりもBブロックの方が気温の高い時期に設けられたためBブロックの方が温度が高くなる。Aブロックでは、Bブロックとの継目は温度外気温に達している内部から外部に向う熱流のみが存在しなかったが、Bブロックの打設によりBブロックの熱が流入するようになった。これによりBブロックではAブロックとの継目近傍に温度が下る。その結果A、Bブロックの中央部に温度の極値があり、両ブロックの境界に極小値の存在するような温度分布を呈している。このような熱流は次第に小さくなり、昭和30年10月24日の温度分布を見ると、BブロックはAブロックに比べて数日数日も短かいのに平均温度は高い。そしてBブロックからAブロックに幾分熱が流れ、遂に上流面より放射している様子を認めることができる。

Cブロックは冬季に打設されたため、Cブロックの平均温度は幾分低く、CブロックからBブロックへの熱流は小さい。こうして昭和31年2月26日にはBブロックの温度が最も高く、熱流はA、B、C全ブロックが一体として打設されたときと同様に、全体中央部から外部へ向う熱流が流れる。

昭和31年6月8日には打設完了した。この時ダム上部に最高温度と存在する。下部は3ブロックに分割打設したため露出部の大きかったことと、岩盤を通じた熱の放射と水の効果が加わり、上部よりも温度が低い。その後7月には昭和30年8月頃の温度低下を始め、この時期までに 4.5°C 温度が下る。7月には冬季表面露出の効果

果が大きい現われがあり、上記の期間に 8.6°C 温度低下している。

打設完了後の内部温度の変化をみるために、上部の T_{16} 、中央部 T_{10} 、底部の T_4 について昭和31年7月8日と昭和32年5月15日までの温度低下量を調べると、 T_{16} では 9.8°C 、 T_{10} では 4.5°C 、 T_4 では 4.8°C である。このことから T_{16} では上部断面の小さいところの結果、 T_4 では岩盤を通過する熱放散の効果が現われている。そして打設完了後の8ヶ月経過した昭和32年2月15日には、ダム中央部に最高温度値があり、季節的の変動をうけるが、内部から周囲に向かって熱が流れていく様子と等温線集りに見ることができ、昭和31年8月15日と32年2月15日の温度分布を比較すると、内部が冷えてきたことには、冬期は表面附近において温度変化の著しいところがある。

昭和32年以後は貝岸水池に灌水が行われていたため、貝岸水の影響により工流側にはかなり温度が低い。

R. W. Carlson の方法によ²⁸⁾て、リフト高さ 1.5m 、打設間隔を3日としたときの鉛直方向の温度分布を求めると附図-I-4-18の通りになる。この温度分布はリフトを打設する直前、すなわちリフト打設後3日における温度分布を示している。合計埋設リフトにかゝる断熱温度上昇の2割程度がリフトより発散され、最高温度上昇は 2.4°C 位であることがわかる。富川ダムのコンクリートは温度伝導率が小さいため、熱放散が小さい。

(4) 応力計算

材料の測定記録から記載の歪計 (no-stress meter) の指示値と差引き応力 σ の値を求める。ことに計器とコンクリートの膨張係数の差による補正を行う必要があるが、計器の膨張係数は R. Kuhn の示している $11.8 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ²⁹⁾ であるから、コンクリートの膨張係数は $11.6 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ の差はわずか $0.8 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ であるから、温度補正は省略した。よって応力を求めるには、先に示した弾性係数 E の値から、ステップで算出³⁰⁾して、step-by-step computation³⁰⁾ による。ただし、材料の温度変化による応力発生は考えないとして、材料の温度変化による測定値と歪の基準値とを比較する。

附図-I-4-9の歪計配置では、1つの歪力は主軸方向であると仮定し、横断面内における応力状態は求めないことに注意する必要がある。

(5) 熱応力状態

一般にこの測定に於いても、打設後 3～14 日位に於いて、水平方向の応力が他の方向の応力よりも大きく、引張応力を示している。附図-I-4-18 を見ると、打設後 3 日の上表面附近の温度勾配にはかなり急な傾向を示している。よって、リフト中の炭に於ける水平応力 σ が、リフトの平均温度 \bar{T} とその炭に於ける温度 T との差により生じ、その値は

$$\sigma = -\alpha E (T - \bar{T})$$

によって表わされることが分かる。この式はリフトが水平方向に自由に動かないと仮定したときに生ずる熱応力である。

宮川ダムに於いては、水平方向の歪計はリフトの表面から約 40 cm 以内に埋設されている。打設後 3 日に於ける歪測定炭の温度を附図-I-4-18 から求めると 12.0 °C、打設リフトの平均値は 13.0 °C 位であり、1 °C の温度差が認められる。よって、

E = コークリートの弾性係数 : (4.1) 式から材料令 1 の 3 日の中間の 12.5 日に於ける値を求め、 $0.06 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

α = 熱膨脹係数 : 表-4.4 より $11.0 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

$$T - \bar{T} = -1.0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

これらの値を代入すると、

$$\sigma = 0.06 \times 10^6 \times 11.0 \times 10^{-6} \times 1.0 = 0.7 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

各測定点の y 軸及び z 軸方向の打設初期の最大引張応力を平均すると、 $\sigma_y = 3.0 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_z = 2.7 \text{ kg/cm}^2$ である。コークリートのクリープには無視しているが、この計算に測定値に近い値が得られるから上記のよう簡単な仮定による応力を求めるとは考えられる。実際には第 III 編第 2 章に於いて述べたように、この値がかなり小さいと考えられる。もし上式が正しいものとする、上表面に於ける引張応力はつぎの通りになる。

$$\sigma = 0.06 \times 10^6 \times 11.0 \times 10^{-6} \times 13.0 = 8.6 \text{ kg/cm}^2$$

引張強度は測定していないが、材料令 3 日に於ける圧縮強度が約 40 kg/cm^2 であり、これを考慮すると、表面に於いてひび割れが発生する可能性が極めて大きい。

種種な時期に於けるブロック 8 の横断面中の応力状態を示すために、附図-I-4-19 に、各測定に於ける直応力の大きさとその方向を示した。これによれば上流面および下流面に最も近い測定 I の点と III の点に於ける最も大きい圧縮応力が発生している。その時期にはダム内部に蓄積された熱が外部に放散されつつあるため、鉛直応力は内部に引張、表面近くには圧縮の熱応力が現われていると解釈すべきであろう。この一変、その

直ぐには、ダムが完成するにつれて、おちおちかなり減っている。昭和32年2月より8月までの間に基本設計の水位が急上昇している。下流面近く、測点Ⅳでは鉛直圧縮応力が増大するが考えられるが、測定結果ではこの傾向が現われていない。温度の影響が大きいから、あるいはダムが一体として作られているものか否か判然としない。

また、中には測定不能となったものも多く、測定値に疑問を抱かせるものがある。しかし、総体的にみれば、この測定値によってダムの応力状態が把握できていくと考えられている。したがって附図-I・4・19に示す値も幾分信頼度に疑問がある。測点ⅠおよびⅣ等では応力が大きくなるような感じを抱かせるものがある。

つぎに富川ダムでは堤軸に平行な3つのブロックに分けて柱状式工法に近似した打設法を採用されたが、この間の施工順序と応力状態との関連について考察を行なう。

このためブロックAの大部分でせよ、ブロックBが一部打設された昭和30年5月14日を基準とし、その以後の応力と基準との差とを附図-I・4・20に示す通り

として示す。このブロックBの打設された後、ブロックAの上流側面に圧縮応力が打設直後の σ_{xy} （およそ45°傾斜した方向）は最初圧縮応力が生じ、以後次第に引張応力に変化する。この傾向は昭和31年1月頃までが盛んで、それ以後はほぼ定まっている。したがって、附図-I・4・17に示した温度分布より考えると、ブロックBの打設後ブロックBの温度が上昇し、このためブロックAに曲げが加わったと考えらるべきであろう。

また、昭和30年11月24日を基準として、以後の時期における応力とこの日の差とをブロックCの打設による影響が現われるものと考えられる。この結果は附図-I・4・21に示すように影響は大きくない。この原因はブロックCに比べて既存のブロックAおよびBの大きいこと、あるいはブロックCの温度がブロックAおよびBに比べてあまり高くないことにある。

結局はクラウトさきおお各分割ブロックは独立にいうので、自重と熱応力において、クラウトさきおおにそれぞれブロックが複雑な応力状態を呈し、クラウト施工後にあって連続した応力分布を示さない。たとえ、従来の引張収縮縫目を持つ井川ダム³¹⁾（中圧式重力ダム）、鉛直の縫目を持つ Fontana ダム³²⁾ などにおいても、それぞれ工法に応じた特徴のある応力分布を呈している。

このように、ダムの応力状態は熱応力のために非常に複雑となる。以上に得られた3要素とするとつぎの通りである。

(1) 湛水する時期には、ダムの下流面にかなり大きい鉛直圧縮応力が存在し、

そのために上流面に引張応力の現われやす危険性は低い。この圧縮応力は熱応力と考慮される。

(b) リフトの上表面に於ける引張応力は大きく、ひび割れ発生の可能性が高い。

(c) 長期間にわたって隣接ブロックと打越ると、相隣りブロックの温度差によって生ずる、ブロックが複雑な熱応力状態となる。

(d) 熱応力はかなり大きく、タイムの応力状態を支配する重大な要素である。

以上の結果によつて、熱応力は重大な要素であることがわかるが、これは実測値の例にすぎず、また測定値に疑問の存在する点もある。多くのタイムにおいて、より大規模かつ詳細な観測が行われ、ここで述べた事実以外に明らかになつていく事柄もない。そこで、次節において、測定値から認められる一般的な事項を説明するところとする。

§ 4.4 熱応力状態の一般的傾向

(1) 初期温度降下時期における応力とひび割れ

優れた設計が製作された場合でも、もっぱら温度測定とひび割れの調査が、タイムの温度とひび割れ熱応力状態の調査における主要事項である。これらの観測によつて、タイムのコンクリート打設中に現われるひび割れは主としてコンクリートの硬化時に発生する水和熱によることが明らかになった。すなわち、コンクリート表面の温度は気温に近いが、内部は水和熱による30℃程度温度が高くなり、内部の膨張能によって表面に於いては大きい引張応力が生ずるわけである。

この時期に於いて、コンクリートの内部に於ける熱が放散され始めると、コンクリートは比較的熱伝導が悪いため、また表面近傍に於いては温度が下がるが、内部に於いてはほとんど冷却されない。そのために表面近傍において引張応力がやや内部より発達しそのために発生していた極めて微細なひび割れが進行するようになる。

コンクリート打設後わずか数日間に於ける表面応力を測定することは極めて困難であるから、信頼のあつた測定値はないようである。たとえこの時期に於けるコンクリートの応力が正確に測定できたとしても、コンクリートの性質そのものが非常に不明瞭なものであり、測定した応力から直ちにひび割れ発生危険性を論ずることができない。

しかしながら、この時期の冷却期間^面に於いては、コンクリートの性質がかなり数字で表現し易く、また表面附近の温度であれば測定に困難はない。Hewes タイム(重カタイム)の測定値を解析し、熱応力を分離すれば、初期温度降下による

表面に生じる引張応力の最大値は 22 kg/cm^2 であったと報告されている。³³⁾ したがって Hiwa-steel タムは低熱系セメントが使用されたにもかかわらず（人工冷却は行なっていない）、コンクリートのひび割れが十分予想されわけてある。実際の調査結果によると、タムの側面からリフトの上表面から幾分ひび割れが入った箇所のあることが認められる。表面が冷却されたにもかかわらず内部の温度はほとんど変化しないから、内部に生じる圧縮圧縮力が増え、上記の Hiwa-steel タムではその値が最大 8 kg/cm^2 であった。比較的薄い断面ではあるが、R. Kuhn³⁴⁾ は表面と内部における温度と歪の経歴を比較して、コンクリート打設の最初から、初期の冷却期間中において、表面には引張応力、内部には圧縮応力の現われ方などを示している。

タムの表面に生ずるひび割れは、それがタムの全体の安定性に重大な支障を及ぼすものであるかどうかの重大な問題となる。ひび割れがタムの安定性に重大な危険性を及ぼすときもあるが、そうでないときもある。ひび割れ（ひび割れ）の経過とともに進行するものもあるが、表面の極く一部に止まることもある。このようにひび割れの性格は種々雑多であるが、一般的にはひび割れの存在は漏水性の増大、タム一体化の欠陥、応力の不均一な分布の結果ともなり、ときにはタムの安全性を脅かすことも考えらるうので、タムのひび割れを防止する一法に不飽和材の検討がなされる。

(2) ひび割れ防止法

一般に、弾性体に発生する熱応力 σ は、

$$\sigma = -R \alpha E \Delta T \quad (4.4)$$

によって表わされる。ここに、 α = 熱膨張係数、 E = 弾性係数、 ΔT = 温度上昇、 R = 拘束係数である。したがって、熱応力を小さくしようとすると、これを支面とする要素である α 、 E 、 ΔT あるいは R のうちのいずれか一つ以上を小さくすればよいわけである。熱応力によるひび割れを防止する方法については第 III 編において述べるが、各種の方法を列挙するところである。

(1) ΔT を小さくする方法

(4.4) 式において、最も熱応力に影響を及ぼすものは温度変化量である。したがって温度制御を行おうとすると、多くの方法が考えられる。以下にその方法を示す。

(a) コンクリートの表面からの熱放散を大きくする方法：コンクリート打設間隔を長くする、リフトの厚さを小さくする方法などを行なう。

(b) 人工冷却：コンクリートの高温になるのを避けるために、あらかじめ使用材料

よび/あるいは、骨材を冷却して、低い温度で打設するプレ・クーリング法、あるいは、コンクリート中に発生した熱を急速に除去しようとするパイプ・クーリング法がしばしば用いられる。後者は、タムの収縮縫目をグラウトで塞ぎ、コンクリートの温度を低下させるのに、有効な時期を調節することのできる利点がある。

(C) 型わく：木製の型わくは断熱性であつて、これを取除いたときの急激な表面温度低下によるひび割れを防ぐために、コンクリートの強度が十分発達するまでの数日は型わくを取り除かない。また型わくの熱伝導性をよくするために鋼板型わくが利用される。

(ii) R を小さくする方法

構造物の1点における熱応力は構造物の形、温度をそれに拘束条件によつて変わる。したがつて、(4.4)式の形に書けば、 R は上記のような要素を含んでいるわけにある。温度・制約係数については述べたから、ここには構造物の形と拘束条件のみを挙げておくことにする。

ひび割れの発生を防止にその発達は鉛直面内において起ることが多い。そのつとブロックの水平寸法を小さくして水平方向の応力を小さくする必要がある。そのために、タムの車道側には15m程度の距離において収縮縫目が設けられる。さらに、車道に直角方向にも縫目を設け、ブロック方式としてコンクリート打設の行なわれしうことがあつた。このため、形の不規則な個所にコンクリートを打設せしむに、異常な応力集中を避けなければならぬが、不規則な形の修正が困難なときには、温度規制と厳格に行なうことにより異常な応力の発生を抑制するのが通常である。

(iii) その他

コンクリートの熱膨脹係数 α の値は骨材の膨脹係数によつて変ひされ、骨材の種類・任意に選定するわけが難しい。またコンクリートの弾性係数 E はだいたい一定の強度と比例関係にあるので、 E を小さくすると強度が低下する。したがつて E の減少による発生応力を減少せしめると、ひび割れに対する危険性はあまり改善されない。また低熱セメントを使用するほひグリープを防止にリトラセーションが大きいので、実際上はひび割れの可能性が減少する。そのために低熱セメントの使用される場合がある。

表面に生ずるひび割れの原因は熱応力のみでなく、乾燥収縮も1つの原因となつてゐる。表面の乾燥を避け強度を増進させるために、十分な養生が実施される。

(3) 最終安定温度に達したときの応力

コンクリート打設後長期間経過すると、ダムは気温変化に応じて温度が変わり、その年(月)・平均を材料は一定に温度まで冷却される。初期温度降下は速く、この時期には温度変化が速く、表面付近の温度は変化する、内部のものが低下する。したがって、今度は逆に表面には圧縮圧力、内部には引張圧力が生ずることになる。さきの *Hawassell* ダムの例によると、このような温度変化のせいで生ずる圧力の最大値は、表面において 19 kg/cm^2 の圧縮、内部において 7 kg/cm^2 の引張である、と記されている。

最終安定温度に達したときに熱応力状態はどうかというところが重要な問題である。一般的に考えると、水和熱を発生させたクリートが硬化した初期においては、弾性係数が小さく、コンクリートも大きいのでは発生応力は小さい。しかしながら内部が冷却される時期においては、弾性係数が大きいのせいでクリートも小さい。そのため、ダムが最終安定温度に達したときには、初期に比べて応力状態の影響がかなり薄れることになる。その結果として現われる応力状態は、表面において圧縮応力、内部において引張応力を生ずる傾向が多い。

このような温度経過のせいで生ずる熱応力状態を測定値から分離したものは *Hawassell* ダムの例がある。²⁵⁾ 附図-I・4・22は鉛直応力の経歴を示すものであって、初期(月)は表面に引張応力が現われるが、打設後の1年を過ぎると順次圧縮応力の発達していく様子が目明らかに認められる。内部においては逆である。ただし上流側と下流側においてかなり様子が異なる、という。

この例のように、ダムは表面においては、最終安定温度に達したときには、熱応力のみによる圧縮応力の現われるというが通例であるから、水压その他の荷重によるダム上流面には引張応力が発生する可能性は減少する。ただし、このようなことは必ずしも割れが存在しないという仮定に立脚しているわけである。そうではない場合には、上記の応力状態がそのまま成立するとは限らない。また、表面に水平なひび割れがあれば、ここに水が浸入して100%の揚圧力を及ぼし、ひび割れ・奥には応力の集中を生ずることには注意しなければならない。

ダムの内部においては引張応力を生ずることになる。ダムの底面付近においては、かなり初期においても内部で温度低下を生じ水平な引張応力が現われ始める。そのため、比較的速くからダム底面付近において鉛直のひび割れが生じ、これは冷却の進行に伴って上部にまで及ぶことがある。このようなひび割れは基礎岩盤の拘束によるものがあり、これを防止するために、基礎岩盤付近においてはよく温度上昇の制御に留意されている。また岩盤の凸出部からひび割れの進行し始めること

もよく経験されるところである。

(4) 気温変動による応力。

気温変動によりダム表面附近の温度が変化する。もし表面が急激な温度変化により、内部に全く温度変化がないとすれば、表面は他の部分によって完全に拘束されるため、

(4.4) 式において $R=1$ とし、

$$\sigma = -\alpha E \Delta T$$

なる応力が生ずることになる。一般には $R < 1$ であり、式(4.4)の値よりは小さくなる。

表面に生ずる応力はダムが厚いほど、気温変動が速いほど大きい。この場合には内部に引張応力と圧力が生ずる。逆にダムが薄く、気温変動が緩慢であれば、表面のみならず内部にも応力の変化が生ずる。上流面は湛水されているため、温度変動は小さく生ずる熱応力も小さい。しかし下流面では外気に曝されているのみならず日射の影響を受けるため、かなり熱応力を生ずる。

Hinwassee ダムの測定によれば下流面の年間最大応力は 42 kg/cm^2 であった。この期間の応力変動も設計上の応力の数値に達している。³⁶⁾ Fontana ダムでは表面温度の日変動の平均値は 16.7°C であり、これによる生ずる応力の増加は 32 から 35 kg/cm^2 であると報告されている。³⁷⁾ R. Kuhn³⁸⁾ が厚さ 5 m に過ぎない橋脚に測定したところによると、5月末から8月初めにかけて表面は 7 kg/cm^2 の引張応力が増加するに過ぎないが、内部には引張応力が 3 kg/cm^2 生じている。また、月変動は表面で 10 kg/cm^2 程度に過ぎない。F.E. コッリーットの弾性係数は $3.3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ としている。

このような熱応力は水圧による応力に等しいかそれより大きいものがあり、ひび割れの発生あるいはその発達に対して影響を及ぼすのみならず、ダムの耐久性を減らすことに注意する必要がある。

図4-4 ダムは比較的薄い構造物であるから、すばやく述べたように、年間の温度変動によるダム全体にわたってかなり大きい熱応力を生ずると考えられる。高さ 76 m の Canicada ダム (図4-4) における測定結果を分析した結果³⁹⁾ によれば、平均温度の変動に内部に及ぼす影響は静水圧による影響よりも大きいことが示されている。わが国の上津原ダム (図4-4) の測定記録をみても、⁴⁰⁾ ダムの上、下流面のみならず、ダム全体にわたって応力の季節的な変動がかなり大きい。

(5) 日射の影響

- 温度変動にかなり大きい影響を与えるものに日射の影響がある。太陽に照ると表面の温度が気温より^{41)より42)}に上昇するかどうかということは影響の要素が非常に多い。年間にあける表面温度と気温との差を示すと表-4.6のような資料が得られている。これらのダム

表-4.6 日射による表面温度の気温よりの上昇量(年平均)

ダム名	温度上昇(°C)	文献
Norris	5.8	41)
Hinshaw	7.9	41)
Fontana	7.2	42)
Boulder	6.2	43)
Seminole	3.9	43)

は、川に面した上流面が南側に傾いていて日照という側にある。ダム完成後においては、上流面は湛水されているところから、表面温度はほとんど水温に等しいと考えられる。

大野ダムにおいても温度測定記録表から、天候と表面温度との関係を調べると表-4.7のような結果が得られる。大野ダムは南西に面している重力ダムである。

表-4.7 大野ダムにおける天候と表面温度との関係

平均気温 (°C)	表面温度の上昇(°C)		天候	期 間
	上 流	下 流		
20.0	-1.7	5.4	晴	35.5.23. ~ 25.
21.0	-1.8	6.6		35.6.6. ~ 8.
27.8	-2.6	6.2		35.8.22.
15.3	1.6	4.5	雨	35.5.19 ~ 21.
18.5	0.9	3.8		35.5.28 ~ 30.
27.8	-2.3	-0.3		35.8.29

表-4.7は晴天あるいは雨天の日の数日間連続したときについて、その日の平均気温と

表面付近にあるコンクリート温度の平均値とを差してのものである。温度測定位置は表面から深さ30 cmの箇所である。この表の下流表面は日射によりかなり高温となる。上流表面はほとんど日射を受けぬために気温と大差のないことが明らかである。

すなわち本節(4)においても述べてのように表面温度の日変動により大きな熱応力を生ずる。表面に太陽が当たれば、表面温度の日変動と力長することになるから、相対的に熱応力を発生することは容易に考えられるのである。緩地ダム(アーリダム)では、自重による 1 kg/cm^2 程度以上の引張応力を生ずると考えられる部分から、水平の施工縫目において、湛水前にクラウト止めより内部に達するぐらいのひび割れが認められた⁽⁴⁴⁾⁽⁴⁵⁾。この原因としてはつぎのよう⁴⁴⁾に考えられている。すなわち、上流面は西に向いていて、貯水池が湛水されるまでに上流面は日射を受けた。そのために表面の応力変動が大きくなり、さらに乾燥収縮と自重による引張応力が重畳されて、異常に大きな引張応力を発生しひび割れが生じた。このダムのひび割れ箇所における表面温度の日変動は冬期において 20°C 程度(表面に置いた寒暖計の値であり必ずしもコンクリート温度と等しくない)に達していた。

§ 4.5 熱応力状態に関する考察

コンクリートダムに発生する熱応力(一般に内部応力)は前節で示した通りであるが、熱応力状態に影響する要素は非常に多い。これを列記にするとつぎの通りである。

- (a) コンクリートの性質：セメントと骨材の性質、コンクリートの配合。
- (b) 施工方法：人工冷却の有無と方法、リフトの厚さと打設間隔、型枠の種類とその存置期間、コンクリート表面の養生方法、クラウトの時期。
- (c) 環境条件：ダム地帯の気象、水温、水位、ダムの向き、日射量、基礎岩盤の状態。

(d) ダムの寸法：ダムの形式、高さ、長さ、厚さ。

この中で人工的に変更し得る要素は(a)と(b)である。したがって、いまわがたはダムの設計に際して、発生する熱応力がダムの安全性に及ぼす影響を及ぼさぬよう、コンクリートの品質と施工方法と決定する必要のある。熱応力はダムに対して危険であるとは考えられず、最終安定温度においてはむしろ安全性を増すような状態にあるから、さらに進んで、熱応力がダムの安全性に寄与するような状態にあるように考えなければならぬ。

上記のように各種多様な原因によって熱応力状態が影響されるため、それらのシステムにおいて設計当初から熱応力状態を推定することは極めて困難である。

それらのシステムにおいて熱応力の値がいくらであるかというのを求めるのは至難のことであるが、コンクリート打設から始まって最終安定温度に達する期間にわたる間の定性的な熱応力状態の経過は、前に述べた測定例によっても示されているし、物理学的にも説明がとくものである。この間の熱応力状態の経過はつぎの通りである。次に、簡単にために打設温度と気温は等しいものとする。

(a) 最高温度に達したとき：水和熱の発生により内部は温度が上がるが表面はほとんど気温に等しいため、内部の膨張がゆえにより、表面には引張応力、内部には圧縮応力が発生する。リフトの寸法は高さか幅の $1/10$ 程度であるから、リフトの上面はたしかに側面に水平引張応力を発生する。ついで上部にリフトが打設されると、図 8 に示したリフトは幾分上部から熱が流入し、これによりリフトの水和熱も加わって温度が上昇する。その結果上面は温度がよって引張応力は減るが化身向にあるであろうが、側面では減らない。つまり、リフトとコンクリートの間に幾分拘束が生ずるものである。

(b) 初期温度降下をうけたとき：水和熱の発生が終ると、それに続く期間には表面附近の温度は漸次低下するが内部はほとんど温度が不変である。そのためこの期間に入りきると表面附近に引張応力、内部には圧縮応力が生ずる。このときは、コンクリートの寸法はどの方向にも同じ位の大きさであるから、鉛直応力も水平応力も同じ程度の大きさである。

(c) 最終安定温度に達したとき：その間の内部温度が全面的に降下し、表面附近にも低下する。そのため、(b) から (c) の期間を考えると、鉛直応力は表面に於いて圧縮応力、内部には引張応力を生ずることになる。水平応力は基礎壁岩盤あるいはワークアウトの拘束をうける引張応力を生ずる。この引張応力は拘束物体に近い部全ほど大きい。

(d) 表面温度変動の影響：以上の各段階において、表面の温度変動によって表面応力ばかり著しい変動を生ずる。日変動に対しては表面応力のみより変動が小さいと考えられるが、年変動の影響は幾分内部に及ぶ。

完全弾性体であれば、打設温度と最終安定温度が等しいときには、最終安定温度に達したときには応力が消滅することになるが、コンクリートは、材令の若いときには弾性係数が小さくそのクリープも大きいから、同一の温度変動に対して初期において発生する応力は小さく、後における応力がより大きい。したがって最終安定温度に達したときにおける応力は水和熱発生期間中の応力とほとんど影響されないと考えられる。この各段階における

圧縮力に存在するものを考慮に入れておくべきである。この式を用いるにしても、非常に単純な仮定であるという点と、22グリートがクリープするのを考慮に入れて、弾性係数を適当に評価し直さなければならない。

最終安定温度に達したとき、図-4.1に示すような応力状態が得られるのは、残留応力に熱応力に比べて好ましいものである。しかしながら、このような状態に達するまでに十分にひび割れが発生すれば、必ずしも図-4.1のような応力状態とならないであろうし、ひび割れによる危険な要素であるから、われわれはまず先にひび割れを生ぜぬようにする必要があるのである。

ひび割れ発生過程を考察すると、上記の熱応力状態の経過に对应して次のようになる。まず、22グリートの内部温度上昇と表面・乾燥による、表面の浅い部分において、水平引張応力によって鉛直面内のひび割れが生じながら、それは非常に発生しやすい状態にある。すなわち、初期温度降下による表層への収縮による引張応力を生ずるのに、側面における鉛直面内のひび割れが進行するのと共に、水平引張面内においては水平ひび割れが進行する。また、引張面に沿っては水平ひび割れも発生する可能性がある。その後最終安定温度に達するまでは表面から生じるひび割れの進行は速いであろうが、鉛直面内

のひび割れは引張応力と関連し、スパンプロックと横断方向にも水平方向にも生じることがあり、スパン方向には生じないことになる。なお、この間に生ずる表面の温度変動による引張応力からひび割れが発生、発達する原因となる。

ひび割れを除去するには、不刃具用にある $(T_p + T_r - \text{気温})$ を小さくすればよいことは明らかである。(4.5) および (4.6) 式において最終安定温度に達したときの応力 σ は、すなわち $(T_p + T_r - T_f)$ によって支配される。したがって気温の低いときにおいて $(T_p - T_r)$ をなるべく小さくするものに努めれば、最もひび割れが発生し難い。夏季においては、気温は T_f よりかなり高いから、 $(T_p + T_r - \text{気温})$ を小さくしても、 $(T_p + T_r - T_f)$ はそれほど小さくならないことに注意が必要である。ただし冬季においては22グリートの強度増進が遅いために、若い材料で材料中の引張応力をもひび割れが入るのを考慮に入れておく必要がある。

このような考察による温度制御が実施され、成功したものは Fontana 社の例がある。基礎岩盤近くで拘束力のある個所では、 $T_p + T_r - T_f$ を僅か 11°C 以下に制限し、その他場所では2倍の 22°C 以下に許すように打設後の冷却計画が作られた。⁴⁶⁾ これは (4.5) 式による計算に引張応力が 1.4 kg/cm^2 以内に収めようとしたためのものである。規定の計画に従って施工した、その結果は重大な影響、すなわちひび割れがほとんど

第 5 章 結 論

本篇においては、我が国現行のコンクリートに対する設計荷重の性質について述べ、特にタムの応力状態について、解析、模型実験、実在のタムにおける観測結果を検討した。その結果得られた知識は極めて膨大なものであるが、以下に主要点を要約することとする。

§ 5.1 設計荷重

設計荷重はなるべく簡略化し、しかもタム・寿命中に起りうる最悪の状態を表現できるようにしなければならないから、本来設計荷重を決定すべきは極めて困難なことである。そこで、現行の設計荷重によつてはとくに実情に適しないが、それはそれそれのタムの特殊事情による変形・破損とある程度の動水圧、地震力、揚圧力および温度変化について、理論的あるいは実験的に得られた結果を示した。その要点はつぎの通りである。

(a) 動水圧については地震力は、地震動、タム・形式、基礎岩盤の条件、貯水地帯の水深、地震の方向、貯水地帯に於けるタムの寸法などによつて異なるが、荷重の大きさは少なくともタム・地質、タム・形式、寸法、岩盤の卓越振動周期などによつて変化するべきである。

(b) 重カ・タムにおいては、貯水池に湛水したときと地震作用をうけるときとが最も危険であるが、現行の設計荷重を用いるときよりも一般的には実際には安全である。地震の過期の動水圧、共振周期よりも短かいときには、動水圧は壁体に減衰作用を及ぼすため著しく安全である。ア・タムでは重カ・タムよりも大きい速度をうけるが、とくに危険であるとは考えられない。地震時の地震力があつたときそのタムの振動状況を解析してその研究は進んでいるが、簡単に耐震設計を行なうところには進んでいない。

(c) 揚圧力の大きさは基礎岩盤の改良、止水ならぬ排水工法によつて小さくすることができ、その大きさは従来の経験によつていたことが知られるが、しかしながらコンクリートの實際中に侵入した水の影響については未知の側面がある。

(d) 温度設計として温度変化は、タムに起り得る温度変化のほんの一部のみである。すなわちア・タム・タムのアウト・時期と最終安定温度の差およびア・タム・壁の薄い構造物における断面の平均年温度変化のみにあてない。これらの温度変化による膨張収縮力が小さい場合でも、コンクリートの水収縮・膨張の発生と冷却の期間中に及ぼす

熱応力があるいは表層部分の周期的な温度変動による熱応力は非常に大きい。従つて、ダム設計を正確に施工し、実施しては種々な状況における熱応力状態を詳細に考慮しなければならない。

§ 5.2 設計荷重による応力状態

つぎに設計荷重と作用によるダムの応力状態を把握するために、第2章から第4章において、応力解析法、解析結果、模型実験結果から比較的结果を挙げた。これらの研究結果より得られる結論の要要はつぎの通りである。

(a) ダムの正確な応力解析を行なうために最も重要な事は、基礎岩盤の変形をいかに正確かつ簡単に与へ入れるかということである。実際のダムの基礎岩盤の性質は解析に用ゐるために数値として表すことは容易でなく、基礎岩盤の変形状態によりダムの応力状態はかなり著しく変化する。最近大規模な載荷試験によつて、基礎岩盤の力学的性質が究明される研究が行なわれてゐる。この研究の完成が望まれる。基礎岩盤は地盤により変形し、この変形量もかなり大きいものである。

(b) ダムの応力解析は断面とかなり異なるけれども十分正確な応力と力とを計算することが出来る。一般的には鉛直断面内において非直線的な応力分布を計算するものである。設計上の最も重要状態に対してはほぼ直線分布に近い値を求め、実用上は直線分布の仮定を用いて応力計算を行なつてもよい。

(c) ダムを二次元的な応力状態を解析するには試し荷重解析法が最も有効である。従つて、設計荷重に対して応力解析を行なうことができる。必要に応じて精度を良くすることも低くすることもできる。もちろん精度向上のためには計算力は増大する。模型実験と比較して実験の結果によつて、試し荷重法によつて得られた結果は一般的に正しいことが確かめられてゐる。従つて、厚いダムのようにマウスの尾を動かすには必然的に誤差が生じ、実際は計算結果より安全である。一方鉛直曲率の大きいアーチダムでは、片持梁の鉛直曲率と鉛直方向の変位条件を考慮すれば正しい片持梁応力を把握することができる。アーチダムにおいては、その形と重要性に依り種々な簡易計算法を適用することができる。

(d) ダムを一体的に三次元的な作用と確保するため、ダム荷重は全体に分散されてダムはより安全になる。アーチダムの耐荷力は極めて大きい。二次元片持梁構造の厚いダムは静定構造であるため耐荷能力は著しく小さい。

(e) 基礎岩盤が軟弱なためにアーチ・ダム・クラウニングに於ける応力状態が要くなること、アーチ・ダムのアーチ・厚さを増大するか、外側に於ける厚さを増大せしめ、改良することになる。アーチ・ダムが非半径方向となることの影響は、薄く（中に）の大きいアーチに対しては好結果を及ぼすものがあるが、逆に厚くて中心角の小さいアーチに対しては悪影響を与える。後者、アーチ・ダムの下部に於いて見られる程度のものであり、模型実験によると、このアーチのクラウニング下部側には引張応力が現われ易い。これとに於いては非半径方向のアーチ・ダムとすると、さらに引張応力を増大させる傾向になるから十分注意する必要がある。

(f) コンクリートは完全な弾性体ではなく、ダムに於ける注意しない完全な一様性で造ることには困難であり、そのように基礎岩盤が弾性体と異なり、挙動を示すので、ダムの建設後は長期間にわたって徐々に応力状態が要化する。また最初、湛水時に於ける応力状態は完全弾性体と仮定して解析して計算値とかなり異なることが多い。しかしながら、短期間に於ける荷重変動に対してはほとんど弾性的な挙動を示す。

(g) 設計荷重として採用された平均温度変化によるアーチ・ダムに発生する熱応力は重大ではない。とくにダム・基礎樫の大きくなるほど仮定する温度変化が小さくなるために、詳細な熱応力は小さく、一方他の荷重による応力が大きくなるので重要性は相對低下する。しかしながら水和熱の発生とその冷却過程に於いて発生する熱応力はダム・バッド割れを発生するほど重要な要素であり、最終安定温度に達したときに於いて複雑な残留熱応力が発生する。これらの熱応力の大きさは他の荷重による応力と同程度のものがあるか、あるいはそれ以上に達するか。したがって、このような場合の熱応力の研究が必要である。

(h) 二次元のダムの一様な温度変化による熱応力状態の実験結果を参照すると、慣用的計算法による水圧による応力と同程度の精度で応力値を評価し得ることがわかる。いま、三次元的な構造物を考えると、重カダムを以てアーチ・ダムの応力解析には、一般に鉛直方向の要位を生じないと仮定して、しかしながら温度変動をうけると鉛直方向にも要位を生ずるから、精度は幾分悪くなるであろう。

§ 5.3 熱応力状態

コンクリートダムに於ける熱応力状態は温度測定、ひび割れの観察から応力測定による二次元的に求められ、理論的考察も進んで、一面的にその状態を知らねばならぬことがわかった。

(a) コングリート設置後の温度上昇中およびそれに続く初期温度降下期間中に於いては、ダム表面に生ずる引張応力により表面に生ずるひび割れが発生し、それが次第に内部まで発展していくものである。またその後最終安定温度に達するまでの間にはダムの内部に引張応力が生ずる。この引張応力の中で水平引張応力は基礎岩盤の拘束作用により大きくダムの内部を貫通する方向のひび割れを発生する危険を生ずるものである。

(b) ダムに生ずるひび割れは、必ずしもダムの安全性に重大な支障を及ぼすものではない。しかしながらダムの耐久性を減じ、一体性を損なうと設計上考慮する応力分布と異なった状態を生ぜしめる原因になり、異常な漏水を生ぜしめることもある。しかってひび割れはてきとうに防止すべきである。重大なひび割れを発生せしめる主要原因は熱応力であり、適当な温度規制によってひび割れを防止することが可能である。

(c) 一般白々に与えらる熱応力 σ は、

$$\sigma = -R \alpha E \Delta T$$

によって与えられるから、この4つの要素のそれぞれを小さくするこれによってひび割れを抑制する事ができる。この中で現在最も有効な方法は ΔT をなるべく小さくすることである。 ΔT を小さくするために通常採用される方法は、打設速度の制限、人工冷却などである。 R を小さくするためにはブロックの幅を制限する。 E の値を小さくするためには低熱系のセメントを用いれば同一の強度のコンクリートに対して ΔT と実効的な E の減少を成し得ることのできる効果がある。なお、規則正しくコンクリート打設を行われないといひ割れの発生し易いことも常に経験されることである。

(d) ひび割れ防止のために最も早く考えられたものは、水和熱が小さく引張強度の強いコンクリートを作ることである。これにはセメントの品質が最も大きな影響を与えており、価格の問題にはいかなれば低熱系のセメントを使用することである。セメントの一部をフライアッシュで代替したコンクリートの使用経験からは、ひび割れ防止にかなり効果のあることが認められており、価格も低い。しかしながら、高熱セメントを使用した場合においては必ずしも良好な結果が得られていない。

(e) ひび割れの誘因として表面の乾燥収縮があることに注意しなければならない。表面の散水養生はひび割れ防止に効果がある。木材のように熱伝導性の悪い型枠を用いるとき、木材の若いときと乾燥したコンクリート表面の急激な湿度低下によりひび割れが発生し易い。

(f) 最終安定温度に達したときにおける熱応力状態は、もしひび割れが生じればダムの一体性が損なわれていないときには、鉛直応力はダム表面において圧縮、内部

に於いて小さい引張と圧力の傾向が強いのを、ダム安全性を増大させるものである。しかしながら、水平応力は基礎岩盤の拘束によりダム下部に引張応力を生ずる傾向にあって好ましくない。実際に建設されているダムにおいては必ずしもこのような理想化した単純な状態にあるものではない。ダム下部に於いてかなり大きい水平圧縮力の測定されている例も多く、実際値を参照すると、一般的には最終安定温度に達した状態においては、基礎岩盤の拘束による水平引張応力は非常に小さい。

(9) コンクリート表面の温度変動力によって生ずる表面応力は非常に大きい。この熱応力が表面におけるひび割れの誘因になる。

(10) ダムに継ぎ目を入れると、グラウトを充填して一体性を保持せしめるまでの間は、それぞれブロックに独立に熱応力と自重とによる応力が生ずる。この応力状態はそれぞれダムの施工条件によって変わる。ダム完成後は水平断面の応力分布が継ぎ目の位置に連続になる。

(11) 現行の設計荷重を用いると完成後のダムに於ける熱応力の年変動力はかなり小さいが、実物について推定されれば非常に大きいものである。この理由は、設計上ではダムは一定の温度に一定の温度の年変動のみを考慮しているにすぎないが、実際には、日射の有無による一日の変動による表面附近の著しい温度変動および上流側と下流側との間に生ずる温度差とがあり、これらによって生ずる熱応力が大きいことによるものである。

第 II 編

ダムに生ずる基本的な熱応力状態の解析

序 説

コンクリートダムにおいては、設計基準に示されている主要荷重である水圧は比較的規定し易いにもかかわらず、すでに第 I 編において述べたように、実際に発生する応力は、熱応力を始めとし各種の要素が関係するので極めて複雑であり、設計基準に示されている事項のみによっては満足に発生応力を推定することができな。したがって合理的な設計と施工を実施することが困難である。

ダムにおける熱応力は発生応力の主要部分を占めており、熱応力は単にその値のみならず、ダムの全寿命の間にたえず状態が変化しながら持続しているので、この意味においても重要である。そこで熱応力の解析を実行しようとする、第 I 編の序説で述べたように種々な原因がこれを非常に困難なものとする。ダムの熱応力状態を支配する要素は非常に多く、それらが及ぼす影響の重要度はそれぞれのダムに応じて異なる。従来ひび割れの防止工法については担当技術者の経験と判断を要する部分が多かったわけであるが、根拠の薄い考え方なれば調査をもとにした判断によって、所期の成果を収められなかった例もある。

実在のダムにおいては、非常に多くの要素が複雑に重なり合った結果として熱応力が現われる。そこで本編では個々の条件をできるだけ単純化し、それらの条件と熱応力状態との関係を基本的に研究することによって基礎的な数値を把握するとともに、一般的な傾向を求めることにする。

熱応力の発生原因は温度変化による体積変化であるから、他の原因によって体積変化を生ずる場合、たとえば温度変化、自己成長 (autogenous growth)、アルカリ-骨材反応などによって生ずる応力状態も、応力解析上の原理としては熱応力問題と同一に取り扱うことができる。したがって本編においては、まず体積変化によって生ずる応力は

なる性質のものであることを明らかにし、それから熱応力ととりあけてその性質を研究することになる。

三次元的応力場の応力解析を行うのは極めて困難であるから、ダムを水平断面と鉛直断面に分けて、それぞれが二次元的な応力状態を呈するものと仮定する。こうすると各ブロックの水平断面は矩形であり、ときにはダイヤモンドヘッドでは八角形になる。このような単純形状の物体が全く拘束されていないときについて、基本的な温度変化を受けたときの熱応力状態を解析した。その結果 物体の形、寸法、温度変動形式などと熱応力状態との関係が明らかになった。一般に寸法の大きいほど、温度変動速度の速いほど熱応力は大きい。

鉛直断面は基礎岩盤に接続した矩形、三角形あるいはそれに近い形である。
この場合には、堤体が岩盤から受ける拘束が熱応力に大きい影響を及ぼす。そのためにダム
の断面形、ダム
と基礎の大きさなどによって拘束度がどのように変化するを詳しく研究した。このときの応力
解析は極めて面倒であるから、簡単に実験を行なえる熱応力の光弾性実験法を見出し、種々な場合に適用した。

二次元的な応力場においても、厳密な解を求めるのは困難である。著者はポテンシャルエネルギー最小の原理を用いると、変分法によってかなり簡単に近似解を求めることに注目し、種々の条件の下における矩形板の熱応力解析をこの方法によって行なった。このときには正規直交函数を用いることにより精度のよい近似解を得ることができ、実験値と満足すべき一致が得られた。

以上の結果によって、コンクリートを弾性体と考えるときには、物体の形、温度変動状況、たがいに接続する物体の寸法と弾性性質などと熱応力状態との関係を明らかにすることができた。コンクリートの塑性性質を考慮に入れると熱応力状態が変わる。一般的には、このときの応力状態は だいたいに於いて弾性的な場合と大差なく、弾性係数を適当に評価することによって、弾性計算の結果から推定することが可能である。しかしながら、戦後の若い時期においては、^{著しい塑性を示すので弾性計算によれば}応力状態を推定できない場合のあることも想像される。コンクリートの塑性性質を考慮に入れると応力解析が面倒になるので、本編ではこれを省略し、本編において といふ問題となるときにかぎって塑性性質を考慮に入れた結果を述べることにする。

第 1 章 熱応力の一般論

§ 1.1 固有応力

固有応力という語によって、物体に力あるいは速度と与えなくても、その物体中に発生している応力を表わすことにする。固有応力という用語は倉西氏が用いている¹⁾、初期応力、初応力、残留応力、元応力、*initial stress*, *eigen stress*, *residual stress*, *Eigen-spannung*, *Selbstspannung* など同じ性質のものであり、その発生状況に応じて、より適確な印象を抱かせるために種々な表現が採用されるに過ぎない。たとえば、K. Heindlhofer は *residual stress* に対してつぎのような定義を与えている²⁾。"Residual stress is that stress which would exist in an elastic solid body if all the external load (forces, couples, and applied stresses), acceleration, and gravitation were removed." ここでは、最も広い意味で使用される固有応力という語を用いて、その一般的性質を示すことにする。

構造物に発生する固有応力の原因は、力および加速度であることもあれば、変位および体積変化であることもある。今に固有応力を生ぜしめる主要な誘因と考えるところはつぎの通りである。温度変化をはじめ各種の誘因によって生ずる体積変化、基礎岩盤の移動などは後者に属するものじらるが、収縮継目のグラウト圧によるものは前者に属する。こゝろに固有応力の直接の原因はこゝろに大別されるが、応力と歪との間には関係があるから、いずれい一方のみが直接の原因と考えてもよい。熱応力は体積変化をもたらすものであるから、ここでは歪変化（したがって体積変化と形状変化を含む）を原因と考えた場合について、弾性体に生ずる固有応力について論ずることにする。なお弾性体は均質等方性であると仮定する。

いまある物体の各点において、それぞれの点に応じて全く独立して固有応力を生ずる原因である歪成分 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ が生ずるものとする。これらの歪成分は固有応力源と名付けられるものであり、全く互いに独立したものであるのみならず、一般に不連続な、位置および時間の函数である。ただし、固有応力源の時間的な変動は急激であると仮定する。こうすると次節において述べるように、時間の影響を考えずに議論を進めることになり、これらの歪成分を消滅させ、もとの無歪の状態に戻すために、すなわち物体の各点に $-\epsilon_x, \dots, -\gamma_{xy}, \dots$ の歪を与えたのに必要な弾性法則に従う応力を $\sigma_x, \dots, \sigma_{xy}, \dots$ で表わすし、これらはつぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned} {}^0\sigma_x &= -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} {}^0e - \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x, \quad \text{等} \\ {}^0\tau_{xy} &= -G {}^0\gamma_{xy}, \quad \text{等} \end{aligned} \right\} (1.1)$$

ここに、 E は弾性係数、 G は剪断弾性係数、 ν は poisson, ${}^0e = {}^0\varepsilon_x + {}^0\varepsilon_y + {}^0\varepsilon_z$ である。

さて、上記の固有応力源が生じたときに弾性体に現われる応力、すなわち固有応力の直交成分を $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ で表わし、このときの歪成分を $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$ で表わす。応力と歪の関係は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= {}^0\varepsilon_x + \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \}, \\ \varepsilon_y &= {}^0\varepsilon_y + \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \}, \\ \varepsilon_z &= {}^0\varepsilon_z + \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \}, \\ \gamma_{xy} &= {}^0\gamma_{xy} + \frac{1}{G} \tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= {}^0\gamma_{yz} + \frac{1}{G} \tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= {}^0\gamma_{zx} + \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} (1.2)$$

これから歪力成分を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e - {}^0e) + \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_x - {}^0\varepsilon_x), \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e - {}^0e) + \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_y - {}^0\varepsilon_y), \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e - {}^0e) + \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_z - {}^0\varepsilon_z), \\ \tau_{xy} &= G(\gamma_{xy} - {}^0\gamma_{xy}), \\ \tau_{yz} &= G(\gamma_{yz} - {}^0\gamma_{yz}), \\ \tau_{zx} &= G(\gamma_{zx} - {}^0\gamma_{zx}). \end{aligned} \right\} (1.3)$$

ここに、 $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ である。一応応力の釣合条件式として、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

が成立しなければならぬ。そこで (1.2) 式を (1.4) 式に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{2}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} + 2 \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z}, \\ \Delta v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{2}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} + 2 \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z}, \\ \Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} &= \frac{2}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} + 2 \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

ここに、 u, v, w および x, y, z はそれぞれ x, y, z 方向の変位である。この式の左辺は固有応力を取り扱わない場合において得られるものと同様であるから、右辺における固有応力源が与えられると、通常行われているように与えられた境界条件の下において問題を解くことができる。

固有応力源と固有応力との関係を考える、固有応力源が存在すれば必ず固有応力が発生するとは限らないことはすでに多くの学者によって研究されている。たとえば、固有応力が与えられたときに、逆に固有応力源を求める問題を考えると、一義的に固有応力源が定められ³⁾ ないことが証明されている。すなわち、固有応力が与えられたときには、 $\sigma_x = \sigma_x, \dots, \tau_{xy} = \tau_{xy}, \dots$ とおけるような固有応力源と他に適合条件を満足する任意の固有応力源が存在する。このことは適合条件を満足する任意の固有応力源は弾性体は固有応力を生ぜしめな³⁾ いことのあることを意味する。

そこでどのような場合に固有応力が発生するものであるか明確に示しておく必要がある。在来得られた研究結果によると、弾性体において固有応力が生ずるのは、固有応力源である歪成分を定めるための変位が一価連続性函数でない場合である。このような場合に生ずるものとしての第1は、歪成分が適合条件を満足しないときである。この場合を現象的に説明するとつぎのようである。歪の適合条件式は本来物体中の各微小部分の連続性を保つための条件式であるから、固有応力源によって物体を構成する微小部分がそれぞれ独立して変形したときに、その物体が連続した形状を保持し得

ないことを意味する。したがって連続体であるためになんらかの応力の発生を必要とするのである。他の1つの場合は、固有応力源が適合条件を満足していても、多重連続領域の物体においては、その歪を与えるための変位成分が多価函数となるときである。この現象は喰い違いという名で呼ばれている。

さてコンクリートダムにおいて体積変化を起す誘因となるものは、セメントの硬化に際する収縮、温度変化、湿度変化、アルカリ—骨材反応のそれに比較的顕著なもの、あるいは自己成長と呼ばれる極めて徐々に生ずる体積変化などである。これらの誘因においては、固有応力源として歪 ϵ_x, ϵ_y および ϵ_z のみを生じ、剪断歪 γ_{xy}, γ_{yz} および γ_{zx} は生じないものと考えてあり。すなわち、体積変化のみを生じ、形状変化を生じない。したがって以上の理論において、

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

とすることが出来るから、幾分簡単な結果を得ることが出来る。上に述べたような各種の固有応力を与える誘因は、固有応力源の大きさ、場所的ならびに時間的な変動状態に差があるに過ぎない。たとえば硬化による収縮、アルカリ—骨材反応、自己成長などは場所的にはほとんど一様であり、湿度変化はおおむね長期間にわたる現象を問題としないかぎり表面付近のみに現われるものと考えてあり。一方温度変化は場所的にも時間的にも非常に複雑であり、発生する固有応力も大きい。したがって以下においては熱応力状態について解析を進めるが、固有応力源とそれを発生する誘因との関係を置き換えれば、上記のような体積変化のみを生ずる誘因に対する解を得ることが出来る。

材料が塑性変形とするために、構造物から荷重を取り去った後にも応力の残存する場合がある。これは作用応力によって時間とともに歪が変化し、これが固有応力源(体積変化を生じない場合もある)となっているわけである。このような場合についても上記の一般的な関係は成立する。

§ 1.2 熱応力に関する基礎式

弾性体に生ずる熱応力は、温度変化 T のみならず、その物体の熱膨張係数 α および弾性係数 E に関係する。コンクリートの α は温度に応じて幾分変化するが、ダムにおいては 50°C 程度の温度範囲を考えれば十分であるから、 α は温度にかかわらず一定であるとする。一般には非定常温度場を考えるから、応力は時間的に変化する。そうすると基本的には物体が運動する力学の問題として取り扱わなければならない。しかしながらダムにおいては、ショックと云うような表現で表わされるような急激な温度変動を考える必要がないから、物体が運動するための影響は無視するものとする。すなわち物体は常に静止した釣り合状態にあるものとする。このような状態は *quasi-static* (*quasistatisch*)⁽⁴⁾⁽⁵⁾ と呼ばれている。

(1) 温度-基礎方程式

固体内における熱伝導の微分方程式によると、直角座標 x, y, z および時間 t に関して、温度 T はつぎの微分方程式によって表わされる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{W}{c\rho} \quad (1.6)$$

ここに、 c は比熱、 ρ は密度、 a は温度伝導率 (ダム工学者は熱拡散率と呼んじることが多い) であり、熱伝導率を λ とすると、

$$a = \lambda / c\rho$$

である。また W は物体の任意の位置における単位体積、単位時間当りについで発生する熱量である。ただし材料の性質は温度によって変わらないものと仮定する。

もし温度分布が時間によって変わらない、すなわち定常的な温度場であるとする、温度場は ΔT の Poisson の微分方程式によって表わされる。

$$\Delta T - \frac{W}{\lambda} = 0 \quad (1.7)$$

さらに、物体中に発熱がない場合には、非定常および定常温度場においてそれぞれつぎの微分方程式が成立する。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T \quad (1.8)$$

$$\Delta T = 0 \quad (1.9)$$

熱応力を求めようとする、まず (1) に物体中の温度分布を決定する必要がある。そのためには上記の微分方程式と与えられた境界条件および必要に応じて初期条件を用いて解く必要がある。温度分布の厳密な解を得るのは極めて困難な場合が多く、左から近似解を求める方法につ

て多くの学者が研究を行なっている。これらの事項については必要に応じて示すことにする。

(2) 変位に対する基礎方程式

弾性体に温度上昇 $T(x, y, z, t)$ が生じた場合を考える。固有応力源は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z &= \alpha T, \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

であるから、これらの値を前節の諸式に代入すれば熱応力状態の変位に対する基礎方程式が得られる。

まず、(1.2) および (1.3) 式に対応する応力と歪との関係式を求めるとつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \alpha T + \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \}, \\ \epsilon_y &= \alpha T + \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \}, \\ \epsilon_z &= \alpha T + \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \}, \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G, \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G, \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e - 3\alpha T) + \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_x - \alpha T), \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e - 3\alpha T) + \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_y - \alpha T), \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (e - 3\alpha T) + \frac{E}{1+\nu} (\epsilon_z - \alpha T), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12a)$$

あるいは、

$$2G = E/(1+\nu)$$

なる関係式によって書き直すと、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right), \\ \sigma_y &= 2G \left(\epsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right), \\ \sigma_z &= 2G \left(\epsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12b)$$

そこで(1.2)式と力の釣合方程式(1.1)式に代入すると、変位成分に対して一組の基礎微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \Delta v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial y} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \\ \Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

(3) Thermisch-elastisches Verschiebungspotential

(1.13)は線型の微分方程式であり、 $T=0$ とすれば通常弾性論における基礎方程式である。したがって与えられた条件に対するこの微分方程式の解を求めようとすると、まず与えられた温度条件に対する(1.13)式の特解を求め、つぎにその特解をも考慮に入れて与えられた境界条件を満足するように(1.13)式において $T=0$ とおいたときの解を求め、2つの解を加え合わせればよい。特解を求めるのは比較的簡単であるが、与えられた境界条件を満足する解を見出すのに困難を感ずることがある。これは通常知られているところである。

(1.13)式の特解を求めるには、つぎのように elastisch-thermisches Verschiebungspotential^{6) 7)}を用いると極めて便利である。すなわち変位成分は、

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (1.14)$$

のように elastisch-thermisches Verschiebungspotential Ψ の勾配によって表わされるものとする。このように置くと、

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi, \quad \Delta v = \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Psi, \quad \Delta w = \frac{\partial}{\partial z} \Delta \Psi, \\ e = \Delta \Phi$$

であるから、(1.13)式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Psi - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \Psi - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

となる。これらの式を順次 x, y, z について積分すると、つぎのように Ψ についての Poisson の微分方程式が得られる。

$$\Delta \Psi = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T, \quad (1.15)$$

Ψ を用いて歪成分を表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}, \\ \gamma_{xy} &= 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, & \gamma_{yz} &= 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z}, & \gamma_{zx} &= 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

となる。また (1.12b) 式を用いると応力成分を Ψ によって表わすことができる。その結果はつぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -2G \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right), & \sigma_y &= -2G \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right), & \sigma_z &= -2G \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right), \\ \tau_{xy} &= 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, & \tau_{yz} &= 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z}, & \tau_{zx} &= 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

(1.15) 式によって Ψ を決定するためには、 Ψ についてのなんらかの境界条件が必要であるが、与えられた境界条件をあてて満足するような Ψ の値を決定することは一般に困難であるので、 Ψ としてはとにかく (1.15) 式を満足する一つの解を選ぶことにする。そうすると (1.13) 式において $T=0$ としたものである。与えられた境界条件から Ψ によって生ずる境界値を差引いたものを境界条件とする解を求めることが残された問題である。

(4) Thermisch-elastisches Verschiebungspotential の例

つぎに、後に使用する円柱座標 (r, θ, z) に関する関係式を示しておく。ただし z 軸の回りに対称であり $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ の場合であるとする。 u および w をそれぞれ r 方向および z 方向の変位とすると、

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (1.18)$$

$$\Delta \Psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T. \quad (1.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0, \quad \gamma_{zr} = 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial r}. \quad (1.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = 2G \left(\frac{\partial}{\partial r^2} - \Delta \right) \Psi, \\ \sigma_\theta &= -2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = 2G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \Delta \right) \Psi, \\ \sigma_z &= -2G \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi = 2G \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \Delta \right) \Psi, \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = 0, \quad \tau_{zr} = 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

定常状態に対して Ψ を考えてみよう。(1.9)式より, $\Delta T = 0$ であるから, (1.15)式の両辺に $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ なる演算を行なうと,

$$\Delta \Delta \Psi = 0 \quad (1.22)$$

のように Ψ は重調和函数であることがわかる。そこで互に無関係な二次元状態 (ただし平面歪状態とする) を考え, Ψ によって生ずる応力および歪には左肩に⁰なる記号をつけて表わすことにすると, (1.16)および(1.17)式より,

$$\left. \begin{aligned} {}^0\epsilon_x &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad {}^0\epsilon_y = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad {}^0\gamma_{xy} = 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \\ {}^0\epsilon_z &= {}^0\gamma_{yz} = {}^0\gamma_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^0\sigma_x &= -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad {}^0\sigma_y = -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad {}^0\tau_{xy} = 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \\ {}^0\sigma_z &= -2G \Delta \Psi = -2G \frac{1-\nu}{1+\nu} \alpha T, \quad {}^0\tau_{yz} = {}^0\tau_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

このように平面歪状態とすると, Ψ によって生ずる σ_z は温度変化に相似である。いま表面において全く応力がない場合を考えると, (1.24)式の応力が表面で消滅しなければならない。そのためには, 表面において (1.24)式の応力と大きさが等しく向きの逆な応力を与える必要がある。このような場合に生ずる応力および歪には左肩に^{*}印をつけて表わすことにし, この状態における Airy の応力函数を $\bar{\Psi}$ で表わすと,

$$\left. \begin{aligned} {}^*\sigma_x &= \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y^2}, \quad {}^*\sigma_y = \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2}, \quad {}^*\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x \partial y}, \\ {}^*\sigma_z &= \nu \Delta \bar{\Psi}, \quad {}^*\tau_{yz} = {}^*\tau_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^*\varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2} - \nu \Delta \bar{\Phi} \right), \quad {}^*\varepsilon_y = \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} - \nu \Delta \bar{\Phi} \right), \quad {}^*\gamma_{xy} = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x \partial y}, \\ {}^*\varepsilon_z &= {}^*\varepsilon_{yz} = {}^*\varepsilon_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Ψ によるものと $\bar{\Phi}$ によるものとを加起来合わせると 応力および歪はつぎの通りになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (-2G\Psi + \bar{\Phi}), \quad \sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (-2G\Psi + \bar{\Phi}), \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (2G\Psi - \bar{\Phi}), \\ \sigma_z &= \Delta (-2G\Psi + \bar{\Phi}) = -2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T + \nu({}^*\sigma_x + {}^*\sigma_y), \quad \varepsilon_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2} - \nu \Delta \bar{\Phi} \right), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} - \nu \Delta \bar{\Phi} \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\Psi - \frac{\bar{\Phi}}{2G} \right), \quad \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

(1.22)式に示したように Ψ は単調和函数であり、 $\bar{\Phi}$ もまた重調和函数でなければならぬ。

そこで (1.27)式によると

$$\bar{\Phi} = 2G\Psi \quad (1.29)$$

とおけば $\bar{\Phi}$ は重調和函数であつて境界においては先に述べたように応力を消滅させることができるものである。このときには、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \\ \sigma_z &= -(1-\nu)2G\Delta\Psi = -2G(1+\nu)\alpha T = -\alpha ET \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

となつて σ_z 以外の応力は消滅する。また歪は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = (1-\nu)\Delta\Psi = (1+\nu)\alpha T, \\ \varepsilon_z &= \gamma_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

このように、定常温度状態では z 方向の拘束によつて σ_z が発生する以外には応力の生じない二次元応力状態が得られる。しかしながら二次元状態において、定常温度分布のときに熱応力の生ずる場合も存在する。このような場合の説明は §1.3 に譲るものとする。

つぎに平面応力状態における関係式を挙げるとつぎのようになる。 $\sigma_z = 0$ でなければならぬから、(1.126)式より、

$$\sigma_z = 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \right) = 0$$

より、

$$\varepsilon_z = \frac{1}{1-\nu} \left\{ -\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + (1+\nu)\alpha T \right\} \quad (1.32)$$

となる。この関係を用いると (1.12b) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{1-\nu} \{ \varepsilon_x + \nu \varepsilon_y - (1+\nu) \alpha T \}, \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-\nu} \{ \varepsilon_y + \nu \varepsilon_x - (1+\nu) \alpha T \}, \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

したがって釣合方程式 (1.4) に代入すると、変位に対しての微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (1-\nu) \Delta u + (1+\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2(1+\nu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ (1-\nu) \Delta v + (1+\nu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2(1+\nu) \alpha \frac{\partial T}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

したがって前と同様にして、 $\bar{\Psi}$ に対しては、

$$\Delta \Psi = (1+\nu) \alpha T \quad (1.34)$$

なる微分方程式が得られる。この式を (1.15) 式と比較すると、右辺の係数が $(1+\nu)/(1-\nu)$ であったものが、 $(1+\nu)$ になっているに過ぎない。したがって、平面歪と全く同じようにして議論を進めるとつぎのよう結果が得られる。

Airy の応力函数が歪で表わされる応力状態が重ね合わされたときの応力と歪は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (-2G\Psi + \bar{\Psi}), \quad \sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (-2G\Psi + \bar{\Psi}), \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (2G\Psi - \bar{\Psi}), \\ \sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2G(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} \right), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{1}{2G(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y^2} \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\Psi - \frac{\bar{\Psi}}{2G} \right), \quad \varepsilon_z = \Delta \left(\Psi - \frac{\nu}{2G(1+\nu)} \bar{\Psi} \right), \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

したがって表面において応力を消滅させるためには、 $\bar{\Psi}$ として (1.29) 式を用いねばよい。このときには、すべての応力成分は消滅し、歪は全く自由膨張の値をとることになる。すなわち、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha T, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{aligned}$$

この場合でも定常温度場においては熱応力を生ずることがある。

最後に発熱のたゞ非定常温度場における $\bar{\Psi}$ を考えてみよう。もちろん quasistatisch な場合を取り扱う。この場合の温度は (1.8) 式に挙げたように、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T$$

であって、(1.15)式より、

$$\Delta \Psi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T$$

であるから、上式を時間 t で微分すると、

$$\Delta \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha a \Delta T$$

これを積分すると

$$\Psi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha a \int_0^t T dt + \Psi_0 + t \Psi_1 \quad (1.37)$$

ここに、 Ψ_1 は任意の調和函数であって、上式の $t=0$ における値は $\Psi = \Psi_0$ となるから、 Ψ_0 は初期条件 $T=T_0$ に対応する変位ポテンシャル、すなわち、

$$\Delta \Psi_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T_0$$

である。もし初期温度が $T_0=0$ であるときには、 $\Psi_0=0$ である。周期的な温度変化をうけ、長時間後において過渡的な温度分布がなくなり純粋に周期的な温度場が成立している場合と考えると、(1.37)式においても非周期的な項は存在すべきでないから、

$$\Psi_1 = 0$$

とすべきである。

平面応力状態においてはつぎのようになる。

$$\Psi = (1+\nu) \alpha a \int_0^T T dT + \Psi_0 + t \Psi_1 \quad (1.38)$$

(5) 応力に対する関係式

ここでは(2)で述べた考え方と異なった方法によって、応力に対する関係式を求めることにする。

(1.1)式によると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z &= -\frac{\alpha E T}{1-2\nu} \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

なる応力を物体に生ぜしめれば、その物体はもとの形に戻っているわけである。さてこのような応力を与えるためには、その物体に仮想的な力が作用していなければならない。その仮想的な

積力 ${}^0X, {}^0Y, {}^0Z$ および 仮想的表面力 ${}^0p_x, {}^0p_y, {}^0p_z$ は釣合方程式および境界条件式よりつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} {}^0X &= \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad {}^0Y = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad {}^0Z = \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z}, \\ {}^0p_x &= -\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \cos(n, x), \quad {}^0p_y = -\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \cos(n, y), \quad {}^0p_z = -\frac{\alpha ET}{1-2\nu} \cos(n, z) \end{aligned} \right\} (1.40)$$

ここに $(n, x), (n, y), (n, z)$ はそれぞれ境界における外向き法線と x, y, z 軸とのなす角である。しかしながら実際にはこれらの仮想的な力は作用していないのであるから、これらの力と逆向きの力 $*X, *Y, *Z$ および $*p_x, *p_y, *p_z$ を加えてやる必要がある。それから生ずる歪が物体に生ずる真の歪 $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$ である。この歪に対応する応力を $*\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ とすると、物体に生ずる真の応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= {}^0\sigma_x + *\sigma_x, \quad \text{等} \\ \tau_{xy} &= *\tau_{xy}, \quad \text{等} \end{aligned} \right\} (1.41)$$

によって与えられる。 $*\sigma_x, \dots, *\tau_{xy}$ などは附加応力と名付けられる。

上に述べたように

$$\left. \begin{aligned} *X &= -{}^0X = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \text{等} \\ *p_x &= -{}^0p_x = \frac{\alpha ET}{1-2\nu} \cos(n, x), \quad \text{等} \end{aligned} \right\} (1.42)$$

であるから、附加応力はつぎの釣合方程式を満足するものである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial *\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial *\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial *\tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial *\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial *\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial *\tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial *\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial *\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial *\sigma_z}{\partial z} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} (1.43)$$

したがって (1.41) 式で示す真の応力は、(1.39) 式で示す hydrostatic pressure $\alpha ET/(1-2\nu)$ と (1.43) の釣合方程式を満足する応力の和によって与えられるわけである。そして (1.42) および (1.43) 式によると、附加応力状態は容積力

$$*X = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad *Y = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad *Z = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.44a)$$

および表面に垂直に作用する引張応力

$$p = \alpha E T / (1 - 2\nu) \quad (1.44b)$$

によって与えられる応力状態であることがわかる。

いま、 xy 方向には無関係で x および y のみに温度および応力が関係する二次元問題を考える。
平面応力状態にあるとすると、附加応力状態は、各積分力

$$^*X = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad ^*Y = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.45a)$$

および表面に垂直に作用する引張応力

$$^*p = \alpha E T / (1 - 2\nu) \quad (1.45b)$$

によって与えられる。(1.43)より釣合方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

であるから、応力函数 Φ をつぎのように置けば釣合方程式が満足される。

$$^*\sigma_x = \frac{\alpha E T}{1-2\nu} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad ^*\sigma_y = \frac{\alpha E T}{1-2\nu} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad ^*\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1.47)$$

すると適合条件式

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.48)$$

に代入すれば、応力函数に対する微分方程式として次式が得られる。

$$\Delta \Delta \Phi = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \Delta T \quad (1.49)$$

平面応力状態のときには、(1.39)式の代わりに、

$$^0\sigma_x = ^0\sigma_y = -\frac{\alpha E T}{1-\nu}, \quad ^0\tau_{xy} = 0 \quad (1.50)$$

となるから、(1.45)式に対しては

$$^*X = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad ^*Y = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.51a)$$

$$^*p = \alpha E T / (1 - \nu) \quad (1.51b)$$

また釣合方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

したがって応力函数はつぎのようになる。

$$\sigma_x^* - \frac{\alpha E T}{1-\nu} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^* - \frac{\alpha E T}{1-\nu} = \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^* = -\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x \partial y} \quad (1.53)$$

$$\Delta \Delta \bar{\phi} = -\alpha E \Delta T \quad (1.54)$$

(6) 平面応力状態と平面歪状態との関係

三次元的な構造物の熱応力解析は非常に困難であるが、近似的に平面応力状態または平面歪状態を呈すると仮定できる場合がある。このような仮定が成立するときには、応力解析は幾分容易になる。この2つの状態は、考えている面（上記の例では xy 平面）に直交する方向の拘束状況は全く相反するものであるが、応力解析の手法については、両方とも二次元問題として全く同じ形式で実行することができる。

平面応力状態と平面歪状態を比較すると、(1.39)と(1.50)式に示した応力成分は、平面歪のときには平面応力の $(1-\nu)/(1-2\nu)$ 倍になっている。したがって、完全に拘束されているような状態にあるときには、平面応力状態から平面歪状態における応力を求めようとすると、 $(1-\nu)/(1-2\nu)$ 倍すればよい。また前者と後者の Poisson 比をそれぞれ ν, ν' とするとき、同一の応力状態を与えるときの Poisson 比の関係は

$$\nu = 2\nu'$$

によって与えられるわけである。一軸方向のみに完全に拘束されているときには、平面歪と平面応力状態との間における熱応力の比率は $1:(1-\nu)$ であると考えることが出来る。

このようなことから、基本的な二次元問題の熱応力解析に際しては、平面応力状態のみを取り扱うことにする。

§1.3 熱応力状態

すでに §1.1 で示したように、固有応力源が存在すれば必ず固有応力が発生するとはかぎらないから、本節では温度変化と熱応力状態との関係を詳しく考えてみることにする。

(1) 熱応力を生じない温度状態

等方性の物体であると仮定すると、その物体の微小部分は T だけ温度が上昇したときには形を変化せず、長さが $(1 + \alpha T)$ の比率だけ増加する。すなわち (1.10) 式で示した歪を生ずる。この (1.10) 式の歪を適合条件式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

に代入するとつぎの結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= 0, & \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} &= 0, & \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} &= 0, & \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

これらの方程式の解は

$$T = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z \quad (1.57)$$

なる一次式である。ここに a_i は常数である。すなわち三次元構造物においては、熱応力が生じないのは直線的な温度分布をなす場合にかぎられている。またこのときには、 $\Delta T = 0$ であるから (1.9) 式に示したように、物体中には発熱がなく温度場は定常状態にある。 $\Delta T = 0$ を満足している温度場は必ずしも熱応力を生じないとはかぎらない。

一応応力状態、ならびに温度場が二次元的であるときについても、古くから多くの学者によって研究されており、極めて興味ある結論が得られている。これらの研究は N. Muscheliswili,⁹⁾ M. Biot¹⁰⁾ および E. Melan^{11) 12)} などによって行われたものであり、その内容は多数の書物に示されている^{13) ~ 15)} から、ここではその結果のみを記すことにする。

温度分布は z には無関係な場合を考える。二次元問題の中で、 z に無関係な平

面歪状態にあるものとする、

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$$

であり、応力 σ_x, σ_y および τ_{xy} が生じないためには、熱膨張によってつぎの歪成分が生じなければならない。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = (1+\nu)\alpha T, \quad \gamma_{xy} = 0$$

このときに、平面歪状態であるためには、

$$\sigma_z = -\alpha E T$$

の応力が生じている。上記の歪成分を適合条件式(1.48)に代入すると、

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \Delta^2 T = 0 \quad (1.58)$$

したがって、熱応力が生じないためには、物体内に熱源がなく、温度場が定常であることの必要なことがわかる。しかしながら、この条件は十分条件ではない。十分条件に達するためには、物体中における変位が一価連続であるかどうかを考える必要がある。このことは、すでに §1.1 において固有応力源が適合条件を満足する場合でも固有応力が生じることがあることを述べたものと同様である。

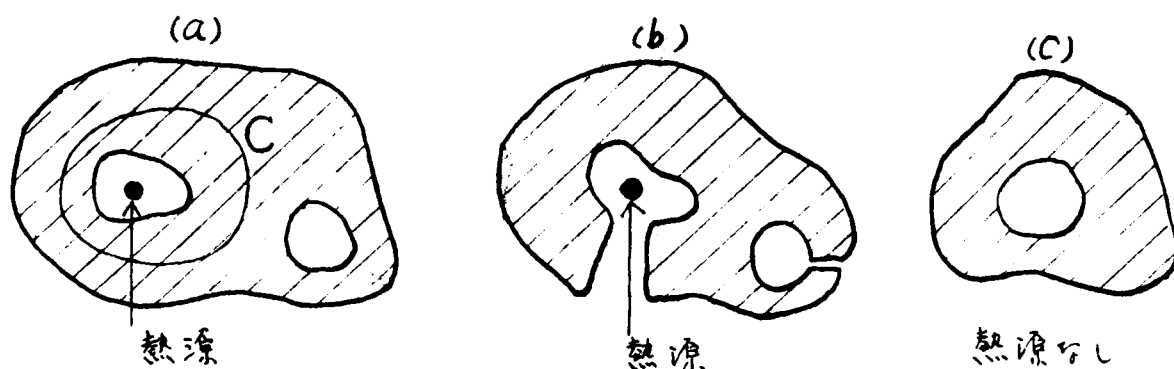
変位が一価連続となるためには、物体中に描いた任意の閉曲線から流出する（または流入する）熱量がゼロではならぬ。すなわち、曲線の法線方向を n とし、閉曲線に沿う長さを s とするとき、

$$\oint \frac{\partial T}{\partial n} ds = 0 \quad (1.59)$$

が十分条件である。

一重連結領域の物体では、物体内部に発熱がなく定常な温度場にあるとき、すなわち $\Delta T = 0$ が満足されると、十分条件(1.59)も成立する。しかしながら、図-1.1(a)に

図-1.1

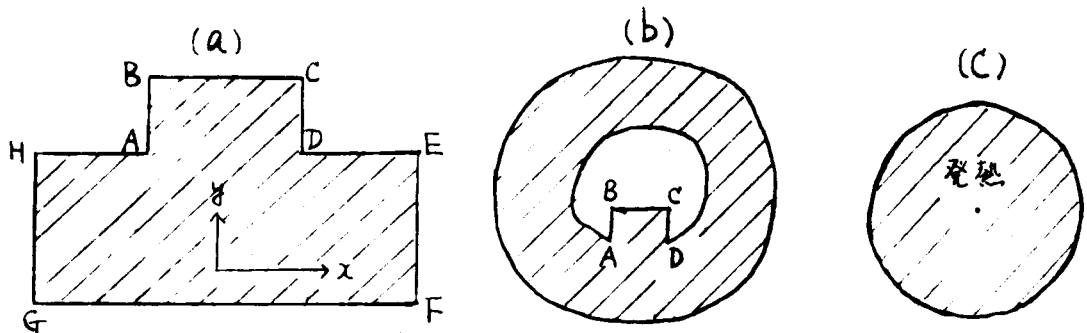


示す)に多重連結領域の物体においては、たとえば物体中にあけられた孔の中において熱源があるときには、弾性体の任意の点においては、その物体自身が発熱しないときには定常時に(1.58)式が成立するけれども、孔をとりまく閉曲線(図における曲線C)からは外に熱が流出しているから(1.38)式は成立しない。このようなときには熱応力が発生するわけである。しかしながら図-1.1(b)および(c)の場合は熱応力を生じない。なぜなら、物体内に発熱がなく、定常状態にあるとき、図-1.1(b)は一重連結領域であり、図-1.1(c)は二重連結領域であるがその領域内において熱の出入のない閉曲線を到る所で描くことができるからである。

(2) 温度と拘束状態

自由に置かれている同一材料のみよりなる均質等方性の弾性体については、温度と応力との間には上述のような明白な関係が得られている。この具体例を考えると、図-1.2(a)

図-1.2



のような形の二次元的物体が境界HABCDEの部分より加熱され他の部分から熱が放散されるときには、この温度分布を解析することはかなり困難であるが、熱応力のみを考えるときには、熱応力の発生しないことが保証されているから、計算を行う必要がない。しかしながらHGとEFが接着されて図-1.2(b)のような形となりこの内部から加熱されたときには、たとえ定常状態に達しているときにおいても熱応力が発生する。一方図-1.2(a)において、温度分布が $T = ay^2$ というような二次式で表わされる場合が生じたと仮定すると、この温度分布は $\Delta T = 0$ を満足しないので、温度分布は極めて簡単であるが熱応力が発生することになる。さらに図-1.2(c)のような円の内部において、場所的にも時間的にも一様な発熱がある場合を考えると、その温度分布は後述するように定常状態では極めて簡単であるが、やはり熱応力を発生する。

熱応力について行なわれている説明では、つぎのように表現されていることが多い。”熱応力が生ずるのは2つの原因に分けられる。その第1は温度変化の様子自身に關係するもので、物体中の各微小部分の熱膨脹がそれぞれお互いに他の部分を拘束し合うことによって生ずるものであって、これを内部拘束と名付ける。その第2は考えている物体の支持條件に關係するものであって、その物体の熱膨脹を他の物体が拘束するために生ずるものであって、これを外部拘束と名付ける。”すでに述べたことより明らかのように、考えている物体において $\Delta T \neq 0$ なる温度変化が生じたことによって熱応力が発生するときには第1の分類によるものである。一オ両端を固定された棒が、棒のみに一様な温度変化をうけたことによって生ずる熱応力は第2の分類に属するものである。

上のように内部拘束と外部拘束とに分ける考え方は、分離法としてそれ自体間違いないが、われわれがこれから取り扱う問題では、熱応力の原因を簡単にいづれが一オのみによるものとすることができない。上記のような表現を用いると、温度分布が単純なものであれば、内部拘束による熱応力は発生しないか、発生してもその値は小さいものにすぎないが、複雑な温度変化をうけるときには大きい熱応力を発生すると考え易い欠点がある。すでに図-1.2(a)の形において温度分布と熱応力の關係を言明したように、複雑な温度変化をうける場合にも熱応力が発生しないことがある。いまこの図-1.2(a)において ABCD の部分が一樣な温度上昇 T_0 を受け EFGH の部分は温度が変化しない場合を考えよう。このような単純な温度変化のときにおいても、ABCDEFGH の全物体を考えると、その物体中の線 AD 上において温度分布が不連続であるから、 $\Delta T \neq 0$ であるため熱応力を発生する。これを内部拘束および外部拘束という概念に従って考えればつぎのようになる。物体 ABCDEFGH が自由に置かれていると考えると、外部拘束はなく、不連続な温度変化によって内部拘束が生じて熱応力が発生したと考えればよい。一オこの物体を ABCD と EFGH の2つに分けて考えると、ABCD の物体が温度上昇によって膨脹しようとするのを EFGH の物体が拘束するために、これら2つの物体に熱応力が生ずるものであると説明できる。すなわち外部拘束によって熱応力が生じたと考えることもできるわけである。このように当面の問題としていえる物体が、考察を加える必要のある物体の全部分を占めているか、あるいは一部分であるかという点についてはっきりとさせる必要がある。いまでは考察の対象となる物体が同一弾性体であるときのみについて論じて来たが、弾性性質または熱的性質の異なる物体が混在しているときには問題がさらに複雑になる。

(3) 重ね合わせの法則

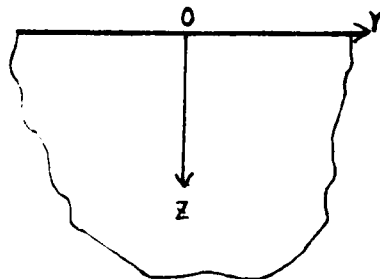
§ 1.2 で示した熱伝導の基本関係式は線型であり、熱応力に関する方程式もまた線型である。したがって温度が重ね合わさることのできるのみならず、熱応力も重ね合わさることが可能である。すなわち、 T_1 と T_2 の2種の温度分布のそれぞれに対して生ずる熱応力が σ_1 と σ_2 であるとする、 $T_1 + T_2$ なる温度分布による応力は $\sigma_1 + \sigma_2$ として与えられる。したがって、ある温度分布とそれに対応する熱応力は、その温度分布を幾つかの基本的温度分布に分けて考えることができるときには、それぞれの温度分布に対応する熱応力を求め、それらを加え合わせることで得られる。

§ 1.4 単純な熱応力状態

(1) 完全に拘束された物体

有限寸法の物体の熱応力を考察するに先だつて 図-1.3 に示すような $z \geq 0$ の領域に存在する発熱のない半無限弾性体に、変数 z と t のみの関数たる温度上昇 $T(z, t)$ が生じた場合を考える。初期条件は $T=0$ であり、表面 $z=0$ における境界条件は、この表面で応力がゼロとする。このときには (1.37) 式に従って、 Ψ をつぎのように選ぶことができる。

図-1.3



$$\Psi(z, t) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \int_0^t T(z, t) dt + t \Psi_1(z)$$

円柱座標を用いるときには、(1.21)式によって境界条件はつぎのようになる。

$$\sigma_z = -2G \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = 0, \quad \tau_{zr} = 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial r} = 0.$$

上記の Ψ によってもちろんこの条件は満足されるのみならず、弾性体の全領域において、 $\sigma_z = \tau_{zr} = 0$ となっている。(1.21)式によって、消滅しない応力成分はつぎの2つである。

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -2G \Delta \Psi = -2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T = -\frac{\alpha E T}{1-\nu} \quad (1.60)$$

このような応力状態が実在するかどうかは他の境界 $z=\infty$ および $r=\infty$ における境界条件を満足しているかどうかによって定まる。いま温度上昇が表面 $z=0$ における温度変化によって生ずるものとする。 $z \rightarrow \infty$ において $T \rightarrow 0$ であり、応力についても (1.60) 式よりわかるように、 $z \rightarrow \infty$ に

において $\sigma_r \rightarrow 0, \sigma_\theta \rightarrow 0$ になる。したがって $z = \infty$ において応力が消滅するという通常の境界条件が成立する。しかしながら応力は r に無関係であるから、 $r \rightarrow \infty$ に対しても σ_r および σ_θ は消滅せず、(1.60)式の値を保っている。このときにおける変位を考えてみると、いたる所で r 方向の変位は

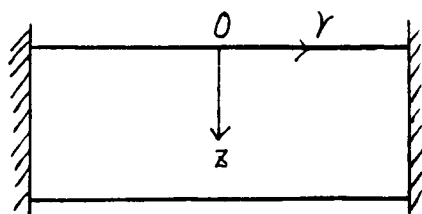
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

となっている。したがって、上記(1.60)式の応力状態は半径方向の変位が全く生じないように、半径方向に完全に拘束されている物体が、 z 方向のみに変る温度変化を主としたときの解である。

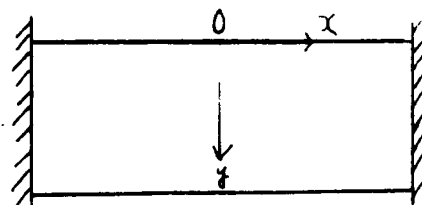
さらに詳しく変位の状態を考えてみると、 θ 方向の変位も零であり、 z 方向の変位のみが存在している。そこで z 方向に非常に長い柱体を考えてみると、この柱体が z 軸に垂直な両表面から温度変化をうけ、側面が完全に断熱されていて温度分布が z のみの函数となったとき、側面において z 軸に直角な方向には移動しないように完全に拘束し、 z 軸方向には自由に移動しうるようにしたときには、(1.60)式の応力状態が生じるわけである。

つぎに z 方向の寸法が小さい物体と考えると、(1.60)式の応力状態は x, y に無関係であるのみならず、 z 軸に垂直なすべての断面において直応力も剪断応力も存在しないから、 z 軸に垂直な任意の断面を自由表面とすることができ、したがって z 方向の寸法が他の x 方向の寸法に比べて小さい場合にでも、(1.60)式の応力状態が成立する。すなわち図一

図一 1.4



図一 1.5



1.4のように、 z 方向の厚みの薄い物体が、 z 軸に平行な断面において、 z 軸に直角な方向の変位が完全に拘束されている場合についても成立する。

二次元問題についても全く同様である。図一1.5のように xy 平面内の二次元問題を考え、温

度は y のみの函数であるとする。 x 方向には歪が生じない平面歪状態の場合においては、

$$\sigma_x = -\alpha E T / (1 - \nu) \quad (1.61)$$

なる応力は、 x 方向の変位が完全に拘束され、 y 方向には自由に移動しうる状態に対する解である。一方平面応力状態を考えると、(1.38)式に示すように、

$$\Psi(y, t) = (1 + \nu) \alpha \int_0^t T(y, t) dt + t \bar{\Psi}(y)$$

によって与えられるから、

$$\sigma_x = -\alpha E T \quad (1.62)$$

なる応力も生ずることになる。

さて上記のような拘束方法ができるかどうかを考えてみると、拘束面に垂直な方向のみの変位は零とし、それに平行な方向には全く自由に移動せしめなければならぬから、このような拘束方法はほとんど実現不可能である。通常完全固定といえども、固定部分におけるすべての方向の変位を生ぜしめなければならないわけであるから、ここに述べた拘束方法とは異なるわけである。もしここで述べたような拘束条件が満たされないとき、たとえば完全固定というような条件が適用されたときには、自由に移動せしめられた変位が拘束されるわけであるから、当然 (1.60) または (1.62) 式とは違った応力が発生する。図-1.4 における x 方向、または図-1.5 における y 方向の拘束条件が異なっても、そのために生ずる応力の変化は拘束部の近傍にかぎられるから、これらの図において x 方向または y 方向の寸法が小さいときには、その物体の中央部においては (1.60) または (1.62) 式の応力が発生していると考えてよい。拘束部近傍の応力状態は極めて複雑となり、これを解析することは困難である。

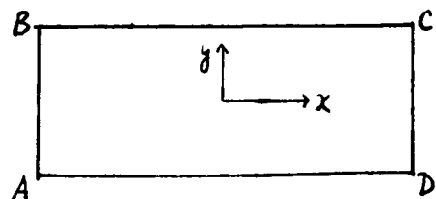
(2) 拘束されていない物体, Compensation line method

全く拘束をうけていない物体では前節とどのような違いがあるか 考えてみることにする。簡単のために、図-1.6 に示すような矩形の薄い板が平面応力状態にあり、温度変化は y のみの函数であるとする。もし (1.62) 式に従って、

$$\sigma_x = -\alpha E T$$

なる応力も生ずるものとする、端面 AB および CD においても同じ応力が生じている。したがって §1.2 に示したように、

図-1.6



端面 AB および CD において逆向きの力 αET を作用させる必要がある。もし T が定常温度分布であれば、その結果は矩形板に生ずる応力が消滅するわけであるが、一般にはこの αET なる力を作用させたときの応力状態は $\sigma_x = -\alpha ET$ なる応力状態と消し合うものでないので、矩形板中に熱応力を生ずることになる。

この熱応力状態はどんな様子であるか考えてみよう。端面に加えられた αET なる力による応力すなわち附加応力は、端面では αET なる値を示すが、端面より矩形の内部に移るに依りて次第に平均化された応力となり、遠く遠くでは直線的な応力分布をなすことは、Saint Venant の原理より明らかである。この様子を 図-1.7 に示す。その直線的な応力分布

図-1.7

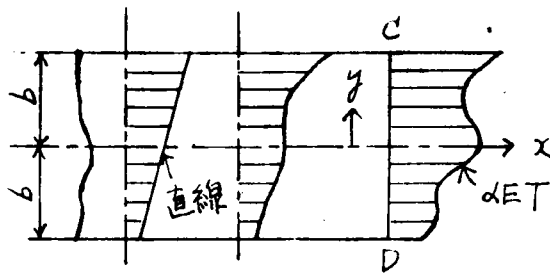
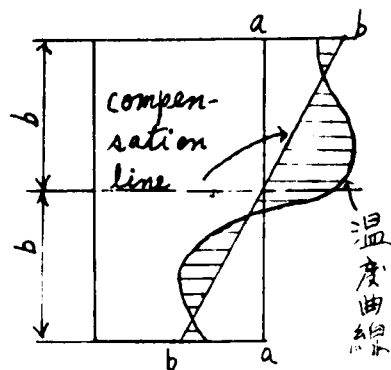


図-1.8



はその合力ならびにモーメントが αET に等しくならなければならない。 αET の合力は

$$\int_{-b}^b \alpha ET dy$$

であり、中立軸の回りのモーメントは

$$\int_{-b}^b \alpha ET y dy$$

であるから、直線的な応力分布は次式で与えられる。

$$\sigma_x = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \alpha ET dy + \frac{3y}{2b^3} \int_{-b}^b \alpha ET y dy$$

したがって熱応力は

$$\sigma_x = -\alpha ET + \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \alpha ET dy + \frac{3y}{2b^3} \int_{-b}^b \alpha ET y dy \quad (1.63) \quad (16) (17)$$

任意の断面に温度上昇 T が生じたとき、1つの直線を用いて、その直線によって与えられる面積と温度曲線によって与えられる面積とを等しくし、両者の面積の中立軸に関するモーメントも等しくする。図-1.8

に示すように、この直線が引かれると、温度曲線とその直線との差に $-\alpha E$ を掛けたものはちょうど (1.63) 式の応力となる。

このようにして熱応力を求める方法を *compensation line method* と呼ばれることがある。上記の直線は *compensation line* である。*compensation line* を引くには、まず温度上昇の平均値を示す直線 $a-a$ を引き、つぎに温度分布図の中立軸に関するモーメントに等しくなるような三角形を重ね合わせて $b-b$ の直線を描けばよいわけである。

以上を要約すると、拘束されている矩形板に y 方向に変化する温度上昇が生じたときには、 y 軸に平行な端面では応力を生じないが（端面で荷重が加えられていない場合を考えている）、端面から遠ざかるにつれて熱応力として σ_x が現われ、その最大値はすでに述べたように、温度曲線と *compensation line* との差に $-\alpha E$ を掛けた値となる。図1.6において x 方向の寸法が y 方向の寸法に比べて著しく大きいときには、 x 方向における中央断面では (1.63) 式に示した応力が生ずるが、 x 方向の寸法があまり大きくないときには、端面の影響をうけて中央断面の応力は (1.63) 式の値よりも小さくなる。かかる影響がどの程度のものであるかは次章において述べることにする。

平面歪状態の場合においても全く同様にして、(1.63) 式の代りに つぎの応力が現われる。

$$\sigma_x = -\frac{\alpha E T}{1-\nu} + \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \frac{\alpha E T}{1-\nu} dy + \frac{3y}{2b^3} \int_{-b}^b \frac{\alpha E T}{1-\nu} y dy \quad (1.64)$$

したがって *Compensation line method* を用いるときには、温度上昇と *compensation line* との差に掛けるべき値は $-\alpha E/(1-\nu)$ となる。

第 2 章

矩形板の応力解析法とその熱応力状態の特徴

長い矩形板の端面附近を除けば、軸方向に温度変化のないときには、*compensation line method* によって熱応力を求めることができる (§1.4 参照)。しかしながら、矩形が短いときや巾と長さ到大差のないとき、あるいは軸方向のみならずこれに直角な方向にも温度変化のあるときなどは、*compensation line method* によって熱応力を求めてもよい場所は存在しないことになる。

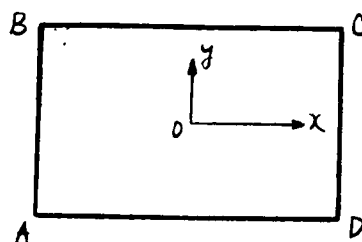
ダムの 1 つのブロックの水平断面を考えると、堤軸方向の長さは約 15m、これに直角な方向の寸法 (厚さ) はダムの形式と高さによって異なるが、数 m (頂部) から 100m 以上 (底部) の間にわたっているから、巾と長さが大差のない矩形の熱応力状態を考察せずに済むことはできない。ブロック間の収縮継目は完全に接着しているものかどうかは議論の余地はあるが、グラウトされるまでのことを考えると、継目が離れているものと考えてよい。したがって、上下間の層の拘束を考えないときには、自由な矩形板の問題となる。

どのような温度状態のときに、端面からどの程度内部に入れば *compensation line method* を適用してよいか、あるいは端面附近の応力状態はどのような様相を呈するものであるかということを知るには、どうしてもより詳しい応力状態の解析を行なう必要がある。本章ではこのために有効な近似解析法を示し、つぎに、その解析法を用いて得られた結果より、矩形板の寸法と熱応力状態との関連を考察する。平面応力問題と平面歪問題との間は転換可能であるから、以下においては、ことわりのないかぎり平面応力問題として取り扱うことにする。

§ 2.1 矩形板の近似解析法

弾性体が温度変化をうけたときに生ずる熱応力を求めようとするとき、§1.2 において詳論したように、力が作用したときの問題に置き換えることができる。そこで、たとえば図 2.1 に示す矩形板に温度変化が生じたとき、境界に作用する力ならびに容積力が作用する問題に置き換えられたとしよう。

図 - 2.1



このとき、まず図-2.1の矩形板の相対する2辺BCとADにおける境界条件を満足するような応力函数を求めることにしよう。このような応力函数 Φ は、

$$\Phi = \int_0^{\infty} \left\{ \{A(\lambda) + B(\lambda)\lambda x\} e^{-\lambda x} + \{C(\lambda) + D(\lambda)\lambda x\} e^{\lambda x} \frac{\cos \lambda y}{\sin \lambda y} \right\} d\lambda$$

または

$$\Phi = \sum_n \left\{ (A_n + B_n \lambda_n x) e^{-\lambda_n x} + (C_n + D_n \lambda_n x) e^{\lambda_n x} \right\} \frac{\cos \lambda_n y}{\sin \lambda_n y}$$

のような重調和函数で表わされ、2辺BCおよびADにおける境界条件を満足するように4つの常数 A_n, B_n, C_n および D_n が決定される。このような方法は、S. Timoshenko と J. N. Goodier¹⁾, K. Grerkmann,²⁾ 倉西正嗣³⁾ など多数の著者の書物に載っているところである。ところが、 Φ には他の2辺ABおよびCDにおける境界条件を導入することが不可能であるから、このときにはこれらの2辺における境界条件は満足されていない。そこでABおよびCD辺においては規定された応力をとり、他の2辺BCおよびADにおいては応力の現われのないような応力函数を選んで、上記の解に重ね合わせる必要がある。このような応力函数は、上記形式の Φ によって書き表わすことが不可能である。

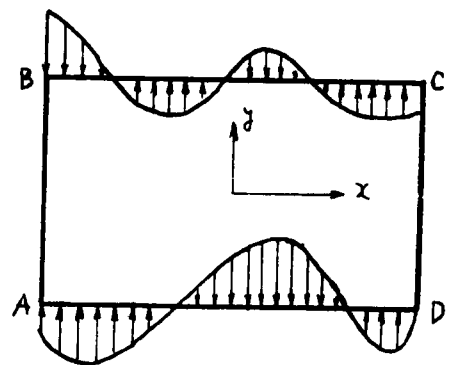
矩形板のすべての辺の境界条件を満足させるとすると、図-2.2に示すように相対する2辺においては与えられた応力を示すことができ、他の相対する2辺では応力が消滅するような応力函数を用いればよい。このような応力函数を見出すことができれば、ここで述べたような問題以外に、次章以下において述べるように、多くの問題を解決することができ。

図-2.2

上記の条件を満足する応力函数はJ. Fadleによって発見された。⁴⁾ すなわち重調和函数であって、相対する2辺たとえば、ABおよびCDにおいて $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ であり、他の2辺ADおよびBCにおいては与えられた応力の境界条件に展開しうる級数が見出された。この函数は応力函数の微分方程式

$$\Delta \Delta \Phi = 0 \quad (2.1)$$

を満足しているのび正解であるが、複素函数を取り扱う必要があり、境界において与えられた応力に一致するように函数の展開式を求めるのが面倒である。そのため項数の少ない級数を採用し勝ちであり、それゆえに精度を十分よくすることができないという欠陥が生



じようい。

近似解を得ようとするとき、形が矩形であるときには差分法を用いても境界条件が比較的簡単に記述し易いので便利である。したがって差分法によって矩形板の弾性問題を解く例は極めて多い。しかしながら、差分法では、境界条件が応力と変位との両方で規定されているときには、合理的な境界条件を得ることが困難である。また個々の問題について数値解を行なってしまった後でないと応力状態を知ることができず、矩形の形が変化したときあるいは温度状態が変わったときについて、応力状態の変動傾向を論理的に推定することが困難である。

他の近似解法は Galerkin の方法 または Ritz の方法のように、まず境界条件を満足する任意常数を含む函数を選び、応力函数の微分方程式(2.1)をなるべく満足するように任意常数を選ぶ方法である。一次元応力場ではこの方法は有効であるが、二次元応力場になると幾分計算が面倒となるのみならず、解の精度も悪くなる。¹⁾ そこで、Kantorovich は 二次元応力場の場合には、

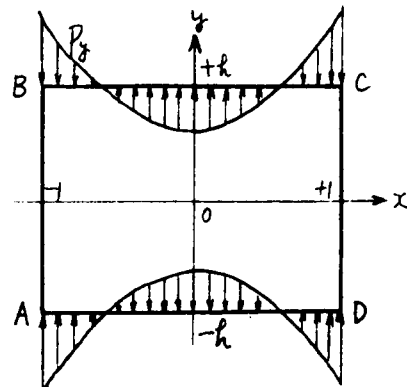
$$\Phi = \sum_n C_n f_n(x, y) g_n(y)$$

のように Φ を 2つの函数の積の形で表わし、 f_n の函数形のみを定め、他の函数 g_n は変分法によって決定し、精度を向上させることにした。⁵⁾ この方法は非常に有効であるので、本章で使用することにする。このような方法によれば応力函数の微分方程式を完全には満足しないが、数値計算が簡単でありかつ応力分布の傾向を把握し易い。E. Reissner はこの方法を応用して多数の問題を解いている。^{6) 7)} ここでは、 f としては、G. Horvay が導いた一変数の函数である self-equilibrating ortho-normal polynomial ⁸⁾ を用いる。

§2.2 Self-Equilibrating Ortho-Normal Polynomial

図-2.3のように幅が $2l=2$ 、高さが $2h$ 、厚さが d の全く拘束されていなく薄い矩形板を考え、2つの対称軸を座標軸に選ぶものとする。即ち AD および BC において作用する荷重が直応力であるとするとき、自由な矩形板では、この直応力分布曲線と Compensation line との差のみの応力と考えればよい。なぜなら、

図-2.3



compensation line によって差引かれた応力は、一様軸応力状態と単純曲げ応力状態であって、これらの応力状態は直線分布として判明しているものだからである。

このようなことから、ここでは図-2.3において、 x 軸に平行な端面 AD および BC に作用する荷重の合力ならびにモーメントは零であるものと仮定する (任意の荷重から compensation line を差引くとこのようになる)。すなわち self-equilibrating condition にあるものとする。

さて、この問題 (図-2.3) の境界条件はつぎの通りである。

$$\begin{aligned} x = \pm 1 \text{ において, } \quad \sigma_x - \tau_{xy} &= 0, \\ y = \pm h \text{ において, } \quad \sigma_y = p_y(x), \quad \tau_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

ここに、 p_y は与えられた荷重であり、辺 AD と BC とにおいて同一であるとする。

この場合の応力函数を、

$$\Phi = \sum_n f_n(x) g_n(y) \quad (2.2)$$

とすると、応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \Phi_{yy} = \sum_n f_n(x) g_n''(y) \\ \sigma_y &= \Phi_{xx} = \sum_n f_n''(x) g_n(y) \\ \tau_{xy} &= -\Phi_{xy} = -\sum_n f_n'(x) g_n'(y) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

境界条件は、

$$\sigma_x|_{x=\pm 1} = \sum_n f_n(\pm 1) g_n''(y) = 0, \quad \tau_{xy}|_{x=\pm 1} = -\sum_n f_n'(\pm 1) g_n'(y) = 0. \quad (2.4a)$$

$$\sigma_y|_{y=\pm h} = \sum_n f_n''(x) g_n(\pm h) = p_y(x), \quad \tau_{xy}|_{y=\pm h} = -\sum_n f_n'(x) g_n'(\pm h) = 0. \quad (2.4b)$$

さて境界条件 (2.4a) を満足するためには、

$$f_n(\pm 1) = f_n'(\pm 1) = 0 \quad (2.5)$$

が成立すればよい。さらにこの問題の場合には、 x 軸に平行な任意の断面に作用する力およびモーメントは零にならなければならない。この条件は、(2.5)式が満足されるときには成立することが、つぎのようにして知られる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \sigma_y dx &= \int_{-1}^1 \sum_n f_n''(x) g_n(y) dx = \sum_n g_n(y) [f_n'(1) - f_n'(-1)] = 0, \\ \int_{-1}^1 \tau_{xy} dx &= \int_{-1}^1 -\sum_n f_n'(x) g_n'(y) dx = -\sum_n g_n'(y) [f_n(1) - f_n(-1)] = 0, \\ \int_{-1}^1 \sigma_y x dx &= \int_{-1}^1 \sum_n f_n''(x) g_n(y) x dx = \sum_n g_n(y) x [f_n'(1) - f_n'(-1)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

G. Horvay は (2.5) の条件を満足し、しかも直交正規化された多項式は表-2.1の

表-2.1 Self-Equilibrating Ortho-Normal Polynomial, $f_n(x) = N_n \chi_n(x)$

n	N_n	$\chi_n(x)$
2	1.197 2650	$1 - 2x^2 + x^4$
3	3.677 0157	$x - 2x^3 + x^5$
4	0.894 3180	$-1 + 13x^2 - 23x^4 + 11x^6$
5	5.518 5234	$-x + \frac{19}{3}x^3 - \frac{29}{3}x^5 + \frac{13}{3}x^7$
6	0.847 9712	$1 - 28x^2 + 118x^4 - 156x^6 + 65x^8$
7	7.227 5337	$x - 12x^3 + 38x^5 - 44x^7 + 17x^9$
8	0.829 0550	$-1 + 47x^2 - 346x^4 + 878x^6 - 901x^8 + 323x^{10}$
9	8.890 6241	$-x + 19x^3 - \frac{498}{5}x^5 + \frac{1054}{5}x^7 - \frac{769}{5}x^9 + \frac{323}{5}x^{11}$
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

通りであることを見出した。⁹⁾¹⁰⁾ この表における N_n は normalizing factor である。この多項式は直交化されていること、および f_n は n の11人にかかわらずそれぞれ独立して (2.5) および (2.6) の条件を満足していること、後に述べるように近似計算に極めて好都合である。

応力函数に含まれている未知函数 $g_n(y)$ の形は、つぎに述べるように歪エネルギー最小の原理から、変分法における Euler の方程式を満足するように選び、さらに境界条件 (2.4b) 式を満足するように決定する。

§ 2.3 歪エネルギー最小の原理の適用、変分法

ポテンシャルエネルギー最小の原理によれば、弾性体が釣合状態にあるときには、その物体に与えられるポテンシャルエネルギーが最小とならなければならない。すなわち、ポテンシャルエネルギーの第一変分が零となる場合が釣合状態を与えることになる。いま考えている問題においては、物体のすべての表面において応力が規定されているから、ポテンシャルエネルギーの応力による変分を考えるときには、ポテンシャルエネルギー最小の原理は歪エネルギー最小の原理に一致する。¹¹⁾

矩形板 (図-2.3 参照) 中に与えられる歪エネルギー W は、

$$W = \frac{d}{2E} \int_{-h}^{+h} \int_{-1}^{+1} \left\{ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y + 2(1+\nu) \tau_{xy}^2 \right\} dx dy \quad (2.7)$$

である。この W が最小となるためには、 W の応力による第一変分が零にならなければならないから、次式が成立しなければならない。

$$\delta W = \frac{d}{E} \int_{-h}^{+h} \int_{-1}^{+1} \left\{ \sigma_x \delta \sigma_x + \sigma_y \delta \sigma_y - \nu \sigma_y \delta \sigma_x - \nu \sigma_x \delta \sigma_y + 2(1+\nu) \tau_{xy} \delta \tau_{xy} \right\} dx dy = 0 \quad (2.8)$$

(2.3)式を用いて応力成分を応力函数によって表わすと、(2.8)式は

$$\frac{E}{d} \delta W = \int_{-h}^{+h} \int_{-1}^{+1} \left\{ \bar{\varphi}_{yy} \delta \bar{\varphi}_{yy} + \bar{\varphi}_{xx} \delta \bar{\varphi}_{xx} - \nu \bar{\varphi}_{xx} \delta \bar{\varphi}_{yy} - \nu \bar{\varphi}_{yy} \delta \bar{\varphi}_{xx} + 2(1+\nu) \bar{\varphi}_{xy} \delta \bar{\varphi}_{xy} \right\} dx dy = 0$$

この式に部分積分を2回行なうと、つぎのような結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-h}^{+h} \int_{-1}^{+1} \Delta \Delta \bar{\varphi} \delta \bar{\varphi} dx dy - \int_{-h}^{+h} \left[\left\{ \bar{\varphi}_{xxx} + (2+\nu) \bar{\varphi}_{xyy} \right\} \delta \bar{\varphi} - \left\{ \bar{\varphi}_{xx} - \nu \bar{\varphi}_{yy} \right\} \delta \bar{\varphi}_x \right]_{x=-1}^{x=+1} dy \\ & - \int_{-1}^{+1} \left[\left\{ \bar{\varphi}_{yyy} + (2+\nu) \bar{\varphi}_{xxy} \right\} \delta \bar{\varphi} - \left\{ \bar{\varphi}_{yy} - \nu \bar{\varphi}_{xx} \right\} \delta \bar{\varphi}_y \right]_{y=-h}^{y=+h} dx + 2(1+\nu) \left\{ \bar{\varphi}_{xy} \delta \bar{\varphi} \right\}_{x=-1}^{x=+1} \Big|_{y=-h}^{y=+h} \end{aligned} \right\} = 0 \quad (2.9)$$

さて、 $x = \pm 1$ においては σ_x および τ_{xy} が規定されており、また $y = \pm h$ においては σ_y および τ_{xy} が規定されているから、

$$x = \pm 1 \text{ において, } \delta \bar{\varphi} = \delta \bar{\varphi}_x = 0,$$

$$y = \pm h \text{ において, } \delta \bar{\varphi} = \delta \bar{\varphi}_y = 0.$$

とならなければならない。したがって (2.9) 式の左辺第2項以下は消滅するから、つぎのような結果になる。

$$\int_{-h}^{+h} \int_{-1}^{+1} \Delta \Delta \bar{\varphi} \delta \bar{\varphi} dx dy = 0 \quad (2.10)$$

応力函数 (2.2) 式より

$$\Delta \Delta \bar{\varphi} = \sum_n f_n^{(IV)}(x) g_n(y) + 2 \sum_n f_n''(x) g_n''(y) + \sum_n f_n(x) g_n^{(IV)}(y)$$

であり、応力函数中で規定されているのは $g_n(y)$ であるから、

$$\delta \bar{\varphi} = \sum_n f_n(x) \delta g_n(y)$$

である。したがって (2.10) 式は

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left\{ \sum_n f_n^{(IV)}(x) g_n(y) + 2 \sum_n f_n''(x) g_n''(y) + \sum_n f_n(x) g_n^{(IV)}(y) \right\} \sum_i f_i(x) \delta_{ii}^{(2)}(y) dx dy = 0$$

(i = 2, 3, \dots, n)

と書くことができる。\$g_i\$ は任意の値をとりうるものであるから、上式が成立するためにはつぎの条件が成立しなければならない。

$$\int_{-1}^{+1} \left\{ \sum_n f_n^{(IV)}(x) g_n(y) + 2 \sum_n f_n''(x) g_n''(y) + \sum_n f_n(x) g_n^{(IV)}(y) \right\} \sum_i f_i(x) dx = 0 \quad (2.11)$$

(i = 2, 3, \dots, n)

\$f_n(x)\$ はすでに述べたように直交正規函数であるから、

$$(f_n, f_i) = \begin{cases} 1, & (n=i \text{ のとき}) \\ 0, & (n \neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$

また、

$$(f_n'', f_i) = -(f_n', f_i'),$$

$$(f_n^{IV}, f_i) = (f_n'', f_i''),$$

である。ただし、

$$(f_n^{(p)}, f_i^{(q)}) \equiv \int_{-1}^{+1} f_n^{(p)}(x) f_i^{(q)}(x) dx$$

とする。

したがって (2.11) 式はつぎのように書ける。

$$g_n^{(IV)}(y) - 2 \sum_i (f_n', f_i') g_n''(y) + \sum_i (f_n'', f_i'') g_n(y) = 0, \quad (2.12)$$

(i = 2, 3, \dots, n)

この式は変分法における Euler の方程式であり、\$g_n(y)\$ に関する常微分係数の四階連立常微分方程式となっている。この微分方程式に必要な4つの境界条件は、すでに挙げたけれどもまだ満足されていない (2.4b) 式である。(2.12) 式を解いて \$g_n(y)\$ を決定するのは理論上なんらの困難はないが、計算はやや面倒である。そこで G. Horvay が実施した方法と同様に、つぎのような近似を用いて計算の簡易化をはかることにする¹²⁾ すなわち \$(f_n', f_i')\$ および \$(f_n'', f_i'')\$ は \$n \neq i\$ のときには、\$n=i\$ のときに比べてそれぞれ非常に値が小さいから

$$n \neq i \text{ のとき, } (f_n', f_i') = (f_n'', f_i'') = 0$$

と仮定して、これらの係数を含む項を省略する。この結果 (2.12) 式はつぎのようになる。

$$g_n^{(IV)}(y) - 2(f_n', f_n') g_n''(y) + (f_n'', f_n'') g_n(y) = 0 \quad (2.13)$$

(n = 2, 3, \dots, n)

この式は連立微分方程式でないから計算が非常に簡単になるのみならず、\$n\$ のとり方のいかににかかわらず、個々の \$n\$ に応じて独立して \$g_n(y)\$ を決定することのできる利便がある。

表-2.2 (f'_n, f'_i) および (f''_n, f''_i) の値

n, i	(f'_n, f'_i)	(f''_n, f''_i)
2, 2	3.0	31.5
2, 4	-2.418 675	14.512 059
2, 6	-2.223 834	9.193 325
4, 4	23.4	1017.9
4, 6	-3.137 602	828.326 856
6, 6	64.6	7 706.1
8, 8	133.0	34 804.5
3, 3	11.0	247.5
3, 5	-3.5	165.0
5, 5	41.0	3 067.5
7, 7	95.0	17 128.5
9, 9	179.4	65 970.9

(f'_n, f'_i) および (f''_n, f''_i) の値は表-2.2 に示す通りであり、この数を用いれば直ちに(2.13)の微分方程式を書くことができる。

ここで(2.10)式をみると、 $\Delta\Delta\psi=0$ であるときにはもちろん(2.10)式が成立する。すなわち歪が正確な Airy の応力函数であれば確かに(2.10)式は満足される。しかしながら境界条件を満足するこのような函数を見出すことが困難であるので、 $\Delta\Delta\psi$ を矩形板の占める領域にわたって積分してものが零となるという条件で近似させたわけである。このときに導かれる条件、すなわち Euler の微分方程式を^{満足するが $\psi(x, y)$ の函数形を決定するのに上記の方法であるが、Euler の微分方程式と}利用せずに、まず初めに任意常数を含む函数形(境界条件は満足させておく)を選び、(2.10)式を満足するように任意常数を定めることができる。これが直接法と呼ばれるものであって、Ritz の方法および Galerkin の方法はこの中に含まれる。⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾
直接法では函数形の選択に十分注意を払う必要があり、もし選んだ函数形が不適切であれば意外に精度の悪くなるという恐れがあるので、ここでは Euler の微分方程式において未知函数の形を定めることにしたのである。

§ 2.4 応力函数の決定

(2.13) 式は常微分係数の四階常微分方程式であるから、一般解 $g_n(y)$ は、

$$g_n(y) = e^{-\alpha_n y} (A_n \cos \beta_n y + B_n \sin \beta_n y) + e^{\alpha_n y} (C_n \cos \beta_n y + D_n \sin \beta_n y) \quad (2.14)$$

という形に書くことができる。 A_n, B_n, C_n および D_n は境界条件 (2.4b) より決定される定数であり、 α_n および β_n は G. Horvay が計算した結果¹⁵⁾ によると、表-2.3 に示す通りである。

表-2.3 α_n および β_n の値

n	α_n	β_n
2	2.075 149	1.142 910
3	3.655 963	1.538 202
4	5.258 543	2.062 104
5	6.942 082	2.681 885
6	8.728 814	3.404 732
7	10.627 227	4.235 321
8	12.640 404	5.174 922
9	14.769 022	6.222 861

境界 $y = \pm 1$ において P_y が与えられているから、 $P_y(x)$ が対称関数であるとすると、この境界において応力関数のとり値は、

$$\bar{\varphi}(x) = \int_{-1}^1 dy \int_0^y P_y(\xi) d\xi \quad (2.15)$$

である。さて $f_n(x)$ は直交正規関数であるから、境界における $\bar{\varphi}(x)$ はつぎのように $f_n(x)$ によって展開できる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}(x) &= \sum C_n f_n(x) \\ C_n &= (\bar{\varphi}, f_n) = \int_{-1}^1 \bar{\varphi}(x) f_n(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

ここに

すると応力関数を

$$\bar{\varphi}(x, y) = \sum C_n f_n(x) g_n(y) \quad (2.17)$$

という形で表わすときには、境界条件 (2.4b) を満足するためには、

$$g_n(\pm 1) = 1, \quad g_n'(\pm 1) = 0 \quad (2.18)$$

と仮定すれば可なり。したがって (2.14) 式における係数はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_n = C_n &= \frac{\alpha_n \sin \beta_n h \cosh \alpha_n h + \beta_n \cos \beta_n h \sinh \alpha_n h}{2(\alpha_n \cos \beta_n h \sin \beta_n h + \beta_n \cosh \alpha_n h \sinh \alpha_n h)} \\ B_n = -D_n &= \frac{\alpha_n \cos \beta_n h \sinh \alpha_n h - \beta_n \sin \beta_n h \cosh \alpha_n h}{2(\alpha_n \cos \beta_n h \sin \beta_n h + \beta_n \cosh \alpha_n h \sinh \alpha_n h)} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

つぎに h が非常に大きくて、 $h \rightarrow \infty$ と考えることができる場合を考える。この場合座標軸を図-2.4のように選ぶ。すなわち、 $y \rightarrow \infty$ において x 軸に平行な応力成分は消滅すべきであるから、(2.14)式において $e^{\alpha_n y}$ を含む項は省略して、

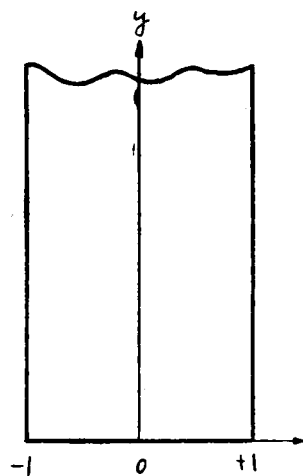
$$g_n(y) = e^{-\alpha_n y} (A_n \cos \beta_n y + B_n \sin \beta_n y) \quad (2.20)$$

の形に書くことができる。このときに、前と同様に $y=0$ における応力函数の値を $\varphi_n(x)$ によって展開し、 $\varphi(x, y)$ を (2.17) 式のように書くと、(2.18) 式の代りに $g_n(y)$ に対する条件式は、

$$g_n(0) = 1, \quad g'_n(0) = 0 \quad (2.21)$$

すなわち、この条件を満足する $g_n(y)$ は、

$$g_n(y) = e^{-\alpha_n y} \left(\cos \beta_n y + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \sin \beta_n y \right). \quad (2.22)$$



境界 $y = \pm h$ における応力は、直応力 P_y のみであって x の偶函数であると仮定したが、その荷重が加わる場合には、 φ の境界値は (2.15) 式の代りにつぎのようになる。

$P_y(x)$ が奇函数のとき、

$$\varphi(x) = \int_0^x dy \int_{-1}^1 P_y(\xi) d\xi \quad (2.23)$$

荷重が剪断応力 $\tau_{xy}(x)$ であって、 x が奇函数のとき、

$$\varphi(x) = - \int_{-1}^x \tau_{xy}(\xi) d\xi \quad (2.24)$$

$\tau_{xy}(x)$ が偶函数のとき

$$\varphi(x) = - \int_0^x \tau_{xy}(\xi) d\xi \quad (2.25)$$

また、 $h \rightarrow \infty$ のときに、端面に τ_{xy} のみが作用するときも考えると、境界条件は (2.21) 式の代りに、

$$g_n(0)=0, \quad g'_n(0)=0 \quad (2.27)$$

である。この条件を満足する $g_n(y)$ はつぎのようになる。

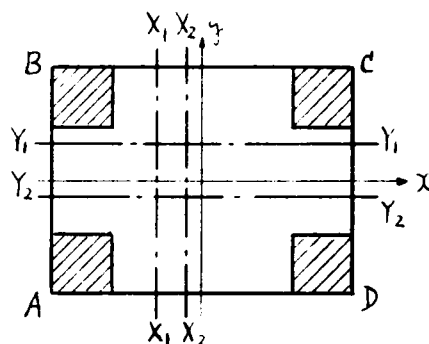
$$g_n(y) = e^{-\alpha_n y} \frac{\sin \beta_n y}{\beta_n} \quad (2.28)$$

§ 2.5 温度分布と矩形板の寸法が熱応力状態に及ぼす影響

(1) 温度分布と端面に加える荷重

ゴムブロックの水平断面の温度分布は複雑であるが、大抵の場合図-2.5 に示すようにブロックの隅角部分を除けば、近似的に温度分布は一次元的であると考えよう。すなわち断面 X_1-X_1 および X_2-X_2 における温度分布は同じであり、 y のみの函数、また、断面 Y_1-Y_1 および Y_2-Y_2 における温度分布は同一であって、 x のみの函数と考えよう。除外した四隅の部分の温度分布は複雑であるがこの矩形の四辺が拘束されていないときには、隅角部の応力は小さいから問題とする必要はないわけである。

図 - 2.5



以上のような仮定は、表面温度が日周期で変動するとき、あるいは型わくを取り外したことにより表面温度が急変するなど、短時間の現象を考えるときには、極めて誤差の少ないものである。

図-2.5 において、温度分布が x のみの函数であり、平面応力状態にあるものと仮定する。このときには、§1.4 (2) で述べたように（ただし x と y とが変っている）、矩形板に生ずる熱応力は、

$$\sigma_y = -\alpha E T(x), \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \quad (2.29)$$

なる応力状態と、四辺 AD および BC において、

$$p_y = \sigma_y = -\alpha E T(x) \quad (2.30)$$

なる荷重 p_y が作用するときの応力状態を重ね合わせればよい。さて、§1.4 (2) で述べたように、compensation line との偏差のみによって熱応力を生ずるから、ここで

は、 $T(x)$ としては、compensation line との差によって与えられる温度分布のみをとりあげることにする。このような温度分布は

$$\int_{-1}^{+1} T(x) dx = \int_{-1}^{+1} T(x) x dx = 0 \quad (2.31)$$

なる条件を満足するものである。このような条件を満足するものとして、 $T(x)$ が self-equilibrating ortho-normal polynomial を 2 回微分して $f_n''(x)$ で表わされるものとする。すると、この解析しなければならない状態は、(2.31) 式より、端面に $f_n''(x)$ の形の荷重が作用した状態である。

さて $f_n(x)$ が直交函数であるから、すでに述べたように応力函数の境界値を $f_n(x)$ に T_0 として取ることができる。すると応力函数は $\Phi = \sum_n C_n f_n(x) g_n(y)$ の形に書けるから、 Φ による応力状態は、 Φ を構成するそれぞれの項 $C_n f_n(x) g_n(y)$ が示す応力状態を調べて、それらを重ね合わせればよい。そこで以下には、 $C_n f_n(x) g_n(y)$ なる項単独で応力函数が表現されるときの応力状態を考える。温度分布 $T(x)$ の大きさを統一するために、 $x = \pm 1$ において T_0 となるように、

$$\left. \begin{aligned} T(x) &= (1/a_n N_n) T_0 f_n''(x), \\ a_n N_n &= f_n''(\pm 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

とおく。(1/a_n N_n) は $x = \pm 1$ において T_0 となるように定めた常数である。

(2) 端面荷重の伝播状況

まず図-2.6 に示すように半無限長の矩形を考え、温度分布と一つの端面附近の応力状態を考えることにする。温度分布が (2.32) 式で表わされるときには、附加応力状態に際して、端面に加わる荷重は (2.30) 式より、

$$*p_y = *s_y = \alpha E T_0 (1/a_n N_n) f_n''(x) \quad (2.33)$$

で与えられる。

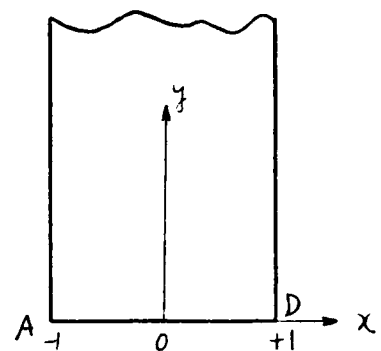
$f_n''(x)$ が偶函数であると、応力函数 Φ の辺 AD における境界値は、(2.15) 式より、

$$\Phi_n = \alpha E T_0 (1/a_n N_n) f_n(x)$$

となる。したがって応力函数はつぎのようになる

$$\Phi_n = \alpha E T_0 (1/a_n N_n) f_n(x) g_n(y)$$

図-2.6



$$g_n(y) = e^{-\alpha_n y} \left(\cos \beta_n y + \frac{\alpha_n}{\beta_n} \sin \beta_n y \right) \quad (2.34)$$

$f_n(x)$ は x の $(n+2)$ 次式であるから、(2.25) 式は端面において、 x の n 次式で表わされる直応力が作用する半無限長の自由な矩形板の応力函数である。そこで $f_n(x)$ の最低次のものとして $f_2(x)$ 、かたし高次のものとして $f_6(x)$ の場合をとりあげて考えてみることにする。

このときの温度分布は、それぞれ、

$$T_2 = (1/8 N_2) T_0 f_2''(x) = (T_0/2)(-1 + 3x^2) \quad (2.35)$$

$$T_6 = (1/320 N_6) T_0 f_6''(x) = (T_0/40)(-7 + 177x^2 - 585x^4 + 455x^6) \quad (2.36)$$

によって表わされる。 *p_y および *q_y はそれぞれ (2.33) および (2.34) 式によって与えられる。

すなわち、これらの 2 種類の荷重による附加応力状態を求めた結果を示すと、附図-Ⅱ・2・1 に示す通りである。この図より、 *p_y が 6 次式の応力平均化が著しく速いことがわかる。

さて $^*q_y = f_n''(x) g_n(y)$ とすると、 $^*p_y = f_n''(x) g_n(y)$ で表わされるから、 *q_y の y 方向の変化は $g_n(y)$ によって支配される。 $g_n(y)$ は (2.35) 式で示したように $e^{-\alpha_n y}$ によって y が増加するとともに減衰する。したがって *q_y の減衰状況は減衰距離 $1/\alpha_n$ によって特徴づけられる。

表-2.4 減衰距離 $1/\alpha_n$ と $e^{-\alpha_n y}$ の減衰状況

n	$1/\alpha_n$	10% になる距離	1% になる距離
2	0.481 893	1.109 6	2.219 2
3	0.273 526	0.629 8	1.259 6
4	0.190 167	0.437 9	0.875 8
5	0.144 049	0.331 7	0.663 4
6	0.114 563	0.263 8	0.527 6
7	0.094 098	0.216 7	0.433 3
8	0.079 111	0.182 2	0.364 3
9	0.067 709	0.155 9	0.311 8

表-2.3 に示した値から減衰距離を求めると表-2.4 のようになり、 n が大きいほど極めて速かに減衰することがわかる。したがって端面に加わる荷重 *p_y の次数の大きいとき、すなわち変位のばげしい荷重のときには、 y 方向の減衰が著しいわけである。表-2.4 には *q_y が端面

に於ける値の10% または1% まで減ずる距離 y を示しておいた。この表および附図-Ⅱ.2より明らかのように、 p_y が2次式のときには矩形の幅と同じ距離、 p_y が6次式のときには矩形の幅の $1/4$ だけ端面より離れたところ、応力は端面の値の1% 程度になるので、これらの位置では応力が消滅するものと考えてよい。

他の応力成分についても、 $^* \sigma_x = C_n f_n(x) g_n''(y)$, $^* \tau_{xy} = -C_n f_n'(x) g_n'(y)$ であるから、いずれも y 方向には $e^{-\alpha_n y}$ によって減衰する。それゆえ、 $^* \sigma_y$ と同様に n の大きいほど y の増加につれて減衰が顕著である。

(3) 温度と熱応力状態

つぎに、上に示した附加応力状態に(2.29)式による応力状態を重ね合わせて、真の熱応力状態を求めると、附図-Ⅱ.2.2 および Ⅱ.2.3)の通りになる。(2.29)式より、 $^* \sigma_x = ^* \tau_{xy} = 0$ であるから、 σ_x および τ_{xy} は附加応力と全く同じ値のものであり、 n の値が大きいときには、 y の増加とともに急激に減衰している。端面においては、 σ_x がかなり大い値を呈していることに注意する必要がある。しかしながら τ_{xy} は小さい。

端面において零であるが、 y が増加すると compensation line method によって得られる値に等しくなる。 y がいくぐらうにおいてこの値に等しくなるかという点、端面に与えられた荷重形の減衰状況による。したがって n の大きさに支配される。幅を2 l とすると、 $n=2$ のときは $y=2l$ 、 $n=6$ のときは $y=0.5l$ 程度の位置において、compensation line method による応力に等しくなるものと考えてよい。

このように非常に長い矩形においては、 σ_y の最大値は compensation line method によって求められ、端面近くにおいては応力が小さい。一方、 σ_x の最大値は端面に生じ、端面より遠ざかるにつれて小さくなる。端面近くにおける応力の変動は、温度変化の状況によって支配される。温度変化が激しく波打った形ときには、端面近くで応力が激しく変化し、端面からわずかに離れた断面において、compensation line method による応力に等しくなる。

(4) 矩形板の寸法の影響

上に得られた結論は、 y 方向に長い矩形板において、 x 方向に変わる温度変動を生じたとき、温度分布が滑らかであれば、端面よりある程度離れたところ熱応力は compensation line method によって得られる値に達しないということである。そこで、つぎに y 方向に有限の長さの矩形板に生ずる最大の熱応力について考えてみることにする。この場合に、

最も応力の減衰の悪い $\sigma_y = f_2(x)g_2(y)$ によっても、 $y=2$ (おおよそ帯の幅に等しい距離) の断面では、応力の端面の 1% 程度にまで減衰するから、図-2.3 において $h=2$ 以下の矩形を考えることにする。また、温度分布としては、前と同様に、(2.35) および (2.36) 式で表わされる x の 2 次式 および 6 次式を考えることにする。

$\sigma_y = C_n f_n(x) g_n(y)$ とおくと、(2.35) および (2.36) 式より、

$$C_2 = T_0 / 8N_2 = 0.112687 T_0, \quad C_6 = 0.368526 \times 10^{-2} T_0$$

である。境界条件 (2.19) 式によって未定常数を求めると、表-2.5 のような結果が得られる。

表-2.5 常数の値

h		2	1	$1/2$
$n=2$	$A=C$	-6.8569×10^{-3}	0.20052	0.49238
	$B=-D$	31.9575×10^{-3}	0.15283	0.09364
$n=6$	$A=C$	7.0268×10^{-8}	-4.4277×10^{-8}	8.3367×10^{-3}
	$B=-D$	1.0938×10^{-8}	0.4835×10^{-8}	34.0155×10^{-3}

附図-Ⅱ.2.4 および Ⅱ.2.5 における附加応力 σ_y を見ると、 h が小さいときには端面における応力の減衰がゆるやかになる。そのために、附図-Ⅱ.2.6 および Ⅱ.2.7 における熱応力状態は、 h が小さいと内部における σ_y はかなり小さくなる。たとえば、端面から $y=0.5$ 内部に入った位置における σ_y は表-(2.6) の通りである。表-2.6 には中央断面における σ_y も示した。この断面における σ_y は発生応力の最大値である。この表によれば、

表-2.6 σ_y の大きさ (最大値 $-\alpha E T$ に対する%)

断面	n	h		
		2	1	$1/2$
端面より	2	35.5	30.0	6.8
0.5 内部	6	99.1	97.5	93.9
中央断面	2	97.7	49.8	6.8
	6	100.0	100.0	93.9

σ_y の最大値は、 $h=1$ (正方形) に対しては、 $n=2$ のときには約 $-0.5\alpha ET$ に過ぎないが、 $n=6$ のときには $-\alpha ET$ の大きさを示すことがわかる。さらに h が小さくなって、 $h=1/2$ の形に対しては、 $n=2$ のときには σ_y がわずかに約 $-0.07\alpha ET$ に過ぎないことがわかる。しかし、 $h=1/2$ に対しても、 $n=6$ のときには大きい σ_y が生ずる。このように、形と温度変化の状態によって、熱応力の大きさに非常な差が現われる。

σ_x は端面において最大値をとる。この値はすでに述べたようにかなり大きいものである。しかし 附図-Ⅱ.2.6 および Ⅱ.2.7 によれば、 h が小さくなると σ_x の大きさについても著しく減ずる。 τ_{xy} の大きさについても h が小さくなると減ずる。このように、一般的に、 h が小さくなれば熱応力は非常に軽減されることがわかる。ただし、 $n=6$ 程度の温度変化に対しては、 $h > 1/2$ ではほとんど σ_y の軽減は期待できない。

第 3 章

自由な矩形板の熱応力状態

§ 3.1 計算上の仮定

コンクリートダムは層状に順次打設されるため、コンクリート打設中を考えると、温度分布が複雑であり、下部のコンクリートほど材令が古いから、鉛直断面を考えると、極めて複雑な熱応力状態を呈することになる。しかしながら、一つのブロックの水平断面を考えると、直線重力ダムでは矩形であり、その他の形式のダムにおいても矩形に近い場合が多い。したがって、まずこの章では、鉛直方向の拘束がないものとして、自由な矩形板として考えてもよい場合に、実際のダムに考えられる基本的な温度条件に際して発生する熱応力状態を解析することにする。

コンクリートの材令が古くなれば、比較的短期間にわたる荷重に対しては、コンクリートを弾性体と考えてよい。しかしながら、ダムにおいてはコンクリートが *massive* であるため、打設直後は断熱に近い状態で水和熱が発生する。このときの熱応力を考えるときには、コンクリートを弾性体と考えれば正しい応力状態を把握できない。このような場合については第Ⅲ編において考察することにし、ここでは弾性体としてのみ取り扱い、温度条件と熱応力状態の特徴を見出すことにする。

矩形板の熱応力状態は、温度分布のみならず矩形板の形によっても変化する。この関係については、第2章において基本的な考察を行なったので、ここでは最も簡単な場合として、無限に長い矩形板あるいは半無限板（すなわち幅の一樣な帯である）について解析を行なう。有限な長さ（すなわち矩形板）の場合については、第2章で得られた結果を用いて最大応力を近似的に推定することができる。

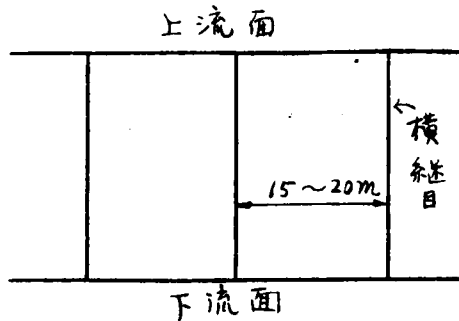
§ 3.2 表面が週期変動をうけるときの温度分布

(1) 条件の規定

本章ではダム完成後かなり長年月経過し、ダム内部の温度変化は主として気温変動に支配される場合について、コンクリートの温度変化とそれに伴う矩形ブロックの熱応力状態について、基本的な性質を考察する。

コンクリートダムは通常 15～20 m の幅を持ったブロックを単独に打設して作られる。

図-3.1



そしてダムが完成した後の様子を考えると、その水平断面は図-3.1のように、上下流面のみが大気に曝され、横断面はたがい隣りのブロックと接続しているものと考えてよい。このような場合に、気温変動によって生ずる熱流は近似的にダム軸に直交な水平方向のみ起るものと仮定する。上流面および下流面が鉛直に近ければダムの中央部においては上記のように仮定してもよい。

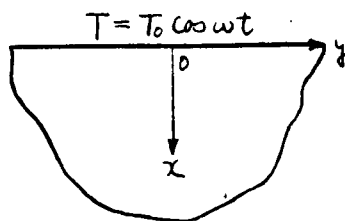
周期的な気温変動として、年周期と

日周期を持ったもの考える。すでに第1編 §4.4 において示したように気温の年変動は正弦曲線であると仮定してもよい。気温の日変化は非常に変化が複雑であると考えられるが、これも正弦曲線で表わされると仮定する。気温変動もこのように仮定しても、コンクリートの温度を決定するためには、コンクリートと外界との間の熱伝達率および日射の影響を考慮しなければならないが、これらの影響は別に考えることにし、ここでは通常行なわれているように、コンクリートの表面温度は気温と等しいと仮定する。また一方で、ダム完成後貯水池が湛水されると上流面の温度は水温に等しいと考える必要がある。このことを考えると問題が複雑になること、水温変動は気温変動よりも小さく、一面の温度変動が小さいと発生する熱応力も小さくなることを考えて、上流面温度も気温に等しいものとする。

(2) 温度分布

まず半無限体における一次元温度場を考える。図-3.2に示す $x=0$ なる表面における温度変動が

図-3.2



$$T = T_m \cos \omega t$$

なる周期函数によって与えられるものとする。

この場合の物体の内部 $x \geq 0$ における温度分布は、初期条件の影響がなく周期項のみで表わされる状態になったときにはつぎのようになる。^{1)~4)}

$$T = T_m \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} x\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} x\right) \quad (3.1)$$

ここに、 α は温度伝導率である。

図-3.3のように有限な厚さのものに対しては、その温度分布は

$$T = T_m \cos \omega t + 8 T_m \frac{2\pi}{\omega} \int_0^t \sin \omega \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \exp \left\{ \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{(2l)^2} (t-\lambda) \right\} \sin \frac{2n-1}{2l} \pi x d\lambda \quad (3.2)$$

のよう複雑な式になる。⁵⁾ このような複雑な式によって温度分布ならびに熱応力を計算するのは面倒であるから、(3.1)式の温度分布を用いて近似されるような場合を考えてみることにする。

(3.1)式でわかるように、 $x \sqrt{\omega/2\alpha}$ が大きいときには表面の温度変化の影響は小さい。そこで深さ x の奥における温度変動の振幅 T_A を考えると、

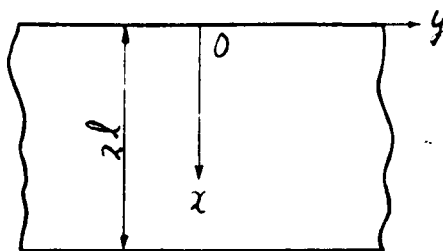
$$T_A = T_m \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} x \right) \quad (3.3)$$

なる値が得られる。コンクリートを対象として、 $\alpha = 0.003 \sim 0.005 \text{ m}^2/\text{h}$ とすると、年周期または日周期の場合について、温度変化の振幅が表面の温度振幅の1%程度まで減少する位置を求めると、表面からの距離はそれぞれ15mまたは0.8m位になる。表面からの距離がこの程度以上になれば、(3.2)式の代りに(3.1)式の温度分布を用いてもよいであろう。したがって年周期の場合は約30m、日周期の場合は約1.6m以上の厚さのコンクリートに対しては、温度分布は(3.1)式を用いて計算してもよい。

図-3.1の水平断面における熱応力を計算するときに、横継目がグラウトされて完全に接着し、かつ岩盤においても固定されているものとする。平面応力状態であれば(1.62)式により、温度分布と相似な応力状態を示すことになる。また横継目がグラウトされてなくて、隙間が存在するときには、(1.63)式に従って応力を発生する。このとき断面の温度分布は y 軸に関して対称であるから、(1.63)式の第3項はなくなり、断面中の任意の奥の熱応力は、その奥の温度から平均温度を引いたものに比例することになる。したがってこのような場合に熱応力を求めるには、断面における平均温度と、平均温度からの偏差に分けて考えれば便利である。半無限体の温度分布を用いると、表面から深さ x までの任意の時刻における平均温度 \bar{T} は、

$$\bar{T} = \frac{1}{x} \int_0^x T dx = T_m \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \left\{ \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) - \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} x \right) \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} x \right) \right\} \frac{1}{x} \quad (3.4)$$

図-3.3



問題の場合の熱応力は、温度変動の最も大きい表面において起こる。もし両端が自由なときには、表面の最大応力は、表面温度と平均温度との差が最大となる時刻において生ずる。そこで2つの表面の温度変化の影響が重なり合うものと考え、温度分布は、

$$T = T_m \left\{ \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} x\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} x\right) + \exp\left\{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} (2l - x)\right\} \cos\left\{\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} (2l - x)\right\} \right\} \quad (3.5)$$

したがって、表面温度 T_s と平均温度 \bar{T} との差はつぎのようになる。

$$T_s - \bar{T} = T_m \left\{ \cos \omega t - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a}{\omega}} \left\{ \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} 2l\right) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} 2l\right) \right\} \right\} \quad (3.6)$$

これが最大となる時刻は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(T_s - \bar{T}) &= -T_m \omega \left\{ \sin \omega t - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a}{\omega}} \left\{ \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} 2l\right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} 2l\right) \right\} \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

より求められる。

ここでは、簡単のために、上記のような近似的な温度計算によることにするが、正確な温度分布の解析は K. Hirschfeld によっても実施されている。⁶⁾ K. Hirschfeld は、コンクリートの表面から外界に熱移動を行なうときには Newton の法則に従うものとし、熱伝達率 $\alpha = 12 \text{ kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ\text{C}$ と仮定して温度分布の計算を詳細に実施し、その結果を使用に便利のように図示している。また文献 4) の p.55 以下の図を用いることもできる。しかしながら次節で述べるように、ここで述べたような近似計算でも十分に正確に温度分布を計算することができる。

§ 3.3 表面週期温度変動による熱応力状態 (Compensation Line Method による場合)

ブロック水平断面形状は、ダム軸方向に長いと考える。岩盤において固定されているときには、ダム軸方向の熱応力は、平面応力状態と仮定すると、 $-\alpha E T$ で与えられるから問題は無い。ここではダム軸方向に長いけれども拘束されていない場合を考える。前節では年週期温度変動に際して、厚さ 30 m 以上とすれば温度分布は簡単であることを述べたが、本節ではとくに厚さ 15 m のときについて、(3.5) 式を適用することにする。

(1) 年週期の温度変化をうけるとき。

週期を 365 日とすると、

$$\omega = 2\pi / \text{週期} = 0.0007173 / \text{h}$$

さらに

$$\alpha = 0.004 \text{ m}^2/\text{h}, \quad 2l = 15 \text{ m}$$

とすると, (3.7)式より $(T_s - \bar{T})$ が最大になる時刻 t_m は,

$$\omega t_m = -0.282 + n\pi \quad (n: \text{整数})$$

より求められる。この時刻における $T_s, \bar{T}, T_s - \bar{T}$ を求めると,

$$T_s = 0.961 T_m, \quad \bar{T} = 0.149 T_m, \quad T_s - \bar{T} = 0.812 T_m$$

したがって, 表面で最大応力が現われるのが, 表面温度が最大値に達するよりも位相が 0.282 以前の時刻であり, そのときの応力は $-0.812 \alpha E T_m$ であることがわかる。

このような温度計算は近似的であるので, (3.2)式を用いて計算してみよう。そのためには文献 4) p.55 以下に便利な図表が挙げられているからそれを利用する。この結果を先に求めた値とともに一括して比較すると, 表-3.1 の通りになる。なお同表では表面温度が最大に達したとき, すなわち位相 $\omega t = 0$ のときに于いての計算値も示した。

表-3.1 位相と温度の計算値 (幅 15 m, 年周期変動のとき)

計算法		(3.2)式による正解		(3.5)式による近似解	
		a ¹⁾	b ²⁾	a	b
ωt		-0.279	0	-0.282	0
T_s/T_m		0.961	1.000	0.961	1.000
\bar{T}/T_m		0.138	0.216	0.149	0.221
$(T_s - \bar{T})/T_m$		0.823	0.784	0.812	0.779
比	T_s	1.00	1.04	1.00	1.04
	\bar{T}	1.00	1.57	1.08	1.60
	$T_s - \bar{T}$	1.00	0.95	0.99	0.95

註 1) $(T_s - \bar{T})$ が最大となるとき

2) T_s が最大となるとき

表-3.1 より明らかになる事項を記せばつぎのようである。

(a) 表面温度が最大となるときには, もちろん $(T_s - \bar{T})$ は最大値を示さない。 $T_s - \bar{T}$ の最大値を与える時刻は表面温度が最大となる時刻よりかなり前であるため, 両者の時刻における温度分布はかなり異なるが, $(T_s - \bar{T})$ の値そのものは大きい差がないから, 表面応力

のみを求めるためには、表面温度が最大となる時刻における温度分布を用いてもよい。

(b) 温度分布として (3.5) 式を用いれば、15 m 以上の厚さのコンクリートでは、 $(T_s - \bar{T})$ の値およびその値が最大となる時刻を十分正しく知ることができる。

温度分布 E がより正確に表現することができ、しかも計算が簡単な式として (3.5) 式の温度分布を用いることにする。そうすると、表面における最大応力は

$$\sigma = -\alpha E (T_s - \bar{T}) = -0.812 \alpha E T_m$$

両端が完全に拘束されているときの最大値は $\sigma = -\alpha E T_m$ であるから、全く拘束されていないときには、最大応力が 19% (正解では 18%) 減することになる。

(2) 日周期の温度変化をうけるとき

このときには、

$$\omega = 2\pi / \text{周期} = 0.2618/h, \quad a = 0.004 m^2/h, \quad 2l = 15 m$$

とすると、 $T_s - \bar{T}$ の最大値およびその時刻はつぎのようになる。

$$\omega t = -0.012 + n\pi \quad (n: \text{整数})$$

$$T_s = 1.000 T_m, \quad \bar{T} = 0.012 T_m, \quad T_s - \bar{T} = 0.988 T_m$$

したがって表面における最大応力は、

$$\sigma = -0.988 \alpha E T_m$$

であって、完全拘束の場合とほとんど変わらない。また最大値を示す時刻も表面温度の最大となる時刻に極めて近い。

そこでつぎに

$$2l = 2 m$$

のときを考えてみると、

$$\omega t = -0.096 + n\pi \quad (n: \text{整数})$$

$$T_s = 0.995 T_m, \quad \bar{T} = 0.078 T_m, \quad T_s - \bar{T} = 0.917 T_m$$

したがって、最大応力は

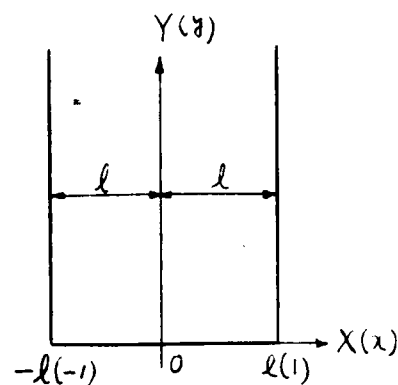
$$\sigma = -0.917 \alpha E T_m$$

であって、厚さが 2 m 程度まで小さくなくても、最大応力は完全拘束のときより 10% も減らない。

§ 3.4 表面周期温度変動による熱応力状態 (端面の影響を考慮する場合)

平面応力状態にあり，図-3.4に示すように，
 x 方向の寸法と比べて y 方向の寸法が極めて長い
 ときに，端面 $y=0$ 近傍の応力状態を解析してみる。
 温度分布は §3.3 で示したような表面に最大応力の
 発生する時刻に相当するものを選ぶことにする。座標
 軸は図-3.4のように選ぶ，あらためて， $x=X/l$ ， $y=Y/l$
 とする。

図-3.4



附加応力状態は， $y=0$ において $\sigma_y = \sigma_y^*$ ，
 $\tau_{xy} = 0$ であるから，(2.15)式にすると，

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(x) &= \int_{-1}^x d\eta \int_0^{\eta} \sigma_y^*(\xi) d\xi \\ &= \int_{-1}^x d\eta \int_0^{\eta} \alpha E \{T(\xi) - \bar{T}\} d\xi\end{aligned}\quad (3.8)$$

を $f_n(x)$ で展開する必要がある。 T に (3.5) 式を用いて，上記の $\bar{\sigma}(x)$ を展開しようとするとき非
 常に面倒であるので， $(T - \bar{T})$ の正しい値を用いず，これと $x=0$ ， ± 0.3 ， ± 0.6 ， ± 0.8 お
 よび ± 1.0 で一致するような 8 次多項式によって温度分布を近似することにした。ただし， \bar{T} は
 すると，

$$\int_{-1}^{+1} (T - \bar{T}) dx = 0 \quad (3.9)$$

という条件から \bar{T} のおおよそが外れることになるので，この条件が成立するように常数を加えて補正した。
 この近似式は正しい温度分布と非常によく一致を示した。

(1) 年周期の温度変動をうけるとき

まず §3.2 に示したように， $2l = 15m$ のときを考える。ただし，ここでは $2l = 2$ とする
 ふうに座標変換し，新しい座標を (x, y) とする。表面応力が最大になる位相 $\omega t = -0.282 + n\pi$
 に対応する温度分布と上記の 9 点で一致する 8 次式は，

$(T - \bar{T})/T_m = -0.322440 + 0.615221x^2 + 0.732880x^4 - 0.175276x^6 - 0.038591x^8$
 この式を (3.9) の条件が満足するように補正すると

$$(T - \bar{T})/T_m = -0.322323 + 0.615221x^2 + 0.732880x^4 - 0.175276x^6 - 0.038591x^8 \quad (3.10)$$

この温度分布を示すと 附図-Ⅱ.3.1 のような曲線である。

(3.8) により $\bar{\sigma}(x)$ の境界値を求めると、

$$\bar{\sigma}(x)/\alpha E T_m = 0.081024 - 0.161162x^2 + 0.051268x^4 \\ + 0.024427x^6 - 0.003130x^8 - 0.000429x^{10}$$

これを $f_n(x)$ で展開すると、

$$\bar{\sigma}(x)/\alpha E T_m = 0.081564f_2 - 0.001546f_4 - 0.000079f_6 - 0.00000160f_8 \quad (3.11)$$

$g_n(y)$ としては (2.22) 式を用いればよいから、応力函数は

$$\bar{\sigma}(x, y)/\alpha E T_m = 0.081564f_2(x)g_2(y) - 0.001546f_4(x)g_4(y) \\ - 0.000079f_6(x)g_6(y) - 0.00000160f_8(x)g_8(y) \quad (3.12)$$

表-3.2 $\sigma_y/\alpha E T_m$ の値 (年温度変動)

$y \backslash x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	-0.3223	-0.2966	-0.2059	-0.0147	0.3191	0.8119
0.2	-0.3052	-0.2767	-0.1831	-0.0027	0.2933	0.7305
0.4	-0.1962	-0.1739	-0.1058	0.0111	0.1820	0.4136
1.0	-0.0936	-0.0824	-0.0490	0.0071	0.0862	0.1888
1.6	-0.0196	-0.0173	-0.0102	0.0016	0.0181	0.0392
2.0	-0.0041	-0.0036	-0.0021	0.0003	0.0038	0.0082

まず (2.3) 式により $\bar{\sigma}(x, y)$ のみにより生ずる応力を求めてみると、たとえば σ_y は表-3.2 の通りである。附図-Ⅱ.3.2 は σ_y を図示したものである。端面 $y=0$ において加えられた直応力 σ_y は、端面から位置が遠ざかるにつれて平均化された応力となるのである。この場合では $\int_{-1}^{+1} \sigma_y dx = 0$ であるから、平均応力は零である。附図-Ⅱ.3.2 によると、 $y=1$ においてはかなりの応力が現われるが、 $y=2$ の断面では實際上応力は現われないものと考えてよいことがわかる。

$\bar{\sigma}$ によって生ずる応力に $\sigma_y = -\alpha E (T - \bar{T})$ なる応力を重ね合わせると、真の熱応力状態が得られる。表-3.3 はその結果を示したものである。この応力分布は附図-Ⅱ.3.3 の通りである。端面 $y=0$ における σ_x はかなり大きい y が増すと速かに減ずること、 σ_y は端面においては零であるが、内部に入るにつれて漸次値を増し、 $y=2$ 付近になれば、 y 軸に直角な断面における σ_y と温度分布とはほとんど相似形をなし、compensation line method で得られる応力 $\sigma_y = -\alpha E (T - \bar{T})$ に等しいと考えてよいことが

わかる。

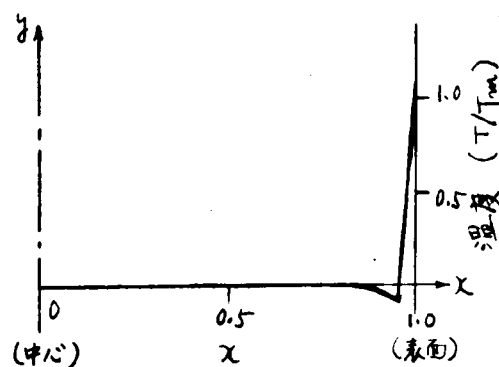
表-3.3 熱応力 (年温度変動)

	x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\sigma_y / \alpha E T_m$	0	0	0	0	0	0	0
	0.2	0.0170	0.0200	0.0232	0.0222	-0.0263	-0.0826
	0.6	0.1262	0.1228	0.1002	0.0259	-0.1371	-0.3782
	1.0	0.2289	0.2142	0.1570	0.0219	-0.2329	-0.6230
	1.6	0.3028	0.2794	0.1958	0.0164	-0.3010	-0.7726
	2.0	0.3184	0.2931	0.2039	0.0151	-0.3153	-0.8036
$\sigma_x / \alpha E T_m$	0	-0.4580	-0.4448	-0.3579	-0.2616	-0.0918	0
	0.2	-0.1911	-0.1748	-0.1313	-0.0753	-0.0244	0
	0.6	0.0509	0.0486	0.0410	0.0273	0.0101	0
	1.0	0.0782	0.0724	0.0560	0.0331	0.0107	0
	1.6	0.0369	0.0340	0.0260	0.0151	0.0048	0
	2.0	0.0162	0.0149	0.0114	0.0066	0.0021	0
$\tau_{xy} / \alpha E T_m$	0	0	0	0	0	0	0
	0.2	0	0.0362	0.0736	0.1014	0.0905	0
	0.6	0	0.0583	0.1044	0.1238	0.0972	0
	1.0	0	0.0385	0.0677	0.0779	0.0589	0
	1.6	0	0.0119	0.0209	0.0239	0.0179	0
	2.0	0	0.0041	0.0071	0.0081	0.0061	0

(2) 日週期の温度変動をうけるとき

$2l=15m$ とすると、表面応力が最大となる時刻の温度分布は、図-3.5のように表面附近において温度変化があるにすぎない。このようなときには、第2章で述べたように、端面 y からほんの少し内部に入れば、熱応力 σ_y は compensation line method

図-3.5



で求められるから詳しい応力解析は省略する。

幅が短かくて $2l = 2m$ のときについて考えることにする。この場合についても、 $2l = 2$ となるように座標変換を行ない、表面応力が最大となる位相 $\omega t = -0.0955 + n\pi$ に対応する温度分布に近似させた 8 次式を求めると、つぎの結果がえられる。

$$(T - \bar{T})/T_m = -0.072907 - 0.006979x^2 - 1.959210x^4 + 4.357404x^6 + 1.398697x^8 \quad (3.13)$$

この式で示される温度分布は 附図-Ⅱ.3.4 のようになる。前と同様にして $\bar{\sigma}(x)$ の境界値を求めると、

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(x)/\alpha E T_m = & 0.040073 - 0.036454x^2 - 0.0000582x^4 - 0.065307x^6 + 0.077811x^8 \\ & - 0.015541x^{10} \end{aligned}$$

これを $f_n(x)$ で展開すると、

$$\bar{\sigma}(x)/\alpha E T_m = 0.040542f_2 + 0.006063f_4 + 0.000625f_6 - 0.000058f_8 \quad (3.14)$$

ゆえに応力函数は つぎの通りになる。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(x, y)/\alpha E T_m = & 0.040542f_2(x)g_2(y) + 0.006063f_4(x)g_4(y) + 0.000625f_6(x)g_6(y) \\ & - 0.000058f_8(x)g_8(y) \end{aligned} \quad (3.15)$$

この場合に $\bar{\sigma}(x, y)$ のみによって生ずる応力 $^*\sigma_y$ を示すと表-3.4 および 附図-Ⅱ.3.5 の通りになる。

表-3.4 $\sigma_y/\alpha E T_m$ の値 (日温度変動)

$y \backslash x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	-0.0731	-0.0762	-0.1074	-0.1495	0.0280	0.9201
0.2	-0.0824	-0.0891	-0.1059	-0.0969	0.0710	0.6846
0.6	-0.0835	-0.0779	-0.0576	-0.0113	0.0813	0.2516
1.0	-0.0454	-0.0403	-0.0248	0.0022	0.0422	0.0973
1.6	-0.0097	-0.0086	-0.0051	0.0008	0.0090	0.0194
2.0	-0.0020	-0.0018	-0.0011	0.0002	0.0019	0.0040

* σ_y の減衰状況は年周期の温度変動の場合と比べて速やかである。 $y=1$ における表面応力は $y=0$ のときの 10% 程度に減じ、 $y=1.6$ においては實際上 $^*\sigma_y$ はないものと考えてよい。

$\bar{\sigma}$ による応力と $^*\sigma_y$ による応力を重ね合わせて、熱応力状態を求めた結果は表-3.5 および 附図-Ⅱ.3.6 の通りである。この場合でも、端面 $y=0$ において生ずる σ_x はかなり大きい。

表-3.5 熱応力 (日温度変動)

	$\gamma \backslash x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\sigma_y / \alpha E T_m$	0	0.0023	0.0014	0.0089	0.0025	0.0027	0.0029
	0.2	-0.0070	-0.0114	0.0024	0.0552	0.0457	-0.2325
	0.6	-0.0081	-0.0002	0.0506	0.1407	0.0560	-0.6656
	1.0	0.0300	0.0374	0.0835	0.1542	0.0169	-0.8198
	1.6	0.0657	0.0691	0.1032	0.1529	-0.0162	-0.8977
	2.0	0.0734	0.0759	0.1072	0.1522	-0.0244	-0.9131
$\sigma_x / \alpha E T_m$	0	-0.1349	-0.1427	-0.2155	-0.3246	-0.2250	0
	0.2	-0.0922	-0.0897	-0.0907	-0.0292	0.0013	0
	0.6	0.0126	0.0173	0.0268	0.0298	0.0165	0
	1.0	0.0416	0.0349	0.0290	0.0190	0.0070	0
	1.6	0.0183	0.0169	0.0130	0.0075	0.0024	0
	2.0	0.0081	0.0074	0.0057	0.0033	0.0010	0
$\tau_{xy} / \alpha E T_m$	0	0	0	0	0	0	0
	0.2	0	0.0146	0.0061	0.0252	0.0959	0
	0.6	0	0.0163	0.0366	0.0583	0.0622	0
	1.0	0	0.0176	0.0319	0.0384	0.0309	0
	1.6	0	0.0059	0.0104	0.0119	0.0089	0
	2.0	0	0.0020	0.0035	0.0040	0.0030	0

表面における σ_y は $y=0 \sim 0.6$ の間において急激に増加し、 $y=1$ を越えると compensation line method によって得られる値に近くなる。 $y=1.6$ を越えると、断面中、どの位置においても、 σ_y はほとんど compensation line method によって得られる応力に等しいと考えよい。

日周期変動をうけるときには、 $2l=15m$ の場合はもちろんのこと、ここで示した $2l=2m$ の場合でさえ、 $2l=15m$ のものが年周期の温度変動をうけるときに比べて端面が近接している応力の傾斜が大きく、端面より少し内部に入ると応力分布が変らなくなる。これはすでに図示した温度分布の差によるものである。端面附近において応力状態の変化する様子は、§2.5 (3) において述べたところにより明らかに推測されることである。端面からどの程度の距離において compensation line method による応力と等しくなるか、あるいは端面附近における

応力変動の様子がどうであるかということ、わざわざ応力計算を実施しなくても、(3.12) および (3.15) 式における応力函数中の $f_n(x)g_n(y)$ の係数を見れば明らかである。

y 方向の長さの有限な矩形板の表面における温度変動をうけたときの熱応力状態は、本節で示した熱応力状態と § 2.5 (4) で示した y 方向の寸法効果を合わせて考えれば容易にわかることであるから省略する。

§ 3.5 表面温度の急変するとき

ダムにおいては、型わくの取り除き、日射、降雨、降雪などによって、コンクリートの表面温度が急変する場合がある。このときの熱応力状態の基本的な様子を調べるために、内部温度は T_0 の一様な値であって、突然表面温度が 0° まで低下する場合を考えよう。表面に急激な温度変化を生じたときには、大きい応力の生ずる場所は表面であり、時刻は温度変化を生じてから極くわずかの期間中にすぎない。このときには、温度変化は表面からわずかの深さの部分に限られる。したがって、最大応力を知りたいときには、無限に長い板を考慮して、温度場は一次元的であり、熱応力は compensation line method によって求めることができる（ただし、おぼとしい物体でない限りは表面が突然 T_s だけ温度上昇すれば、表面応力は $-\alpha E T_s / (1-\nu)$ とするべきである）。したがって図-3.6 に示すように、幅 $2l$

の無限に長い自由な矩形板に対して、つぎの温度条件をうけたときの解を求めることにする。

ここに、 x は

$$x = X/l \quad (3.16)$$

として無次元化したものである。

初期条件： $T = T_0$

$$(-l < x < l, \text{ すなわち } -1 < x < 1)$$

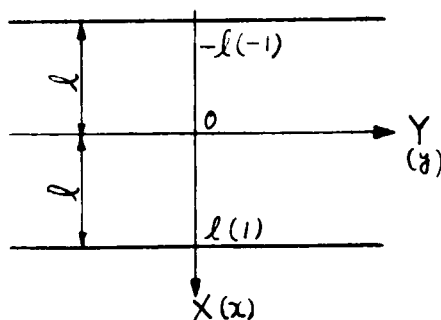
境界条件： $T = 0 \quad (x = \pm 1, t > 0)$

この解はつぎの通りである。^{2) 8)}

$$T = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \exp\left\{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \tau}{4}\right\} \cos(2n+1)\pi \frac{x}{2} \quad (3.17a)$$

$$= T_0 - T_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\operatorname{erfc}\left\{\frac{(2n+1)-x}{2\sqrt{\tau}}\right\} + \operatorname{erfc}\left\{\frac{(2n+1)+x}{2\sqrt{\tau}}\right\} \right] \quad (3.17b)$$

図-3.6



ここに

$$\tau = \alpha t / l^2 \quad (3.18)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \quad (3.19)$$

この式によって求められた温度分布は多くの書物に図示されている。いままで述べてきた温度分布は Fourier 数 τ によって規定されるものであり、 τ が小さいときには、(3.17b) 式は収斂が速いから計算に便利である。しかしながら、 τ が小さいときには、半無限板における温度分布 (座標は図-3.2 参照)

$$T = T_0 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (3.20)$$

を用いても十分よい近似の得られるものである。ここに、

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (3.21)$$

さて温度と compensation line method による応力状態を示すと附図-II-3.7 へような結果が得られる。最近では、L. H. Adams と R. M. Waxler がこれらの詳細な数値を求めて表示している。⁹⁾ 図はすべての値を無次元化して表わしてある。 $\tau = \alpha t / l^2$ であるから、 α と l が与えられた場合には時刻を示すことになる。表面 $x=1$ においては 0 にとり $\alpha E T_0$ なる最大値をとるが、その後は漸減する。これに反して内部は零から逆符号の応力が増大してくる。

コンクリート中においては、表面温度が急に減じたときに大きい引張応力が生ずるので、ひび割れ発生の危険がある。 $\alpha = 10 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$, $E = 200 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$, 引張強度 25 kg/cm^2 なるコンクリートを考えてみる。もし表面が急冷されて $\alpha E T_0$ なる応力が現われるものとする、 $T_0 = +12.5^\circ\text{C}$ において表面応力は引張強度を越えることになる。実際にはこのような単純な仮定でひび割れの発生を論じられなれば、天候の急変、型わくの取り除き (初編 §2.3 参照) などの際に、ひび割れ発生の可能性が強くなることは容易に考えられることである。この場合の熱応力の大きさは、位置 x と Fourier 数 τ によって決定される。表面近くでは τ が小さいほど熱応力が大きい。 $\tau = \alpha t / l^2$ であるから、表面近くでは温度伝導率 α が小さいほど長時間厳しい応力が持続し、ひび割れ発生の危険性が大きいわけである。

ここでは、簡単のために、外界温度とコンクリートの表面温度が等しいと考えたが、実際には両者の温度は等しくなく、ある熱伝達率 α をもってコンクリートと外界との間に

熱の移動が行なわれると考えるべきものである。この場合には、表面応力が上記よりも幾分小さくなる。コンクリート表面が水に**ぬ**れな**い**で、**空**気と接している場合には、 $\alpha = 5 \sim 25$ $\text{h cal/m}^2 \text{h}^\circ\text{C}$ 程度の小さい値であるから、上記のように急速に表面温度が低下しないので、表面応力は小さくなる。しかしながら、このときには表面乾燥による引張応力が発生することと考慮に入れなければならないので、一概にひび割れ発生の危険性が少ないといことができない。又と考慮したときの温度分布については、H. Bachmann の計算結果⁽¹⁾を利用することができよう。

§ 3.6 表面が等速温度変化をうけるとき

§ 3.2 ～ § 3.4 においては、表面温度が周期的に変動する場合について、内部温度が純粋に周期的に変動する場合のみも考えた。本節では、表面温度の変動速度と熱応力との関係を知るために、最大の温度変動速度長としては、表面温度が年周期あるいは日周期で変る場合の最大値もとりにあげて比較することにする。

図-3.6 と同じ幅 $2l$ の場合に対して

初期条件 $T=0$ ($-l < x < l$, すなわち $-1 < x < 1$)

境界条件 $T=kt$ ($x=\pm 1$, $t>0$)

なる条件を考える。温度分布は、

$$T = kt + \frac{kx^2(x^2-1)}{2a} + \frac{16kl^2}{\pi^3 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \exp\left\{-(2n+1)^2 \pi^2 \frac{x}{4}\right\} \cos(2n+1)\pi \frac{x}{2} \quad (3.22)$$

によって表わされる⁽¹⁾。この場合には、 a と l とが指定されても、1 点の温度は t (あるいは τ) のみならず kt によっても異なる。

表面温度が

$$T = T_m \cos \omega t$$

なる関係によって周期的に変化すると考えると、最大の変化割合は、

$$\left| \frac{dT}{dt} \right|_{\max} = \omega T_m$$

年周期および日周期の変動のときについて、温度降下の場合を考えると、(3.22)式において kt の値はつぎのようになる。

$$\text{年周期のとき} ; k = -\omega T_m = 0.0007173 T_m / \text{h} = 0.01724 T_m / \text{day} \quad (3.23a)$$

$$\text{日周期のとき} ; k = -\omega T_m = 0.2618 T_m / \text{h} = 6.2832 T_m / \text{day} \quad (3.23b)$$

このように一定の速度によって、表面温度が低下するときに、変動速度と熱応力との関係と考えることにする。

(3.22)式による計算は やや面倒であるから、差分法によって数値解を求めた。この方法は通常 E. Schmidt の方法⁽¹²⁾と呼ばれているものである。(3.23)式を用いて計算した結果は 附図-Ⅱ.3.8 に示す通りである。

いま、

$$\alpha = 0.004 \text{ m}^2/\text{h}, \quad l = 7.5 \text{ m}$$

とすると、(3.18)式より $\tau = 0.001$ は $t = 14.05 \text{ h} = 0.586 \text{ day}$ に相当する。したがって (3.23b)式の速さで約1日毎に表面温度が低下すれば約 $0.7 \alpha E T_m$ の表面引張応力が生じ、(3.23a)式の速さに対しては約2ヶ月間で $0.8 \alpha E T_m$ の引張応力が発生する。通常はこれ以上の長期間にわたって、表面が等速に温度変化をすると考える必要はないであろう。

そこでこれらの値を 附図-Ⅱ.3.1 ~ Ⅱ.3.6 に示した 週期温度変動の場合と比較してみよう。

年週期温度変動のときには、表面の最大応力は約 $0.8 \alpha E T_m$ 、 $1.0 \alpha E T_m$ 、 $2l = 4 \text{ m}$ に対しては約 $0.9 \alpha E T_m$ である。このように正弦的週期変動も考えた方が熱応力が大きいため、ここで述べたように、等速温度変動をいう条件の場合を考えて熱応力解析を行なう必要はないであろう。ただ、規則正しい正弦的週期変動に重ね合わさって等速温度変動も生ずるというような厳しい条件を考えようという場合にのみ、ここで示した熱応力状態を考慮すればよい。

§ 3.7 水和熱の発生するとき

(1) 仮定

ダムの打設中には、水和熱の発生によって大規模熱応力が発生する。近代の大規模なダム工事においては、有害な熱応力の除去、工期の促進、グラウト時期の調整などの目的をもって、人工冷却が行なわれる。水和熱の発生による熱応力はひび割れに重大な影響をもっているから、この節ではかかる場合の熱応力状態を考えることにする。ただし、鉛直面内の拘束によって生ずる熱応力状態は後に考えることにし、ここでは水平面内の応力を対象とし、自由な矩形板の場合のみを論ずることにする。

コンクリートの断熱温度上昇は、通常用いられているように、 $\theta = \theta_m(1 - e^{-mt})$ によって表わされるものとし、打設したリフトの温度上昇は、これと同様な型式

$$T = T_m (1 - e^{-mt}) \quad (3.24)$$

なる形によって表わされるものとする。しかるときには、単位体積、単位時間当りの温度上昇割合は、

$$\frac{W}{c\rho} = \frac{\partial T}{\partial t} = m T_m e^{-mt} \quad (3.25)$$

いま再び同様に、幅が $2l$ であつて x 方向のみに熱流のある場合を考える。打設温度と気温とが等しいとすると、打設時からの温度上昇は一般に次式で求めることができる。⁽¹³⁾

$$T = \frac{4}{\pi c\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2} \int_0^t W(K) \exp \left\{ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a (t-K)}{l^2} \right\} dK$$

また K. Hirschfeld によれば、コンクリートと空気の間の熱伝達率 α を考慮に入れるとつぎの通りになる。⁽¹⁴⁾

$$T(x, t) = T_m e^{-mt} \left\{ -1 + \frac{\alpha l / \lambda}{\frac{\alpha l}{\lambda} \cos \sqrt{\frac{ml^2}{a}} - \sqrt{\frac{ml^2}{a}} \sin \sqrt{\frac{ml^2}{a}}} \cos \left(x \sqrt{\frac{ml^2}{a}} \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_m \left(\frac{1}{\varphi_n^2} + \frac{1}{\frac{ml^2}{a} - \varphi_n^2} \right) \varphi_n \sin \varphi_n}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin 2\varphi_n}{2\varphi_n} \right)} e^{-\tau \varphi_n^2} \cos(\varphi_n x) \right\} \quad (3.27)$$

ここに、

$$x = X/l, \quad \varphi_n \tan \varphi_n = \alpha l / \lambda$$

である。後において、型わくの存在する場合の温度計算を実施するときに、厳密解を得ることが困難だから差分法を用いることにした。したがつて、この場合においても、(3.26) および (3.27) 式によらずに差分法によつて解を求めた。K. Hirschfeld はこの場合の温度分布について、 $m = 0.00667/h$ として非常に多くの計算結果を図示している。ここでは表面温度が常に一定であると仮定し、以下に示すように3種類の例について解析を行なうことにした。この目的は、発熱割合のみ変化させて他は同一条件とし、発熱割合と熱応力の関係を調べ、さらに型わくが存在する場合の影響についても調べようとするものである。この場合 R. W. Carlson の方法⁽¹⁵⁾によれば精度は向上するが、計算は面倒になるので、通常のように E. Schmidt の方法にならつて計算することにした。

(3.24) および (3.25) 式において、

$$m' = ml^2/a = mt/\tau \quad (l \text{ は幅の } 1/2) \quad (3.28)$$

とおいて、無次元量 m' を用いると、

$$T = T_m (1 - e^{-m'\tau}) \quad (3.29)$$

$$\frac{W}{c_f} = m' \frac{T}{t} T_m e^{-m't} \quad (3.30)$$

中庸熱セメントが用いられるとすると、通常 $m=0.012/h$ 程度である。そこで、これよりも発熱割合の速い場合と遅い場合を考えおことにして、

$$m=0.009/h \ (0.216/day), \ 0.012/h \ (0.288/day), \ 0.015/h \ (0.360/day)$$

の3種類の m の値について計算することにする。これらの値は、一応それぞれ低熱セメント、中庸熱セメント、普通セメントが示す値であると考えたものである。なお幅 $15m$ の物体であると仮定し、 $a=0.004m^2/h$ であるとする、上記の m に対する m' は、それぞれ

$$m'=126.56, \ 168.75, \ 210.94$$

となる。

図-3.7

(2) 型わくを使用しないとき

上記のような仮定によると一次元の熱伝導となるから、微分方程式は、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{W}{c_f}$$



図-3.7に示すように、点 n に注目し、時刻 t と $t+1$ との間を考えると、この微分方程式よりつぎのような差分方程式に表わすことができる。

$$(T_{n,k+1} - T_{n,k}) = \frac{a \Delta t}{(5l)^2} (T_{n-1,k} + T_{n+1,k} - 2T_{n,k}) + (\Delta t \text{ 時間における断熱温度上昇}) \quad (3.31)$$

$$\therefore T_{n,k+1} = T_{n,k} + \frac{a \Delta t}{5l^2} (T_{n-1,k} - 2T_{n,k} + T_{n+1,k}) + T_m (e^{-m't_k} - e^{-m't_{k+1}}) \quad (3.32)$$

ここに、

$$\Delta T = a \cdot \Delta t / l^2$$

(3.32)式を用いて $\xi=0.1$ として計算した結果を附図-II.39に示す。ただし表面温度は常に打設温度としたので、K. Hirschfeldのように表面温度は $\alpha=12 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$ によって規定されると考えたときよりも表面応力は大きい。この図より代表的な時刻における表面応力を比較すると表-3.6の通りになる。 $2l=15m$, $a=0.004m^2/h$ とすると、 $0.001\tau=0.586$ 日となるから、表にはこの場合の材令 t も示した。このように、表面においては材令の若い時期ほど m の値による応力差は大きい。最大応力は $\tau=4.02$ ($t=11.7$ 日) の頃に現われ、その値は $0.80 \sim 0.85 \alpha E T_m$ である。この時期における応力差は比較的小さく、 $\tau=0.10$ ($t=58.6$ 日) の頃になると、逆に m の大きい方が応力が小さくなる。

表-3.6 表面応力 ($\alpha E T_m$)

T		0.002	0.003	0.005	0.010	0.020	0.100
t (day)		1.17	1.76	2.93	5.86	11.7	58.6
m (h ⁻¹)	0.009	0.214	0.298	0.437	0.656	0.795	0.656
	0.012	0.273	0.380	0.530	0.746	0.839	0.653
	0.015	0.332	0.447	0.615	0.799	0.852	0.651

表-3.7 断熱温度上昇 (T_m)

T		0.002	0.003	0.005	0.010	0.020	0.100
t (day)		1.17	1.76	2.93	5.86	11.7	58.6
m (h ⁻¹)	0.009	0.224	0.316	0.469	0.718	0.920	1.000
	0.012	0.286	0.397	0.570	0.815	0.966	1.000
	0.015	0.344	0.469	0.652	0.879	0.985	1.000

表-3.7 に示した断熱温度上昇量と比較すると、材令の若いときには、表面応力はほとんど断熱温度上昇量によって支配されていることがわかる。この関係をさらに詳しく見るために、

$$\beta = \frac{\text{表面応力}}{\text{断熱温度上昇}} \cdot \frac{1}{\alpha E} \quad (3.33)$$

という量を考えてみよう。この値は単位断熱温度上昇に際して発生する表面応力を与えるものである。したがって β を“断熱応力係数”と名付けることにする。 β が与えられていると、表面応力は、

$$\sigma = \alpha \beta E T \quad (3.34)$$

によって求めることができる。ここに、 T は断熱温度上昇である。 β の計算結果は表-3.8 に示す通りである。

表-3.8 β の値 (型わくのなるとき)

T		0.002	0.003	0.005	0.010	0.020	0.100
t (day)		1.17	1.76	2.93	5.86	11.7	58.6
m (h ⁻¹)	0.009	0.96	0.94	0.93	0.91	0.86	0.66
	0.012	0.95	0.96	0.93	0.91	0.87	0.65
	0.015	0.94	0.95	0.94	0.91	0.87	0.65
平均		0.95	0.95	0.93	0.91	0.87	0.65

β の値は、材令と断熱温度上昇割合によって変わるものであるが、この式によれば β は後者と等しい値 m によってはほとんど変化しない。したがって、 β は材令のみの函数であり、その値は表-3.8の平均値で示されるものであると考えることができる。換言すれば、表面応力は(3.34)式で与えられ、この値は材令のみの函数である。したがって表面の引張応力によってひび割れが発生するという条件は、コンクリートの引張強度を σ_b によって表わすと、

$$\sigma_b(t) \leq \alpha \beta(t) E(t) T(t)$$

$$\therefore \sigma_b / \alpha E T \leq \beta \quad (3.35)$$

と書くことができる。

この式によれば、コンクリートを弾性体と考えるときには、断熱温度上昇速度に関係なく、水和熱発生による表面ひび割れの危険性は、

$$\sigma_b / \alpha E T$$

なる値の小さいほど大きいことを示している。

以上の議論は弾性体として取り扱っている。コンクリートのクリープを考えたときの応力については第II編で計算値を示すことにし、本節の(4)において一般的に問題と考察することにする。

(3) 型わくを使用するとき

鋼製型わくは熱伝導性が良好でかつ薄いから、前記のように表面温度が気温に等しいと仮定しても大きい誤差を生じない。しかしながら、木製型わくを使用するときには、型わくの断熱作用を考慮に入れて温度分布を計算する必要がある。

(i) 温度計算法

図-3.8の如くにコンクリート表面と外界との間に木製型わく(厚さ δ)の存在するときを考える。木材に対しては W 、コンクリートに対しては C なる添字をつけて表わすと、それぞれの領域における熱伝導の微分方程式は

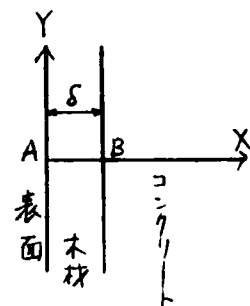
$$\frac{\partial T_c}{\partial t} = a_c \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} + \frac{W_c}{C_c \rho_c}, \quad \frac{\partial T_w}{\partial t} = a_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2}$$

である。境界条件は、

$$x = \delta \text{ にて,}$$

$$\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial x}, \quad T_w = T_c \quad (3.36)$$

図-3.8



打設温度と外界温度は等しいとし、打設温度からの温度上昇のみを考え、表面温度は常に零であるとする、

$$x=0 \text{ にて } T_w = 0$$

また表面温度を規定せずに熱伝達率 α_w を規定すると、

$$x=0 \text{ にて } \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} = \alpha_w T_w$$

以上のような条件によって解を求める代りに、つぎのように簡易化を行なう。いま温度場が定常的であるとすると、板の内面温度を T_w 、外界温度を零とすると、単位時間、単位表面積当りに板を流れる熱量 q は、

$$q = T_w / \left(\frac{\delta}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha_w} \right)$$

ここに $1 / \left(\frac{\delta}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha_w} \right)$ は熱貫流率と呼ばれるものである。¹⁶⁾

非定常温度場においてもこの関係が成立すると、(3.36)の条件より、コンクリート表面において、

$$q = T_c / \left(\frac{\delta}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha_w} \right) = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial x}$$

1. コンクリート表面が温度零度の外界に露出していると考え、Newtonの法則より

$$q = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial x} = \alpha_c T_c$$

この2式を比較すれば、型わくの存在の影響としては、コンクリートの熱伝達率が

$$\alpha_c = 1 / \left(\frac{\delta}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha_w} \right) \quad (3.37)$$

なる値をもっているものと考えればよいことになる。

型わくの厚さは3cm程度であり、松材の用いられることが多い。松材の性質は、

$$\alpha_w = 0.0004 \text{ m}^2/\text{h}, \quad \lambda_w = 0.1 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}, \quad (cp)_w = 250 \text{ kcal/m}^3^\circ\text{C},$$

$$\alpha_w = 8 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$$

くらい (T_c だし 幾分断熱性のよいもの) と考えてよい。これらの値を(3.37)式に入れると、

$\alpha_c = 2.35 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$ という値が得られる。ここでは

$$\alpha_c = 2.67 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C} \quad (3.38) \quad (17)(18)$$

という値を採用することにする。コンクリートと空気との熱伝達率は $5 \sim 25 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$ であるから、型わくの存在によってコンクリート表面はかなり断熱されることわかる。

一次元の熱伝導を考えると、コンクリートの厚さに比べて型枠の厚さが小さいから無視し、図-3.9に示すように、コンクリートを厚さ δ の等間隔に分割する。等分厚の中央面と表面との間に存在する厚さ $\delta/2$ の部分について連続条件を考えてみよう。ただし y 方向は単位長さとする。

時刻 k と $k+1$ との間 Δt 時間 を考えると,

(図) - 3.9

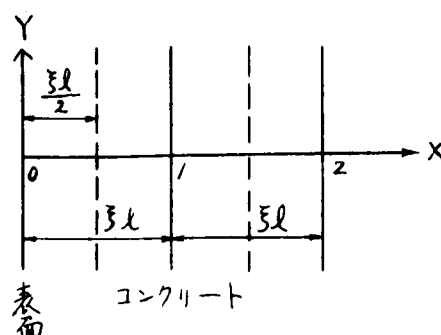
この部分に貯えられる熱量は

$$\alpha \cdot \Delta t (-T_{0,k}) - \lambda \cdot \Delta t (T_{0,k} - T_{1,k}) / \xi l \\ + W \cdot \xi l \cdot \Delta t / 2$$

この熱量によって, Δt 時間後に温度が $T_{0,k+1}$ になったとすると, 上式は

$$C \rho \cdot \xi l (T_{0,k+1} - T_{0,k}) / 2$$

に等しくなればならない。したがって,



$$\frac{1}{2} \frac{C \rho (\xi l)^2}{\Delta t} (T_{0,k+1} - T_{0,k}) = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \xi l \cdot T_{0,k} - (T_{0,k} - T_{1,k}) + \frac{1}{2} \frac{W}{\lambda} (\xi l)^2$$

そこで,

$$f = \frac{\alpha \Delta t}{(\xi l)^2}, \quad n = \frac{\alpha}{\lambda} \xi l, \quad k = \frac{1}{2} \frac{W}{\lambda} (\xi l)^2 / n = \frac{1}{2} \frac{W}{\alpha} \xi l \quad (3.39)$$

とおくと,

$$T_{0,k+1} = \{1 - 2(n+1)f\} T_{0,k} + 2nf T_{1,k} + kf \quad (3.40)$$

となる。この式によって, 順次表面温度を求めることができる。内部の点については先に述べた通りである。

数値計算を行なうときは, α が (3.38) 式で与えられるとし, その他の数値は以前と同様の値とした。ただし

$$m = 0.012/h$$

の場合にかぎった。

(ii) 温度と応力

附図 - II-3.10 に示した結果によれば, 表面温度は次第に増大し, $\tau = 0.01$ ($2l = 15$ のとき) 枚令約 6 日) において最大値 $0.36 T_m$ に達している。この果は K. Hirschfeld の多くの計算結果とよく類似している。このように, α, m, l などの値が多少異なっても, 表面温度の最大値とそれが発生する時期には著しい差が現われない。だいたい枚令 1 週において $0.3 \sim 0.4 T_m$ になるものと考えればよいであろう。

表面における応力ならびに温度と枚令との関係を示したものが表-3.9 である。この表においては, β_1 は (3.33) 式で定義した発熱応力係数であり, β_2 は

$$\beta_2 = (\text{表面温度}) / (\text{断熱温度上昇})$$

で定義される値である。もし枚令 τ において型わくを外し, 表面温度が外気温まで急冷されたときには, 表面応力 σ は

$$\sigma' = (\beta_1 + \beta_2) \alpha E T$$

となる。したがって、型わくを使用する場合には、発熱応力係数 β' とし、

$$\beta' = \beta_1 + \beta_2 \quad (3.41)$$

と採用することにする。

表-3.9 表面における応力、温度および β' (型わくのあるとき)

τ	0.002	0.003	0.005	0.010	0.020	0.100
t (day)	1.17	1.76	2.93	5.86	11.7	58.6
表面応力 ($\alpha E T_m$)	0.122	0.171	0.266	0.420	0.550	0.559
表面温度 (T_m)	0.143	0.197	0.274	0.356	0.338	0.126
β_1	0.43	0.43	0.47	0.52	0.57	0.56
β_2	0.50	0.50	0.48	0.44	0.35	0.18
β'	0.93	0.93	0.95	0.96	0.92	0.70

附図-Ⅱ-3.11には、 $\alpha = 0.004 \text{ m}^2/\text{h}$ 、 $2l = 15 \text{ m}$ の場合について、 β' の値を型わくのないとき (β) と比較して示した。型わくの存置されている期間中では、 β_1 は 0.43 ~ 0.57 αE の範囲内にある。 β_1 は材令が大きくなると漸増し、材令12日頃に最大値を示すが、 β_2 は材令が増加すると減ずる。

(4) クリープの影響を考慮するとき

型わくを外した直後において表面温度は外気温に等しくなると考えると、このときに表面に生ずる応力 σ' は、

$$\sigma' = (\beta_1 + \beta_2) \alpha E T = \beta' \alpha E T$$

によって与えられる。材令2日以上後においては $\beta' > \beta$ である。 $t \rightarrow 0$ においては $\beta' \rightarrow 1$ になるべきであるから、附図-Ⅱ-3.11において、型わくのあるときの材令の若い時期における β' の値にはやや計算誤差が大きい。材令2日以前においても $\beta' > \beta$ であると考えらるべきである。 $\beta' > \beta$ であるから、型わくのないときより型わくのあるときの方が表面の引張応力が大きくなる。したがって後者の方がひび割れの危険性が高い。

材令の若いコンクリートではクリープが大きいので、クリープの影響を考慮とどのようになるかを考察してみよう。第4.4章に示したように、クリープを考慮すると応力と歪との関係が

$\varepsilon = (1/E + \alpha)\sigma$ によって表わされるから、持続弾性係数 E_s として

$$1/E_s = (1/E + \alpha) \quad (3.42)$$

と定義すると、応力と歪との関係は、弾性体と同様に $\sigma = E_s \varepsilon$ の関係によって表わされる。 E_s は材令と載荷継続時間との函数であり、 $E_s < E$ 、かつ同一材令においても載荷継続時間の長いほど E_s の値は小さくなる。

問題としている場合には、 β_2 に関する応力は短期間に発生するものであるから、このときの応力を求めるための弾性係数は近似的にそのときの材令の E を用いればよい。しかし型わくのないときの β 、型わくのあるときの β_1 に対する応力を計算するときには、応力をうけている期間が長いから E_s を用いるべきである。そうすると両者の場合の応力はつぎのようになる。

$$\sigma = \alpha \beta E_s T, \quad (3.43)$$

$$\sigma' = \alpha T (\beta_1 E_s + \beta_2 E) = \alpha T \{ \beta' E_s + \beta_2 (E - E_s) \} > \alpha \beta' E_s T \quad (3.44)$$

ゆえに、

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\beta'}{\beta} + \frac{\beta_2 (E/E_s - 1)}{\beta} > \frac{\beta'}{\beta} \quad (3.45)$$

β'/β はすでに示したように1より大きく、 σ'/σ は β'/β よりもさらに大きくなるから、断熱性の型わくを外したときには、ただ単に β' と β を比較した数値よりも発生応力が大きく、ひび割れ可能性も増大するものであることに注意しなければならない。(3.43)および(3.44)式を用いて、ひび割れ発生条件を示すとつぎの通りである。

$$\sigma_t \leq \alpha T E_s \beta \quad (3.46)$$

$$\sigma_t \leq \alpha T (\beta_1 E_s + \beta_2 E) \quad (3.47)$$

クリープを考えるとどのような応力を呈するかは、第2編 § 2.3 において計算値を示すことにする。

第 4 章

自由な円および八角形板の熱応力状態

・ タムの水平断面はほとんどの場合矩形であるが、中空圧力式タムの頭部の形は八角形（ダイヤモンドヘッド）またはそれに近い形（ラウンドヘッド）である。しかも、この頭部は他の部分と切り離して施工される。そこで、拘束をうけていない八角形板に生ずる熱応力状態を研究する。一般に、八角形の物体の温度ならびに応力状態の解析は困難である。八角形よりさらに角の多くなった極限を考えると円に近い形になる。したがって、八角形板の熱応力状態は、前章で解析した矩形と円（または隋円）との中間にあるものと想像される。そして、円板であれば比較的簡単に応力解析を行なうことができる。

このような考えにより、本章では円ならびに八角形板の熱応力状態を解析し、それらの結果と前章で得た矩形板の熱応力状態とを比較することにする。中空タムの頭部はラウンドヘッドとすることがある。この形では一部分が円弧となっているから、表面のみが急変するような温度状態においては、円板の解を頭部の一部に適用することもできる。なお本章においても、円板の解を平面応力状態にあるものとする。

§ 4.1 表面が急冷される時

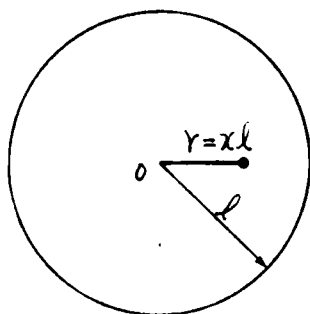
無限に長い矩形板の場合と同じ条件によって、円および八角形板の熱応力状態を解析する。条件はつぎの通りである。

初期条件 : $T = T_0$

境界条件 : $T = 0$

(1) 円板

図-4.1



円の半径を l とするとき、図-4.1 に示す薄い中空の円板において、

$$x = r/l$$

とおいて無次元量 x によって中心からの距離を表わすと、温度分布はつぎのようになる。^{1) 2)}

$$T = 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n J_1(\beta_n)} J_0(\beta_n x) \exp(-\beta_n^2 \tau) \quad (4.1)$$

ここに、 J_n は n 次の Bessel 函数、 β_n は J_0 の根である。このときの温度分布は図表³⁾として示されている。

温度分布がわかると、応力成分は次式によって与えられる⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \alpha E \left(\int_0^1 T x dx - \frac{1}{x^2} \int_0^x T x dx \right) \\ \sigma_\theta &= \alpha E \left(-T + \int_0^1 T x dx + \frac{1}{x^2} \int_0^x T x dx \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

したがって、(4.1)を(4.2)に代入すると、この場合の応力成分は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2\alpha E T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \exp(-\beta_n^2 \tau) \left\{ 1 - \frac{1}{x} \frac{J_1(\beta_n x)}{J_1(\beta_n)} \right\} \\ \sigma_\theta &= 2\alpha E T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \exp(-\beta_n^2 \tau) \left\{ 1 + \frac{1}{x} \frac{J_1(\beta_n x)}{J_1(\beta_n)} - \beta_n \frac{J_0(\beta_n x)}{J_1(\beta_n)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

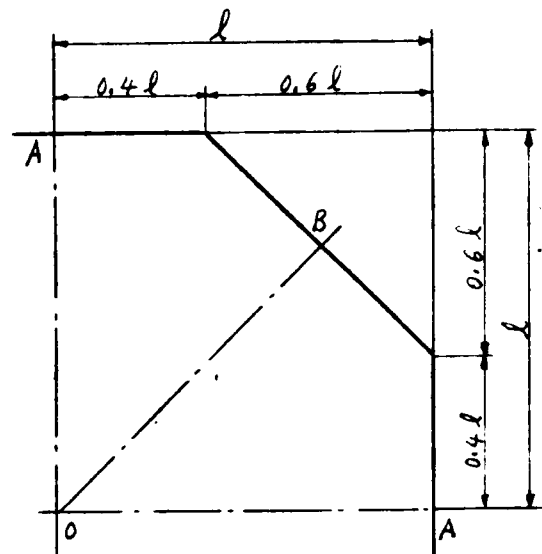
この結果はすでに詳しい表として与えられている^{5) 6)}。いま同量となる σ_θ のみを図示すると、図-4.1の通りである。ただし図では σ_θ を σ として示した。

(2) 八角形板

ダイヤモンドヘッドの事例を参照すると、その形は広範囲にわたって変化する。そこで一般的な傾向を知るために、本章ではすべて図-4.2に示すような形のみを考えることにした。寸法の基準としては $OA=l$ ($x=X/l=1$)とした。八角形の温度ならびに応力状態の解析は困難であるから差分法を用いて解くことにする。図-4.2の形は4本の対称軸があり、正方形の格子を用いても、格子点を境界上に置くことができるので計算に便利であり、正八角形たほとんど類似した形である。

温度分布は格子間隔を $l/10$ として計算し、その結果を用いて $\nabla^2 T$ を求めた。

図-4.2



応力函数を Φ とすると、 Φ は

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\alpha E \nabla^2 T \quad (4.4)$$

を満足しなければならない。⁷⁾⁸⁾ 境界は自由端であるから、 Φ の境界条件は、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \Phi = 0 \quad (4.5)$$

である。⁹⁾¹⁰⁾ ここに、 n は境界に直交する方向である。差分法によって解くときには、格子間隔を $h/5$ とした。 Φ が求まればこれを2回微分する(差分式に直して実施)と応力成分が求められる。

図-4.2における断面OAにおける温度および直応力の大きさを、図-Ⅱ・4.1に円板の場合と比較して示した。これらの結果を、図-Ⅱ・3.7に示した無限に長い矩形の場合ととに比較すると、温度分布は、時間 t の小さいときにはよく一致しているが、 t が大きくなると無限長の矩形では幾分内部の冷却速度が遅くなる。応力で最も問題になるのは表面における引張応力である。これを各時刻について比較すると表-4.1のような結果が得られる。

表-4.1 急冷されたときの表面応力の比較 ($\alpha E T_0$)

t		0.005	0.010	0.020	0.040
t (day)		2.93	5.86	11.7	23.4
無限長の矩形		0.920	0.884	0.836	0.773
八角形板		0.788	0.818	0.752	0.655
円板		0.846	0.785	0.701	0.590
比率	八角/帯	0.86	0.93	0.90	0.85
	円/帯	0.91	0.89	0.84	0.76

この表では前と同様に $Q=0.004 \text{ m}^2/\text{h}$, $2l=15 \text{ m}$ としたときの実際の時刻をも示した。この表より明らかなように、時刻が経過するにつれて、形によって表面応力に差が現われる。無限長の矩形が最も表面応力が大きい。つぎに八角形板の表面応力が大きい。この小さいときには、この表の値は必ずしもそうではないのは、差分法を適用したための誤差が現われていると考えるべきである。差分法によっては、表面附近の急激な応力変化のある部分では正確な応力を求めることが困難である。

以上の結果を通覧すると、表面が急冷されるときに初期期においては、形の差による応力の差は比較的小さく、無限長の矩形の表面応力が最大である。したがって、複雑な形のとき

には、近似的には最も簡単に応力を求めることができる無限長の矩形の応力状態で代用することができ、その値は安全側である。一方、危険側の極値を求めようとするれば円板の解を用いなければならない。無限長の矩形と円板との表面応力の差は、6日後において約11%、12日後において約16%である。

§ 4.2 一様な割合で発熱するとき

前節では非常に急激な温度変化を受けるときを考えたので、本節ではその逆に定常状態にあるときを考える。その例として、場所的にも時間的にも一定な発熱割合 W があり、表面温度は零であって定常状態に達しているときを考える。このときの温度に対する微分方程式は、おどし示しのように、

$$\nabla^2 T + W/\lambda = 0$$

である。

(1) 無限に長い矩形板

まず、比較の基準として、矩形板が非常に長くて無限に長い幅が $2l$ の帯状の物体と考えてよい場合をとりあげる。そうすると温度場は一次元となり、

$$T = (W/2\lambda) l^2 (1 - x^2) \quad (4.6)$$

となる。一方向平均温度 \bar{T} は、

$$\bar{T} = \int_0^1 T dx = \frac{Wl^2}{3\lambda}$$

したがって、軸応力 σ は、

$$\sigma = -\alpha E (T - \bar{T}) = -\alpha E (W/6\lambda) l^2 (1 - 3x^2) \quad (4.7)$$

(2) 円板

図-4.1と同様に半径 l の円板とすると、つぎの結果がえられる

$$T = (W/4\lambda) l^2 (1 - x^2) \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\alpha E (W/16\lambda) l^2 (1 - x^2) \\ \sigma_\theta &= -\alpha E (W/16\lambda) l^2 (1 - 3x^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

これらの結果を無限長の矩形板の場合と比較すると、円板においては、温度は $1/2$ であり、 σ_θ は無限長の矩形板の軸応力 σ の $3/8$ 倍にしか達しないことがわかる。

(3) 八角形板

八角形板としては、すでに述べたように図-4.2の形とし、差分法によって応力を求めた。この場合には、本節の始めに示したように $\nabla^2 T$ は $-W/h$ に等しくて既知であるから、直ちに (4.4) 式を書くことができる。

以上の結果をまとめると附図-Ⅱ.4.2の通りになる。図における σ は、無限長の矩形板に対しては軸応力、円板に対しては σ_{θ} 、八角形板に対しては断面 OA における直応力である。さらに述べたように円板の応力は無限長の矩形板の場合の $3/8$ 倍であり、八角形板の応力はこの両者の中間の値をとる。差分法によった結果は、この場合でも表面近くでやや不正確であるが、明らかに円板と矩形板との間の値を示している。

この例のように定常状態にあつて、内部まで温度が変わっているときには、前節の例と違って形による応力差が著しい。したがって熱応力の大小、熱応力による危険性などは形によってのみ決まるのではなく、温度条件が密接な関係を持っている。

§ 4.3 水素熱の発生するとき

矩形板に対して § 3.7 で示したものと同様な仮定によつて、水素熱が発生したときの円板および八角形板の熱応力状態を解析する。

(1) 円板

いま初期温度は $T=T_0$ (一定)、境界条件は $T=0$ のときの解を $T_0 \theta(r, t)$ とおくと、これは (4.1) 式によつて与えられている。時刻 K における発熱による温度上昇割合 (r は無次元) を $\frac{dT(K)}{dK}$ とすると、この発熱が dK 時間続いたときの時刻 t における温度変化は

$$\frac{dT(K)}{dK} \theta(r, t-K) dK$$

である。したがつて、時刻 t における温度分布はつぎのようになる。

$$T = \int_0^t \frac{dT(K)}{dK} \theta(r, t-K) dK \quad (4.10)$$

そこで、 $\frac{dT(K)}{dK}$ として (3.25) 式を、 θ として (4.1) 式を用いるとつぎの結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} T &= 2m T_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(\beta_n/l)^2 - m} \cdot \frac{J_0(\beta_n x/l)}{\beta_n J_1(\beta_n)} (e^{-mt} - e^{-\alpha(\beta_n/l)^2 t}) \\ &= 2m' T_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2 - m'} \frac{J_0(\beta_n x)}{\beta_n J_1(\beta_n)} \exp(-\beta_n^2 \tau) [\exp\{(\beta_n^2 - m')\tau\} - 1] \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

温度分布はこれと少し異った形に書(こともできる。¹¹⁾ なお、種々な条件に対する温度分布を求めようとする、K. Hirschfeld の求めた図表¹²⁾を利用することができる。

温度分布が得られると、同様に σ を求めることができる。その結果はつぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2m' \alpha E T_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2(\beta_n^2 - m')} \left\{ 1 - \frac{1}{x} \frac{J_1(\beta_n x)}{J_1(\beta_n)} \right\} \exp(-\beta_n^2 \tau) [\exp\{(\beta_n^2 - m')\tau\} - 1], \\ \sigma_\theta &= 2m' \alpha E T_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2(\beta_n^2 - m')} \left\{ 1 + \frac{1}{x} \frac{J_1(\beta_n x)}{J_1(\beta_n)} - \beta_n \frac{J_0(\beta_n x)}{J_1(\beta_n)} \right\} \\ &\quad \times \exp(-\beta_n^2 \tau) [\exp\{(\beta_n^2 - m')\tau\} - 1] \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$m=0.012/h$ として計算した結果は附図-Ⅱ・4.3 に示す通りである。ただし、 σ_θ が問題となるから、図ではこれを σ として示した。表面応力が最大となるのは、附図-Ⅱ・3.7 に考げた無限に長い矩形の場合と同様に $\tau=0.02$ 附近であるが、一般に円板の方が応力は小さい。

(2) 八角形板

厳密な解析は困難であるから、いままでと同様に差分法を適用することにした。格子間隔は §4.1 と同様にとる。温度の微分方程式を、一次元に対する差分式に直せば(3.31)式に示す通りであり、これを二次元温度場に適用して、 σ の温度分布 $T(x, y, t)$ を求める。

つぎに、やはり差分式によって $\nabla^2 T(x, y, t)$ を求め、(4.4) および (4.5) 式を差分式で表わして応力函数 σ を求めた。 σ が決定されると、これを微分することによって応力が得られる。

数値計算に際しては円板の場合と同様に $m=0.012/h$ とした。附図-Ⅱ・4.4 および Ⅱ・4.5 には、例として $\tau=0.01$ における温度、および応力成分を示した。この程度の材令では内部まで冷却されることなく、表面近くで温度変化が大きいため、応力も表面のみが大きくなっている。

断面 OA における温度分布ならびに直応力 σ_r は附図-Ⅱ・4.3 において円板と比較して示した。この場合においても、 τ が小さい間は表面の応力変化が大きいため、正確な値は得られず円板の応力よりも小さくなっている。全般の応力状態は、表面が急冷されるときと同様に無限長の矩形板(附図-Ⅱ・3.9)、八角形板ならびに円板において非常に類似しており、上記の順に発生応力は小さくなる。表-4.2 においては

表 4.2 水和熱の発生による表面応力の比較 ($\alpha E T_m$)

τ		0.005	0.010	0.020	0.040
t (day)		2.93	5.86	11.7	23.4
無限長の矩形		0.920	0.884	0.836	0.773
八角形板		0.788	0.818	0.752	0.655
円板		0.846	0.785	0.201	0.590
比率	八角/帯	0.86	0.93	0.90	0.85
	円/帯	0.91	0.89	0.84	0.76

$a=0.004 \text{ m}^2/\text{h}$, $2l=15 \text{ m}$ として、表面応力を比較したものである。無限長の矩形板と円板においては、それぞれ3日および6日における応力差が9%および14%程にすぎず、八角形板においては、ここで述べたような精度の解析では満足な応力値は得られまい。したがって、このような条件に際しては、八角形板の熱応力の解析には、簡単に無限長の矩形板の角解で代用し、幾分安全側の値を採用してもよい。もう少し精度を向上するには、第2章で示したように矩形板の長さの及ぼす影響を考慮に入れればよいわけである。一オ円板の解を参照すると応力の下限がわかる。かなりの時間が経過してからの近似的な値を求めるには、無限に長い矩形板と円板との応力の平均を採用すればよい。

大森川ダム⁽¹³⁾や河本ダムのダイヤモンドヘッドに対して、水和熱の発生時における熱応力状態を差分法によって計算された結果を参照しても、以上に述べた結果が現われている。

なお、解析の困難な多角形における表面応力の正しい値を求める必要はない場合、たとえば、内部の応力の分布、表面応力と寸法との関係、様々な点の応力の経過、温度変動状況の及ぼす影響などを知りたいときには、熱応力や温度場の解析に際して、一般的な傾向を正確に知ることができればよいわけである。このようなときには、多角形をこれと等価な円⁽¹⁴⁾に直して解析を行えば便利である。

第 5 章

一辺が固定された矩形板の熱応力状態

拘束をうけていない弾性体が直線的な温度変化をうけるときには、その弾性体には熱応力が生じない。しかしながら、弾性体が部分的にでも他の物体によって拘束されているときには、直線的な温度変化をうけるときにおいても熱応力が発生する。

ダムにおいては、新しく打設した層が古いコンクリートによって拘束される場合とか、1つのブロック全体が岩盤によって拘束される場合など、基本的には一辺が固定された固体系に近いブロックの熱応力状態を知る必要がある。そこで、これらの場合における鉛直断面を考えて二次元的に取り扱い、本章では茲に矩形板がその一辺において完全に固定されているときに生ずる熱応力状態を近似的に解析する。固定辺における拘束の影響を調べるために、矩形板が主として直線的な温度変化をうける場合を考え、さらに矩形板が非直線的な温度変化をうける場合についても解析を行なった。

§ 5.1 解析方法

一辺を固定された矩形板の応力解析においても、第2章で述べたような各種の解析法を適用することができる。ここでは、計算が比較的容易で精度もかなり良好な方法として、第2章で示したように応力函数を $\Phi = \sum f_n(x) g_n(y)$ の形で表わし、 $f_n(x)$ としては self-equilibrating ortho-normal polynomial を用い、歪エネルギー最小の原理によって変分原理にもとづいて $g_n(y)$ を決定することにする。

(1) 応力函数

図-5.1 に示すように、矩形板は辺 AD において固定され、固定辺の長さ $2l=2$ 、高さ $2h$ 、厚さは d とする。直角座標の原点は固定辺の中央に置き、固定辺に沿って x 軸、これに直交して y 軸をとる。矩形の温度上昇 $T(x, y)$ は矩形板のみに生じ、厚さ方向には一定であり、矩形板は平面応力状態を呈するものと仮定する。

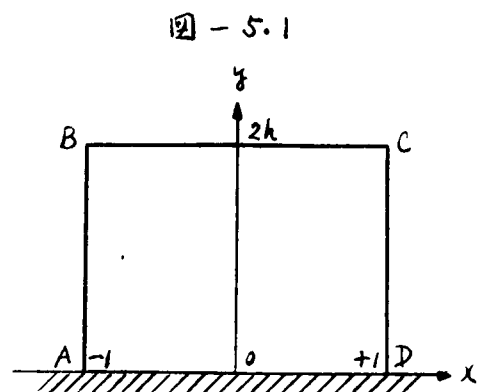
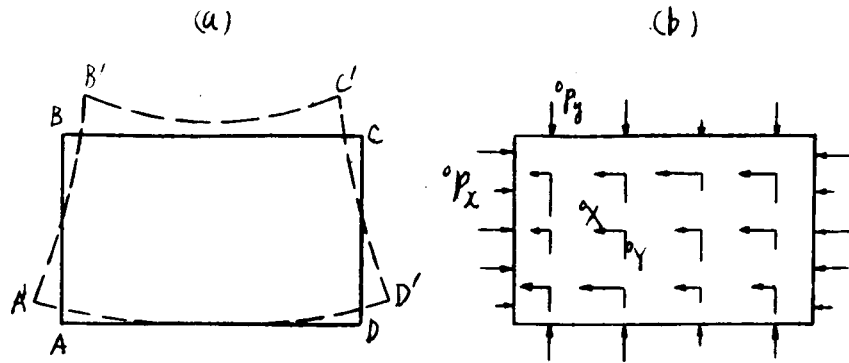


図-5.2



矩形板を辺ADにおいて切断したとすると、矩形板は $T(x, y)$ によって自由に変形し、図-5.2(a)に示すように、変形後は $A'B'C'D'$ のような形になる。このように変形した矩形を元の形に戻すためには、(1.50)式に示したように矩形板ABCDに、

$$\sigma_x = \sigma_y = -\alpha ET / (1-\nu), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (5.1)$$

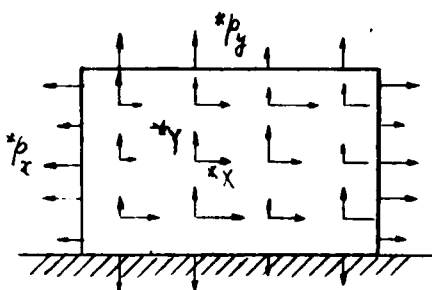
なる応力を生ぜしめる必要がある。このためには、矩形板には(1.40)式で示したような力(ただしこの式は平面応力状態に対するものではない)を加える必要がある。この状態は図-5.2(b)に示す。そうすると矩形板は無歪の状態になり形だけはもとに戻るが、このために加えた力は現実には存在していないものである。したがってこれらの力を打消すためには、図-5.1に示すように辺ADを固定した状態において、(1.51)式に示したように、

$$\left. \begin{aligned} x = \pm l \quad \text{にて,} \quad & {}^*p_x = \alpha ET / (1-\nu), \\ y = 0 \text{ および } y = 2h \quad \text{にて,} \quad & {}^*p_y = \alpha ET / (1-\nu), \\ & {}^*X = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha ET}{1-\nu} \right), \\ & {}^*Y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha ET}{1-\nu} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

なる力を作用させた状態の応力を求めて、(5.1)式の応力と重ね合わせなければならない。

(5.2)式の力が加わった状態は図-5.3に示す通りである。

図-5.3



矩形板に生ずる真の応力は、すでに(5.1)式によって与えられている応力と、(5.2)式の力によって生ずる応力との和である。したがって(5.2)式の力が作用したときの応力状態、すなわち附加応力のみを解析すればよい。この附加応力に対する応力函数はつぎのようにして近似的に決定される。

(5.2)式における ${}^*X, {}^*Y$ は1つのポテンシャルに

よって導かれている。このポテンシャルを $\Omega(x, y)$ と置くと、

$$^*X = -\frac{\partial \Omega(x, y)}{\partial x}, \quad ^*Y = -\frac{\partial \Omega(x, y)}{\partial y} \quad (5.3a)$$

ここに、

$$\Omega(x, y) = \alpha ET / (1-\nu) \quad (5.3b)$$

応力函数は、

$$\Phi(x, y) = \phi(x, y) + \sum_n f_n(x) g_n(y), \quad (5.4)$$

のように2つの項よりなるものとする。そうすると応力成分はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \Phi_{yy} + \Omega = \phi_{yy}(x, y) + \Omega(x, y) + \sum_n f_n(x) g_n''(y), \\ \sigma_y &= \Phi_{xx} + \Omega = \phi_{xx}(x, y) + \Omega(x, y) + \sum_n f_n''(x) g_n(y), \\ \tau_{xy} &= -\Phi_{xy} = -\phi_{xy}(x, y) - \sum_n f_n'(x) g_n'(y) \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

応力函数 $\Phi(x, y)$ の第1項 $\phi(x, y)$ は、 ϕ と Ω による応力が矩形板の3つの自由辺 AB, BC および CD における応力の境界条件

$$\left. \begin{aligned} ^*\sigma_x|_{x=\pm 1} &= \phi_{yy}(\pm 1, y) + \Omega(\pm 1, y) = \alpha ET / (1-\nu), \\ ^*\tau_{xy}|_{x=\pm 1} &= -\phi_{xy}(\pm 1, y) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.6a)$$

$$\left. \begin{aligned} ^*\sigma_y|_{y=2h} &= \phi_{xx}(x, 2h) + \Omega(x, 2h) = \alpha ET / (1-\nu), \\ ^*\tau_{xy}|_{y=2h} &= -\phi_{xy}(x, 2h) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.6b)$$

を満足するように選ぶ。ただし、このようにして定められた ϕ と Ω によって、応力函数の微分方程式

$$\Delta \Delta \Phi(x, y) + (1-\nu) \Delta \Omega(x, y) = 0 \quad (5.7)$$

は必ずしも満足しなくてもよいものとする。すなわち、一般的には、

$$\Delta \Delta \phi(x, y) + (1-\nu) \Delta \Omega(x, y) \neq 0$$

とする。

3つの自由辺 AB, BC および CD における境界条件はすでに満足されているから、応力函数 (5.4) の最後の項 $\sum_n f_n(x) g_n(y)$ は、これらの3辺においてつぎの境界条件が成立するように選ばなければならぬ。

$$^*\sigma_x|_{x=\pm 1} = \sum_n f_n(\pm 1) g_n''(y) = 0, \quad \tau_{xy}|_{x=\pm 1} = -\sum_n f_n'(\pm 1) g_n'(y) = 0, \quad (5.8a)$$

$$^*\sigma_y|_{y=2h} = \sum_n f_n''(x) g_n(2h) = 0, \quad \tau_{xy}|_{y=2h} = -\sum_n f_n'(x) g_n'(2h) = 0. \quad (5.8b)$$

(5.8a) 式の条件は (2.4a) 式と同じであらう、 $f_n(x)$ としては第2章で述べた通り、表-2.1 の self-equilibrating ortho-normal polynomial を用いれば、この条件は満足

される。また(2.6)の条件式も成立する。

$\phi(x, y)$ は(5.6)式の条件を満足するように決定し、 $f_n(x)$ としては表-2.2の多項式を用いると、矩形板の2辺ABおよびCDにおける境界条件はすべて満足される。いゝも *self-equilibrating condition* (2.6) および境界条件は級数 $\sum f_n(x)g_n(y)$ 全体によってはじめて満足されるのではなく、それを構成する各項によってそれぞれ独立して満足されている。

応力函数に対する微分方程式(5.7)、BC辺における境界条件(5.8a)式および固定辺ADにおける条件式はまだ満足されていない。応力函数中に含まれている未知函数は $g_n(y)$ のみである。境界条件(5.8a)を正確に満足し、微分方程式(5.7)および固定辺ADにおける境界条件式を近似的に満足する函数 $g_n(y)$ は、歪エネルギー最小の原理を適用することによって、求めることができる。

(2) 歪エネルギー最小の原理の適用、変分法

第2章で述べたのと同様に、(2.8)式中の応力成分を(5.5)式によって応力函数で表わすと、(2.8)式はつぎのようになる。

$$\frac{\pi}{d} \delta W = \int_0^{2h} \int_{-1}^1 \left\{ (\bar{\sigma}_{yy} + \Omega) \delta \bar{\sigma}_{yy} + (\bar{\sigma}_{xx} + \Omega) \delta \bar{\sigma}_{xx} - \nu (\bar{\sigma}_{xx} + \Omega) \delta \bar{\sigma}_{yy} - \nu (\bar{\sigma}_{yy} + \Omega) \delta \bar{\sigma}_{xx} + 2(1+\nu) \bar{\sigma}_{xy} \delta \bar{\sigma}_{xy} \right\} dx dy = 0$$

この式の右辺に部分積分を2回繰り返すと、

$$\begin{aligned} & \int_0^{2h} \int_{-1}^1 \left\{ \Delta \Delta \bar{\sigma} + (1-\nu) \Delta \Omega \right\} \delta \bar{\sigma} dx dy \\ & - \int_0^{2h} \left(\left\{ \bar{\sigma}_{xxx} + (2+\nu) \bar{\sigma}_{xyy} + (1-\nu) \Omega_x \right\} \delta \bar{\sigma} - \left\{ \bar{\sigma}_{xx} - \nu \bar{\sigma}_{yy} + (1-\nu) \Omega \right\} \delta \bar{\sigma}_x \right) \Big|_{x=-1}^{x=1} dy \\ & - \int_{-1}^1 \left(\left\{ \bar{\sigma}_{yyy} + (2+\nu) \bar{\sigma}_{xxy} + (1-\nu) \Omega_y \right\} \delta \bar{\sigma} - \left\{ \bar{\sigma}_{yy} - \nu \bar{\sigma}_{xx} + (1-\nu) \Omega \right\} \delta \bar{\sigma}_y \right) \Big|_{y=0}^{y=2h} dx \\ & + 2(1+\nu) \left\{ \bar{\sigma}_{xy} \delta \bar{\sigma} \right\}_{x=-1}^{x=1} \Big|_{y=0}^{y=2h} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

$x = \pm 1$ において $\bar{\sigma}_x$ および $\bar{\tau}_{xy}$ が規定されており、また $y = 2h$ では $\bar{\sigma}_y$ および $\bar{\tau}_{xy}$ が規定されているから、(5.9)式はつぎのようになる。

$$\int_0^{2h} \int_{-1}^1 \left\{ \Delta \Delta \bar{\sigma} + (1-\nu) \Delta \Omega \right\} \delta \bar{\sigma} dx dy$$

$$+ \int_{-1}^1 \left\{ \{ \Phi_{y y y} + (2+\nu) \Phi_{x x y} + (1-\nu) \Omega_y \} \delta \Phi - \{ \Phi_{y y} - \nu \Phi_{x x} + (1-\nu) \Omega \} \delta \Phi_y \right\}_{y=0} dx$$

= 0

(5.10)

右辺の函数の中でまだ規定されていないのは $g_n(y)$ のみであるから, (5.10) 式を詳しく書くと,

$$\int_0^{2h} \int_{-1}^1 \left\{ \Delta \Delta \Phi(x, y) + (1-\nu) \Delta \Omega(x, y) + \sum_n f_n^{(iv)}(x) g_n(y) + 2 \sum_n f_n''(x) g_n''(y) + \sum_n f_n(x) g_n^{(iv)}(y) \right\} \sum_i f_i(x) \delta g_i(y) dx dy$$

$$+ \int_{-1}^1 \left\{ \Phi_{y y y}(x, 0) + (2+\nu) \Phi_{x x y}(x, 0) + (1-\nu) \Omega_y(x, 0) + \sum_n f_n(x) g_n''(0) + (2+\nu) \sum_n f_n''(x) g_n'(0) \right\} \sum_i f_i(x) \delta g_i(0) dx$$

$$- \int_{-1}^1 \left\{ \Phi_{y y}(x, 0) - \nu \Phi_{x x}(x, 0) + (1-\nu) \Omega(x, 0) + \sum_n f_n(x) g_n''(0) - \nu \sum_n f_n''(x) g_n(0) \right\} \sum_i f_i(x) \delta g_i'(0) dx$$

= 0

($i = 2, 3, \dots, n$)

δg_i および $\delta g_i'$ は任意の値をとりうるから, 上式が成立するためにはつぎの条件が満足されなければならない。

$$\int_{-1}^1 \left\{ \Delta \Delta \Phi(x, y) + (1-\nu) \Delta \Omega(x, y) + \sum_n f_n^{(iv)}(x) g_n(y) + 2 \sum_n f_n''(x) g_n''(y) + \sum_n f_n(x) g_n^{(iv)}(y) \right\} \sum_i f_i(x) dx = 0,$$

($i = 2, 3, \dots, n$) (5.11)

$$\int_{-1}^1 \left\{ \Phi_{y y y}(x, 0) + (2+\nu) \Phi_{x x y}(x, 0) + (1-\nu) \Omega_y(x, 0) + \sum_n f_n(x) g_n''(0) + (2+\nu) \sum_n f_n''(x) g_n'(0) \right\} \sum_i f_i(x) dx = 0,$$

($i = 2, 3, \dots, n$) (5.12a)

$$\int_{-1}^1 \left\{ \Phi_{y y}(x, 0) - \nu \Phi_{x x}(x, 0) + (1-\nu) \Omega(x, 0) + \sum_n f_n(x) g_n''(0) - \nu \sum_n f_n''(x) g_n(0) \right\} \sum_i f_i(x) dx = 0$$

($i = 2, 3, \dots, n$) (5.12b)

$f_n(x)$ は直交正規函数であるから, 前と同様に,

$$(f_n^{(p)}, f_i^{(q)}) \equiv \int_{-1}^1 f_n^{(p)}(x) f_i^{(q)}(x) dx$$

と書き表わすと, (5.11) および (5.12) 式はつぎのように書ける。

$$g_n^{(iv)}(y) - 2 \sum_n (f_n', f_i') g_n''(y) + \sum_n (f_n'', f_i'') g_n(y) = - \int_{-1}^1 \left\{ \Delta \Delta \Phi(x, y) + (1-\nu) \Delta \Omega \right\} f_i(x) dx,$$

($i = 2, 3, \dots, n$) (5.13)

$$g_n''(0) - (2+\nu) \sum_n (f_n', f_i') g_n'(0) = - \int_{-1}^1 \left\{ \Phi_{y y y}(x, 0) + (2+\nu) \Phi_{x x y}(x, 0) + (1-\nu) \Omega_y(x, 0) \right\} f_i(x) dx,$$

(5.14a)

$$g_n''(0) + \nu \sum_n (f_n', f_i') g_n(0) = - \int_{-1}^1 \left\{ \Phi_{y y}(x, 0) - \nu \Phi_{x x}(x, 0) + (1-\nu) \Omega(x, 0) \right\} f_i(x) dx,$$

($i = 2, 3, \dots, n$) (5.14b)

(5.13) 式は Euler の微分方程式であり, (5.14a) および (5.14b) 式は自然境界条件式である。この自然境界条件は, いままでに考慮していなかった固定端における境界条件, すなわち

固定面においては変位を正にないという境界条件であって、未知函数 $g_n(y)$ に対する $y=0$ における境界条件を与えるものである。 $g_n(y)$ を定めるためにはさらに2組の境界条件式が必要である。この条件式はすでに示した境界条件式 (5.8b) である。

ここで、 n がい のときには、近似的に

$$(f'_n, f'_i) = (f''_n, f''_i) = 0$$

と仮定して、これらの係数を含む項を省略すると、(5.13) および (5.14) 式はつぎのようになる。

$$g_n^{(4)}(y) - 2(f'_n, f'_n)g_n''(y) + (f''_n, f''_n)g_n(y) = - \int_{-1}^1 \{ \Delta \phi(x, y) + (1-\nu) \Delta \Omega(x, y) \} f_n(x) dx, \quad (n=2, 3, \dots, n) \quad (5.15)$$

$$g_n'''(0) - (2+\nu)(f'_n, f'_n)g_n'(0) = - \int_{-1}^1 \{ \phi_{yy}(x, 0) + (2+\nu)\phi_{xx}(x, 0) + (1-\nu)\Omega_y(x, 0) \} f_n(x) dx, \quad (5.16a)$$

$$g_n''(0) + \nu(f'_n, f'_n)g_n(0) = - \int_{-1}^1 \{ \phi_{yy}(x, 0) - \nu\phi_{xx}(x, 0) + (1-\nu)\Omega(x, 0) \} f_n(x) dx, \quad (n=2, 3, \dots, n) \quad (5.16b)$$

(f'_n, f'_i) および (f''_n, f''_i) の値はすでに表-2.3 に示した通りである。

(3) 未知函数 $g_n(y)$ の決定

(5.15) 式は常微分係数の四階常微分方程式であるから、(5.15) 式の右辺を零とおいた同次方程式の一般解を $g_{on}(y)$ とおくと、

$$g_{on}(y) = e^{-\alpha_n y} (A_n \cos \beta_n y + B_n \sin \beta_n y) + e^{\alpha_n y} (C_n \cos \beta_n y + D_n \sin \beta_n y) \quad (5.17)$$

と書くことができる。したがって (5.15) 式の特殊解を $G_n(y)$ とすると、(5.15) 式の一般解は、

$$g_n(y) = g_{on}(y) + G_n(y) = e^{-\alpha_n y} (A_n \cos \beta_n y + B_n \sin \beta_n y) + e^{\alpha_n y} (C_n \cos \beta_n y + D_n \sin \beta_n y) + G_n(y) \quad (5.18)$$

α_n および β_n の値は表-2.4 に示したものと全く同じである。また A_n, B_n, C_n および D_n は境界条件より決定される常数である。

(5.18) 式を (5.16) 式に代入すると、常数 A_n, B_n, C_n および D_n に関するつぎの2つの条件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & -\alpha_n \{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) - (f'_n, f'_n)(2+\nu) \} A_n + \beta_n \{ (3\alpha_n^2 - \beta_n^2) - (f'_n, f'_n)(2+\nu) \} B_n \\ & + \alpha_n \{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) - (f'_n, f'_n)(2+\nu) \} C_n + \beta_n \{ (3\alpha_n^2 - \beta_n^2) - (f'_n, f'_n)(2+\nu) \} D_n = -K_n, \\ & \{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) + (f'_n, f'_n)\nu \} A_n - 2\alpha_n \beta_n B_n + \{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) + (f'_n, f'_n)\nu \} C_n + 2\alpha_n \beta_n D_n = -L_n \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

ここに、

$$K_n = g_n'''(0) - 2(1+\nu)(f'_n, f'_n)G_n'(0) + \int_{-1}^1 \{ \phi_{yy}(x, 0) + (2+\nu)\phi_{xx}(x, 0) + (1-\nu)\Omega(x, 0) \} f_n(x) dx$$

$$L_n = (T_n''(0) + \nu(f_n', f_n') T_n(0) + \int_{-1}^1 \{ \phi_{yy}(x, 0) - \nu \phi_{xx}(x, 0) + (1-\nu) \Omega(x, 0) \} f_n(x) dx) \quad (5.20)$$

また (5.8b) 式より

$$g_n(2h) = g_n'(2h) = 0$$

となる必要があるから、 $y=2h$ における境界条件として次式が成立する。

$$\begin{aligned} & (e^{-2\alpha_n h} \cos 2\beta_n h) A_n + (e^{-2\alpha_n h} \sin 2\beta_n h) B_n + (e^{2\alpha_n h} \cos 2\beta_n h) C_n + (e^{2\alpha_n h} \sin 2\beta_n h) D_n = -G_n(2h) \\ & -e^{-2\alpha_n h} (\alpha_n \cos 2\beta_n h + \beta_n \sin 2\beta_n h) A_n - e^{-2\alpha_n h} (\alpha_n \sin 2\beta_n h - \beta_n \cos 2\beta_n h) B_n \\ & + e^{2\alpha_n h} (\alpha_n \cos 2\beta_n h - \beta_n \sin 2\beta_n h) C_n + e^{2\alpha_n h} (\alpha_n \sin 2\beta_n h + \beta_n \cos 2\beta_n h) D_n = -G_n'(2h) \end{aligned} \quad (5.21)$$

これらの境界条件 (5.19) および (5.21) 式より、4組の定数を決定することができる。これに (5.1) 式の応力を加えると、集の応力はつぎの通りになる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_n f_n(x) \left\{ e^{-\alpha_n y} \{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) A_n - 2\alpha_n \beta_n B_n \} \cos \beta_n y + \{ 2\alpha_n \beta_n A_n + (\alpha_n^2 - \beta_n^2) B_n \} \sin \beta_n y \right. \\ & \quad \left. + e^{\alpha_n y} \{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) C_n + 2\alpha_n \beta_n D_n \} \cos \beta_n y + \{ -2\alpha_n \beta_n C_n + (\alpha_n^2 - \beta_n^2) D_n \} \sin \beta_n y + G_n''(y) \right\}, \\ \sigma_y &= \sum_n f_n''(x) \{ e^{-\alpha_n y} (A_n \cos \beta_n y + B_n \sin \beta_n y) + e^{\alpha_n y} (C_n \cos \beta_n y + D_n \sin \beta_n y) + G_n(y) \}, \\ \tau_{xy} &= -\sum_n f_n'(x) \left\{ e^{-\alpha_n y} \{ (-\alpha_n A_n + \beta_n B_n) \cos \beta_n y + (-\beta_n A_n - \alpha_n B_n) \sin \beta_n y \} \right. \\ & \quad \left. + e^{\alpha_n y} \{ (\alpha_n C_n + \beta_n D_n) \cos \beta_n y + (-\beta_n C_n + \alpha_n D_n) \sin \beta_n y \} + G_n'(y) \right\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

もし矩形板が無限に高く、 $2h = \infty$ であるときには、(5.17) および (5.18) 式において $e^{\alpha_n y}$ の項を省略することができ、境界条件 (5.21) 式は不要になる。この結果はつぎの通りである。

$$\begin{aligned} g_n(y) &= g_{on}(y) + G_n(y) \\ &= e^{-\alpha_n y} (A_n \cos \beta_n y + B_n \sin \beta_n y) + G_n(y) \end{aligned} \quad (5.23)$$

A_n および B_n に対する境界条件式は、

$$\begin{aligned} & -\alpha_n \{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) - (f_n', f_n')(2+\nu) \} A_n + \beta_n \{ (3\alpha_n^2 - \beta_n^2) - (f_n', f_n')(2+\nu) \} B_n = -K_n, \\ & \{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) + (f_n', f_n')\nu \} A_n - 2\alpha_n \beta_n B_n = -L_n \end{aligned} \quad (5.24)$$

§ 5.2 直線的な分布の温度上昇をうけるときの取り扱い方

本節では先に矩形板に生ずる温度上昇が、

$$T = T_0(ax + by + c) \quad (5.25)$$

なる一次式で表わされる場合のみを考えてみることにする。この場合には、拘束されていない矩形板中において、最初直線であったものは温度変化をうけた後においても直線を保っている。

図-5.2(a) において矩形板に (5.25) 式の温度変化が生じた場合、その矩形板が辺 AD において切り離されているとすると、

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \alpha T = \alpha T_0 (a + bx + cy),$$

なる歪を生ずる。このときに、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\alpha ET = -\alpha ET_0 (a + bx + cy), \\ \sigma_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

なる応力を与えたとき (図-5.2(b)), 歪は

$$\varepsilon_x' = 0$$

$$\varepsilon_y = (1+\nu)\alpha T = (1+\nu)\alpha T_0 (a + bx + cy)$$

となる。このとき断面 $y=0$ における x および y 方向の変位は、それぞれ、

$$u = a', \quad v = b' + c'x$$

なる形に書き表わすことができる。ここに、 u, v はそれぞれ x 方向および y 方向の変位成分である。すなわち、 $y=0$ なる断面における x 方向の変位は一定値、 y 方向の変位は一次式となる。したがって、辺 AD の長さは最初の値に等しく、かつ直線を保っている。

つぎには、この状態において矩形の辺 AD を固定し、(5.26)式の応力を生ぜしめるのに要する力と大きさ等しく向きが反対の力を矩形に作用させた状態を考えよう。このときに加えるべき力はつぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \alpha ET = \alpha ET_0 (a + bx + cy), \quad (x = \pm 1 \text{ にて}) \\ p_y &= 0 \\ X - \frac{\partial}{\partial x} (\alpha ET) &= -\alpha ET_0 b, \quad Y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

これらの結果を (5.1) および (5.2) 式と比較すると、 $\sigma_y = p_y = Y = 0$ となっている。またこの場合には、

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \alpha ET_0 \left\{ (a/2)y^2 - (b/6)x^3 + (c/6)y^3 \right\}, \\ \Omega &= \alpha ET_0 bx \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

とおくことができる。したがって、

$$\Delta \Delta \phi(x, y) + (1-\nu) \Delta \Omega(x, y) = 0$$

が成立する。ゆえに $g_n(y)$ に対する微分方程式 (3.11) の右辺は零になり、(5.18) および (5.23) 式において、

$$G_{Tn}(y) = 0$$

となる。

真の応力を求めるには、(5.26)式の応力と辺 AD において固定された矩形板に (5.27) 式の力が作用したときの応力とを加え合えればよい。その結果は (5.22) 式に一致する。

§ 5.3 一様な温度上昇をうける場合の熱応力状態

矩形板が一様な温度上昇

$$T = T_0 \quad (5.29)$$

をうける場合を考える。このときには、(5.26)式より、

$$\sigma_x = -\alpha E T_0, \quad \sigma_y = 0 \quad (5.30)$$

また (5.27)式より、

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \alpha E T_0, & p_y &= 0, \\ \chi - \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

したがって、

$$\phi = \alpha E T_0 y^2/2, \quad \Omega = 0$$

とおくことができる。境界条件式 (5.19) および (5.24) 式の右辺は、(5.20)式より、

$$K_n = 0, \quad L_n = \alpha E T_0 \int_{-1}^1 f_n(x) dx$$

U) h が無限大の場合

(5.24)式に上記の K_n および L_n の値を代入すると未知常数 A_n および B_n を決定することができる。種々な Poisson 比の場合について、 A_n および B_n の値を $n=6$ まで (ただし $\nu=0$ のときのみは $n=8$ まで) 示せば表-5.1 の通りである。

表-5.1 常数の値 ($T=T_0, h=\infty$ のとき)

		$x \alpha E T_0$					
$\nu \backslash n$		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
A_n	2	-0.10190	-0.09181	-0.08287	-0.07486	-0.06760	-0.06099
	4	-0.00693	-0.00607	-0.00532	-0.00466	-0.00402	-0.00354
	6	-0.001587	-0.001391	-0.001219	-0.001059	-0.000931	-0.000807
	8	-0.0007667					
B_n	2	0.1850	0.1856	0.1866	0.1879	0.1896	0.1916
	4	0.01765	0.01793	0.01824	0.01859	0.01898	0.01945
	6	0.004069	0.004131	0.004204	0.004252	0.004377	0.004478
	8	0.0003139					

この表によつて n が大きくなれば A_n および B_n は速かに減少することがわかる。しかしながら、応力計算式を書いていると、その中に含まれる係数の収斂は A_n および B_n の収斂性よりも悪い。たとえば $\nu=0$ のときについては、 $n=6$ までとると、 $x=0$ における応力は次式によつて表わされる。

$$\begin{aligned}\sigma_x = & e^{-2.075y}(-1.3116 \cos 1.143y + 0.0793 \sin 1.143y) \\ & + e^{-5.257y}(0.4574 \cos 2.062y - 0.2350 \sin 2.062y) \\ & + e^{-8.729y}(-0.2919 \cos 3.405y + 0.1429 \sin 3.405y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y = & e^{-2.075y}(0.4520 \cos 1.143y - 0.8208 \sin 1.143y) \\ & + e^{-5.257y}(-0.1612 \cos 2.062y + 0.4103 \sin 2.062y) \\ & + e^{-8.729y}(0.0756 \cos 3.405y - 0.1932 \sin 3.405y)\end{aligned}$$

これは $\sigma_x = \sum f_n(x) g_n''(y)$, $\sigma_y = \sum f_n''(x) g_n(y)$ などによつて表わされるから、 $f_n(x)$ あるいは $g_n(y)$ を微分すると n が増すにつれて大きい係数が生じて来ることによるものである。以下には $n=6$ まで採つて応力値を示すことにする。

$\nu=0$ の場合の応力分布を示すと附図-Ⅱ.5.1の通りである。いずれの応力成分も固定辺 $y=0$ においてはかなり大きい応力を示すが、固定辺から離れると急速に減じ、 $y \geq 1$ 、すなわち固定辺の長さの $1/2$ 以上固定辺より離れた位置においては、實際上応力が消滅するものと考えてもよいことがわかる。奥 $(0,1)$ における σ_x の値は $-0.079 \alpha E T_0$ に過ぎない。固定辺においては $\sigma_x = -\alpha E T_0$ である。

固定辺における σ_y は、内部と表面とにおいて応力の符号が異なる。温度が降下したときと考え、 $T_0 < 0$ であるから固定辺の端では大きい引張応力が集中し、内部においては $0.37 \alpha E T_0$ の圧縮応力を示すことになる。しかしながら、 $y=0.6$ の断面においては、応力の符号が全く逆になっている。表面においては $y > 0.33$ においては圧縮応力を示している。 τ_{xy} は、固定辺においては、中央においては零でありほとんど直線的に増大して端近くで $\alpha E T_0$ の値に達する。また $y=1$ では $y=0$ のときと符号が異なっている。

つぎに、 $\nu=0$ と $\nu=0.3$ の場合の応力状態を比較すると、附図-Ⅱ.5.2に示すようになり、 ν の小さい方が大きい応力を生ずることがわかる。このことは表-5.1において、 ν の小さい方が、係数 A_n および B_n の絶対値が大きくなっていることから容易に推測できることである。さらに、附図-Ⅱ.5.2においては、 $\nu=0$ のときに、 $n=8$ まで採用した場合に得られる固定辺の応力状態を示し、 n の大きい値ほど採ると、応力分布曲線の波打った形は次第に平らになるとともに、固定辺の端近くにおける応力変動が著しくなる。固定端の σ_y は、 $n=6$ までとつたときには、 $-1.83 \alpha E T_0$ であるが、 $n=8$ までとつたときには $-2.40 \alpha E T_0$ まで増加する。こうして非常に大きい n の値まで採用して、なるべく正しい応力状態を描けば、 σ_x は矩形、 σ_y は奥 $(0,1)$ において

無限大, T_{xy} は三角形に似た形の応力図が得られるものと考えられる。

(2) h が有限の場合

この場合には (5.19) および (5.21) 式によって 常数 A_n, B_n, C_n および D_n を求めることができる。表-5.2 は, $\nu = 0.3$ とし, 種々な h に対するこれらの係数を計算した結果である。

表-5.2 常数の値 ($T=T_0, \nu=0.3$ のとき)

		$\times \alpha E T_0$				
$n \backslash h$		$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/8$	$1/32$
A_n	2	-0.077 9	-0.078 0	-0.070 7	-0.040 3	-0.008 51
	4	-0.004 67	-0.004 70	-0.004 83	-0.004 94	-0.001 64
	6	-0.001 063	-0.001 068	-0.001 066	-0.001 134	-0.000 647
B_n	2	0.181 2	0.180 9	0.182 7	0.176 0	0.142 3
	4	0.018 59	0.018 44	0.018 07	0.017 72	0.016 53
	6	0.004 267	0.004 290	0.004 277	0.004 099	0.004 107
C_n	2	-0.005 58	-0.005 93	-0.000 90	0.010 31	0.006 24
	4	-0.000 002	-0.000 073	-0.000 271	-0.000 453	0.000 674
	6	0	0	-0.000 004	-0.000 100	0.000 131
D_n	2	0.000 302	0.000 067	-0.007 777	-0.048 81	-0.105 3
	4	-0.000 001	-0.000 001	0.000 083	0.000 146	-0.007 269
	6	0	0	0	0.000 048	-0.000 781

$h = 1/2, 1/4, 1/32$ の場合に対する応力状態は附図-Ⅱ-5.3 に示す通りである。

固定辺における応力を見ると, σ_x は h の大きさに かわかわらずほとんど類似した値を示して いて, これらは $h = \infty$ の場合とも大差がない。 σ_y は h が小さくなるほど減少する。 $h = 1/32$ になれば, 点(1.0)における σ_y の値も小さくなる。 T_{xy} は $h = 1/4$ 程度までは大差ないが, $h = 1/32$ のように薄いものでは非常に小さくなる。 このように, 固定辺における応力は, σ_x を除けば 高さが 低くなるほど応力が減ずる。

一方上辺 BC における σ_x は, h が $1/2$ 程度の大きさであると, 固定辺における応力と符号が 逆になるが, h が小さくなると固定辺の値と同符号の応力となり, しかも応力値は増大し, $h = 1/32$ 程度に低くなると, 上辺においても固定辺と同様に $-\alpha E T_0$ に近い値となる。したがって, h

が小さいとき、下皿が固定されて温度が T_0 だけ降下したときを考えると、上皿には $\alpha E T_0$ に近い引張り応力が生れることになる。下皿においては σ_x は h にかかわらずほとんど一定であるが、 h が小さいと τ_{xy} および σ_y が小さくなるので、下皿における応力状態は h の小さい方が安全である。

§ 5.4 温度変化が y の一次式で表わされる場合の熱応力状態

本節では固定皿 AD の温度が高くなる時、あるいは上皿 BC の温度が高くなる時について、その内は直線的に変化する場合の応力状態を考えることにする。

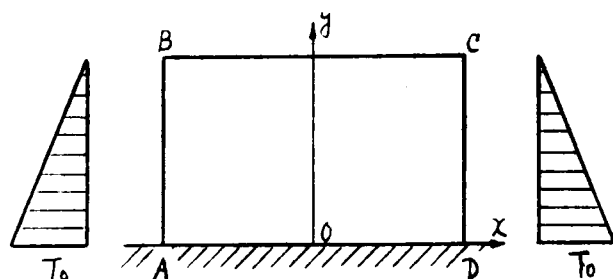
(1) 皿 AD の温度が高いとき

固定皿 AD の温度が T_0 上昇し、上皿 BC の温度は変化せず、その内は直線的に変る場合を考える。又 x 方向には温度が一定であるとする。(図-5.4)

温度上昇は、

$$T = T_0 (1 - y/2h) \quad (5.33)$$

図-5.4



によって表わされる。このときは (5.26) お

よび (5.27) 式より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\alpha E T_0 (1 - y/2h) \\ \sigma_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \alpha E T_0 (1 - y/2h) \\ p_y &= 0 \\ \chi &= \gamma = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

したがって、

$$\phi = (\alpha E T_0 / 2) (1 - y/2h) y^2, \quad \Omega = 0 \quad (5.36)$$

とおくことができる。

また、

$$K_n = -\frac{\alpha E T_0}{2h} \int_{-1}^1 f_n(x) dx, \quad L_n = \alpha E T_0 \int_{-1}^1 f_n(x) dx$$

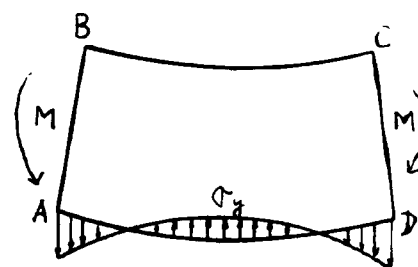
これらの値を用いて、 $\nu = 0.3$ の場合について、 A_n, B_n, C_n および D_n を求めた結果を表 5.3 に示す。附図-Ⅱ-5.4 は $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ および $\frac{1}{2}$ に対する応力状態を示したものである。この場合の応力を一様な温度上昇の場合と比較すると、固定皿においては σ_x はほとんど差がないが、 σ_y は著しく小さい。 τ_{xy} は少し減じている。

表-5.3 常数の値 ($T=T_0(1-\gamma/2h)$, $\nu=0.3$ のとき)

		$\times \alpha E T_0$				
n	h	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/8$	$1/32$
	n					
A_n	2	-0.014 810	0.002 727	0.019 676	0.083 784	0.394 864
	4	-0.002 695	0.001 755	-0.001 220	0.001 076	0.011 752
	6	-0.000 776	-0.000 659	-0.000 524	-0.000 110	0.001 500
B_n	2	0.230 110	0.242 321	0.259 412	0.338 108	0.812 032
	4	0.021 357	0.022 541	0.022 270	0.025 576	0.048 304
	6	0.004 673	0.004 866	0.005 058	0.005 456	0.008 208
C_n	2	-0.010 218	-0.026 976	-0.041 108	-0.073 264	-0.402 624
	4	0	-0.000 096	-0.000 922	-0.002 536	-0.012 528
	6	0	0	0	-0.000 202	-0.001 680
D_n	2	0.001 216	0.012 789	0.027 744	0.076 580	0.622 400
	4	0	-0.000 001	0.000 144	0.002 492	0.023 752
	6	0	0	0.000 008	0.000 109	0.002 656

板の中央においては、一様な温度上昇をうけるときよりもかなり大きな引張応力が生じている。矩形板が辺ADにおいて切離されているときを考えると、ここで示しのような温度変化のときには、辺ADは下に凸の曲線となる。したがって辺ADを固定する場合には、図-5.5に示すように、上辺に引張応力を与えるような曲げモーメントを加えて辺ADを直線に戻さなければならぬ。そのために、一様な温度上昇の場合に比べて上辺の引張応力が大きくなることを考えることができる。また、このような曲げモーメントを与えるべき応力は、主として固定辺ADにおける σ_y であって、この σ_y が図-5.5に示すように分布するため、すでに述べたように、 σ_y は一様な温度上昇のときと比べて、非常に小さくなるものと解釈することができる。

図-5.5



(2) 辺BCの温度が高いとき

最初に固定辺ADの温度は変化せず、上辺BCの温度が T_0 上昇し、その間は直線的に変化する場合を考える。このとき温度上昇は、

$$T = T_0 y/2h \quad (5.37)$$

で表わされる。したがって前と同様にして、

$${}^0\sigma_x = -\alpha E T_0 y/2h, \quad {}^0\sigma_y = 0 \quad (5.38)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^*\rho_x &= \alpha E T_0 y/2h, & {}^*\rho_y &= 0, \\ {}^*\chi &= {}^*\gamma = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

したがって、

$$\phi = \alpha E T_0 y^3/12h, \quad \Omega = 0, \quad (5.40)$$

$$K_n = (\alpha E T/2h) \int_{-1}^1 f_n(x) dx, \quad L_n = 0$$

これらの値を用いて計算すれば、 $g_n(y)$ を決定することができる。得られた $g_n(y)$ を用いて、この場合の矩形板の応力を計算することができる。しかしながら、(5.33)と(5.38)式の温度を加えれば(5.29)式の温度が得られるから、重ね合わせの法則により、前節の応力状態は本節の(1)と(2)を重ね合わせた応力状態になっているはずである。したがって、この場合の応力はあらかじめ計算しなくても、前節の応力から本節(1)の応力を差引けばよい。このことはつぎのようによつても説明できる。係数 A_n, B_n, C_n および D_n を決める方程式(5.19)および(5.21)式を考えると、左辺は不変であり、前節の式の右辺は本節の(1)と(2)における右辺を加え合わせたものに等しい。なるとなれば、 $C_n(2h)$ は§5.2に示すように零であり、本節の(1)と(2)における K_n あるいは L_n を加え合わせるとそれぞれ前節の K_n あるいは L_n に一致するから、本節(1)および(2)における係数を加え合わせると、それぞれ前節における係数に一致する。

1例として、附図-Ⅱ-5.5に $h=1/2, \nu=0.3$ のときの応力状態を示す。固定辺上においては温度が変わらないから、この辺上における σ_x は極めて小さい。固定辺において矩形板を切離したときを考えると、辺ADは上に凸の曲線となる。この曲線を元の直線に戻すためには、ちょうど図-5.5と全く逆の力を与える必要があるので、辺ADにおいて σ_y はかゝる大きい値を示し、上辺BCでは圧縮応力となる。

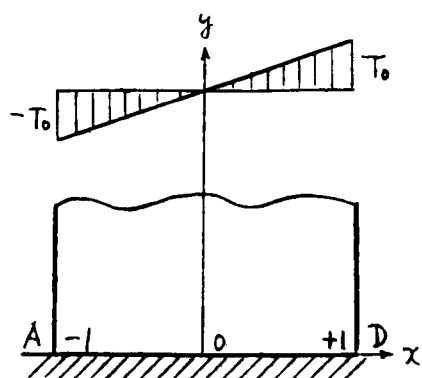
§5.5 温度変化が x の一次式で表わされる場合の熱応力状態

$x=1$ において T_0 温度が上昇し、 $x=-1$ において T_0 温度が下降し、その間は直線的に変る場合を考える。 y 方向には温度が変化しないものとする(図-5.6)。このとき温度上昇は、

$$T = T_0 x \quad (5.41)$$

で表わされる。このときには、

図 - 5.6



$$\sigma_x = -\alpha E T_0 x, \quad \sigma_y = 0 \quad (5.42)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= \alpha E T_0 x, & \rho_y &= 0, \\ \chi &= -\alpha E T_0, & \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

したがって,

$$\phi = -\alpha E T_0 x^3/6, \quad \Omega = \alpha E T_0 x, \quad (5.44)$$

$$K_n = 0$$

$$L_n = \alpha E T_0 \int_{-1}^1 x f_n(x) dx$$

これらの値を用いて, $h = \infty$ の場合について, 種々な Poisson 比に対する係数 A_n , および B_n を求めた結果を表-5.4 に示す.

表-5.4 係数の値 ($T = T_0 x$, $h = \infty$ のとき)
 $x \propto E T_0$

ν		0	0.2	0.3	0.5
A_n	3	-0.014 858	-0.011 572	-0.010 153	-0.007 791
	5	-0.002 722	-0.002 087	-0.001 826	-0.001 364
	7	-0.000 842	-0.000 650	-0.000 571	-0.000 440
B_n	3	0.035 317	0.036 444	0.036 739	0.038 620
	5	0.007 047	0.007 280	0.007 424	0.007 783
	7	0.002 060	0.002 127	0.002 167	0.002 255

$n=7$ までとて計算すると, 応力状態は附図-Ⅱ.5.6 に示さようになる. この場合には, σ_x は固定端中央において零であり, 端に近づくほど増大して三角形に近い分布となる. σ_y および τ_{xy} は固定端の中央部と端近くとでは応力の符号が変わっている. ν の値が小さいほど応力が大きくなることは, 対称的な温度上昇の場合と同じであるが, 中央断面 $x=0$ における応力は, σ_x が零であり, σ_y も非常に小さいことが特徴である.

§5.6 温度変化が y の高次多項式で表わされる場合の熱応力状態

前節では温度変化が直線的な場合のみを取り扱ったが, ここでは, 温度変化が y の高次

多項式で表わされる場合を考える。x方向には温度変化が一定であるものとする。なお y が 0 から 2h までの間の平均温度が零となり、y=0 および y=2h において $T=T_0$ であるような温度変化のみを考える。これらの条件を満足する二次多項式の温度上昇は次式によって表わすことができる。

$$T = \frac{T_0}{a_i} x_i'' (2y - 2h) = \frac{T_0}{a_i N_i} f_i'' (2y - 2h) \quad (5.45)$$

ここに、 a_i は $y=0$ および $y=2h$ において、 $T=T_0$ とするための常数である。

(5.45) 式の温度上昇の場合には (5.1) 式より、

$$\sigma_x = \sigma_y = - \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \frac{1}{a_i N_i} f_i'' (2y - 2h) \quad (5.46)$$

となる。また、

$$\phi = 0, \quad \Omega = \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \frac{1}{a_i N_i} f_i'' (2y - 2h)$$

と表わすことができる。

(5.15) より Euler の微分方程式は、

$$g_n^{(iv)}(y) - 2(f_n', f_n') g_n''(y) + (f_n'', f_n'') g_n(y) = Min. \quad (5.47)$$

ここに、

$$Min = - \frac{\alpha E T_0}{a_i N_i} f_i^{(iv)} (2y - 2h) \int_{-1}^1 f_n(x) dx \quad (5.48)$$

もし Min が 常数であるときには、

$$G_{in} = Min / (f_n'', f_n') \quad (5.49)$$

となる。さらに (5.20) 式における K_n および L_n を表せばつぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned} K_{in} &= \frac{\alpha E T_0}{a_i N_i} f_i(0) \int_{-1}^1 f_n(x) dx, \\ L_{in} &= G_{in}'(0) + \nu (f_n', f_n') (G_{in}(0) + \frac{\alpha E T_0}{a_i N_i} f_i''(0) \int_{-1}^1 f_n(x) dx) \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

1例として、 $h=1/2$ 、 $\nu=0.3$ のときについて、二次多項式の温度変化が生ずる場合の応力解析を行なうことにする。この場合には、

$$T = \frac{T_0}{8N^2} f_2'' (2y-1) = T_0 (1-6y+6y^2).$$

したがって、

$$M_{2n} = -12\alpha E T_0 \int_{-1}^1 f_n(x) dx$$

この M_{2n} は常数であるから、(5.49)式により G_{2n} も常数となる。また K_{2n} および L_{2n} はつぎの通りである。

$$K_{2n} = -\frac{6\alpha E T_0}{1-\nu} \int_{-1}^1 f_n(x) dx, \quad L_{2n} = \nu (f_n', f_n') G_{2n} + \alpha E T_0 \int_{-1}^1 f_n(x) dx$$

これらの結果を用いて G_{2n} および4組の常数を計算した結果は表-5.5に示す通りである。

表-5.5 G_{2n} および 常数の値 ($T=T_0 X_2^2(2\eta-1)/8$, $h=1/2$, $\nu=0.3$ のとき)

n	G_{2n}	A_{2n}	B_{2n}	C_{2n}	$\alpha E T_0$
					D_{2n}
2	-0.450 750	0.376 360	0.552 154	0.077 186	0.015 408
4	-0.006 426	0.007 546	0.033 790	0.000 059	0.000 070
6	-0.000 537	0.000 599	0.006 468	0	0

温度変化および $n=6$ まで採用したときの応力状態は附図-II.5.7に示す通りである。 $x=0$ 上における σ_x 曲線は温度変化に類似して、辺ADが固定されている影響によって、上辺BCにおける σ_x は、固定辺ADにおける応力よりも少し小さい。固定辺においては、温度上昇が T_0 であるために、 σ_x の値は大きくて一様な温度上昇の場合の値に近いが、 σ_y および τ_{xy} は比較的小さい。

§ 5.7 温度変化が x の高次多項式で表わされる場合の熱応力状態

温度変化が x の高次多項式で表わされ、 y 方向には一定である場合を考える。この場合にも前節と同様に、 x が -1 から $+1$ までの間の平均温度が零となり、 $x=-1$ および $x=+1$ において $T=T_0$ であり、 x の偶函数である温度変化のみを考える。これらの条件を満足する n 次多項式の温度上昇は次式によって表わすことができる。

$$T = \frac{T_0}{a_i} X_i^n(x) = \frac{T_0}{a_i N_i} f_i^n(x) \quad (5.51)$$

この温度上昇を採用すると、以下のような結果が得られる。

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{\alpha E T_0}{(1-\nu)} \frac{1}{a_i N_i} f_i''(x), \quad (5.52)$$

$$\phi = 0, \quad \Omega = \frac{\alpha E T_0}{1-\nu} \frac{1}{a_i N_i} f_i''(x),$$

$$g_n^{(IV)}(y) - 2(f_n', f_n') g_n''(y) + (f_n'', f_n'') g_n(y) = M_{in}, \quad (5.53)$$

$$M_{in} = -\frac{\alpha E T_0}{a_i N_i} (f_i'', f_i''), \quad (5.54)$$

$$K_{in} = 0, \quad L_{in} = \nu (f_n', f_n') G_{2in} - \frac{\alpha E T_0}{a_i N_i} (f_i', f_n') \quad (5.55)$$

以下には $h = 1/2$, $\nu = 0.3$ の場合について計算結果を示すことにする。

(1) 2次多項式の場合

$$T = \frac{T_0}{8} \chi_2''(x) = T_0 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} x^2\right),$$

$$M_{2n} = -3\alpha E T_0 \int_{-1}^1 f_n(x) dx,$$

$$K_{2n} = 0, \quad L_{2n} = \nu (f_n', f_n') G_{2n} - \frac{\alpha E T_0}{8 N_2} (f_2', f_n')$$

G_{2n} は (5.49) 式によって求めることができる。

表-5.6 G_{2n} および常数の値 ($T = T_0 \chi_2''(x)/8$, $h = 1/2$, $\nu = 0.3$ のとき)
 $\times \alpha E T_0$

n	G_{2n}	A_{2n}	B_{2n}	C_{2n}	D_{2n}
2	-0.112 688	0.041 229	-0.032 396	0.029 248	0.002 319
4	-0.001 607	-0.002 216	0.008 873	0.000 015	0.000 017
6	-0.000 134	-0.000 769	0.003 086	0	0

G_{2n} および 4 組の常数は表-5.6 に示すような値である。附図-II.5.8 は温度変化と応力状態を示したものである。固定端における σ_y 曲線は、温度変化と幾分違った形を示している。 σ_x の最大値は約 $0.5 \alpha E T_0$ に達するが、固定端における平均値は非常に小さい。上辺 BC においては σ_x は圧縮応力である。

(2) 6次多項式の場合

$$T = \frac{T_0}{320} \chi_6''(x) = \frac{T_0}{40} (-7 + 177x^2 - 585x^4 + 455x^6)$$

$$M_{6n} = - \frac{\alpha E T_0}{320 N_6} (f'_6, f''_n)$$

$$K_{6n} = 0, \quad L_{6n} = \nu (f'_n, f'_n) G_{6n} - \frac{\alpha E T_0}{320 N_6} (f'_6, f'_n)$$

G_{6n} および 4 組の常数は表-5.7 に示す通りである。附図-Ⅱ.5.9 は温度変化と応力状態を示すものである。固定辺における σ_y 曲線は温度変化と類似した形を呈している。側辺 CD においては、表面近くで温度が急激に変化する影響を受けて、 σ_y の値は大きくなっていく。

表-5.7 G_{6n} および 常数の値 ($T=T_0 X''_6(x)/320$, $h=1/2$, $\nu=0.3$ のとき)

n	G_{6n}	A_{6n}	B_{6n}	C_{6n}	$\times \alpha E T_0$	
					D_{6n}	
2	-0.003 393	0.000 292	0.001 700	0.000 799	0.000 074	
4	-0.002 938	0.000 079	-0.000 227	0.000 031	0.000 035	
6	-0.003 685	0.000 516	-0.002 073	0	0	

第 6 章

一辺が弾性拘束された矩形板の熱応力状態

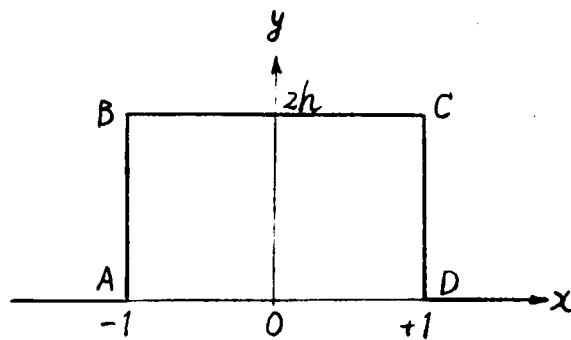
第5章において一辺が固定された場合について応力解析を行なったので、本章では、一辺が他の弾性体に接続している矩形板の熱応力状態を解析し、第5章の結果と比較して、熱応力状態の相違を明らかにし、2つの物体の弾性係数の相違が応力状態に及ぼす影響について考察することにする。応力解析には、第5章にならってポテンシャルエネルギー最小の原理によって近似的に応力函数を求めることにした。このときに接続部における自然境界条件は非常に複雑な形になるので、接続面上の数値において連続条件を満足することにした。

§ 6.1 解析方法

(1) 応力函数

第5章と同様に矩形板の厚さは d 、幅は $2l=2$ 、高さは $2h$ とし、図-6.1 に示すように

図-6.1



辺ADにおいて同じ厚さの他の弾性体と接続しているものとする。温度上昇 $T(x, y)$ は、厚さ方向には変化せず、矩形板ABCDのみに生ずるものとする。平面応力状態にあるものと考え熱応力状態の解析を行なう。使用する応力函数の形は第5章と同じであるから、ここでは簡単に説明する。

第5章で説明したように、もし矩形板が辺ADにおいて切離されているとすると無歪の状態にするためには、

$$\sigma_x = \sigma_y = -\alpha E T / (1 - \nu) \quad (6.1)$$

なる応力を発生させる必要がある。このためには実在しない力を加える必要があるので、このおそな力を打消し、真の熱応力を求めるためには、辺ADにおいて接続されている矩形板に

$$*X = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha E T}{1 - \nu} \right), \quad *Y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha E T}{1 - \nu} \right),$$

$$x = \pm 1 \text{ において, } *p_x = \alpha E T / (1 - \nu),$$

$$y=0 \text{ および } 2h \text{ において, } {}^*p_y = dET/(1-\nu) \int \quad (6.2)$$

なる力が作用した状態を解析して, (6.1)の応力状態を重ね合せなければならない。(6.2)式

の力による応力成分を ${}^*\sigma_x$, ${}^*\sigma_y$ および ${}^*\tau_{xy}$ で表わすと, 真の応力は,

$$\sigma_x = {}^0\sigma_x + {}^*\sigma_x, \quad \sigma_y = {}^0\sigma_y + {}^*\sigma_y, \quad \tau_{xy} = {}^0\tau_{xy} + {}^*\tau_{xy}$$

が5章と同様に, *X , *Y は

$${}^*X = -\frac{\partial \Omega(x, y)}{\partial x}, \quad {}^*Y = -\frac{\partial \Omega(x, y)}{\partial y}$$

で表わされるものとし, 応力函数 $\bar{\Phi}(x, y)$ は,

$$\bar{\Phi}(x, y) = \phi(x, y) + \sum_n f_n(x) g_n(y) \quad (6.4)$$

なる形によって表わされるものとする。そうすると, このときの応力成分は,

$$\left. \begin{aligned} {}^*\sigma_x &= \bar{\Phi}_{yy}(x, y) + \Omega(x, y) = \phi_{yy}(x, y) + \Omega(x, y) + \sum_n f_n(x) g_n''(y) \\ {}^*\sigma_y &= \bar{\Phi}_{xx}(x, y) + \Omega(x, y) = \phi_{xx}(x, y) + \Omega(x, y) + \sum_n f_n''(x) g_n(y) \\ {}^*\tau_{xy} &= -\bar{\Phi}_{xy}(x, y) = -\phi_{xy}(x, y) - \sum_n f_n'(x) g_n'(y) \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

$\phi(x, y)$ は, $\phi(x, y)$ と $\Omega(x, y)$ とによって生ずる応力が四辺AD以外の三辺に対する応力の境界条件(5.6)式を満足するように選ぶものとする。ただし応力函数の微分方程式(5.4)式は必ずしも満足しないものとする。このようにして ϕ と Ω とが決定されると, 応力函数(6.4)式の最後が項は, 四辺ADを除いた三辺における境界条件は,

$$f_n(\pm 1) = f_n'(\pm 1) = 0, \quad (6.6a)$$

$$g_n(2h) = g_n'(2h) = 0 \quad (6.6b)$$

なる条件が満足されるように決定しなければならない。

(6.6a)式を満足する函数として, 表-2.2 に示した *ortho-normal self-equilibrating polynomial* を用い, ポテンシャルエネルギー最小の原理によって, $g_n(y)$ を決定することにする。

(2) ポテンシャル エネルギー最小の原理

歪エネルギー W , 外力のなす仕事を V とすると, (6.2)式の力が作用したとき, 矩形板 ABCD に貯えられるポテンシャル エネルギー π は,

$$\pi = W + V$$

$$W = \frac{d}{2E} \int_0^{2h} \int_{-1}^1 \{ \sigma_x^* \sigma_y^* - 2\nu \sigma_x^* \sigma_y^* + 2(1+\nu) \tau_{xy}^2 \} dx dy \quad (6.7a)$$

$$V = -d \int_{-1}^1 [\sigma_y^* v + \tau_{xy}^* u]_{y=0} dx - d \int_0^{2h} \int_{-1}^1 (X^* u + Y^* v) dx dy \quad (6.7b)$$

ポテンシャルエネルギー最小の原理によれば、応力の変分による π の変分は零でなければならぬから、

$$\delta \pi = \delta W + \delta V = 0 \quad (6.8)$$

となる。ただし、応力の変分のときには X および Y は変化しないから、 δV においては (6.7b) 式の右2項は現われてこない。(6.8)式を応力函数によって表わし、部分積分を行なうと、

$$\begin{aligned} \frac{E}{d} \delta \pi = & \int_0^{2h} \int_{-1}^1 \{ \Delta \Delta \bar{\phi} + (1-\nu) \Delta \Omega \} \delta \bar{\phi} dx dy \\ & + \int_{-1}^1 \{ \bar{\phi}_{yy} + (2+\nu) \bar{\phi}_{xx} + (1-\nu) \Omega_y + W_1 \} \delta \bar{\phi} - \{ \bar{\phi}_{yy} - \nu \bar{\phi}_{xx} + (1-\nu) \Omega + W_2 \} \\ & \times \delta \bar{\phi} \Big|_{y=0} dx = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

となる。ここに、 $W_1(x)$ および $W_2(x)$ は辺 AD の変化に関する項であり、 $\bar{\phi}$ によって表わすことのできるものがあるが、非常に複雑であって詳しく書き表わすことは困難である。

$\bar{\phi}$ は (6.4) 式で表わされ、任意の値ととりうるのは $g_n(y)$ のみであることを考えると、(6.9) 式が成立するための条件式はつきのようなになる。¹⁾

$$\int_{-1}^1 \{ \Delta \Delta \phi(x, y) + (1-\nu) \Delta \Omega(x, y) + \sum_n f_n^{(IV)}(x) g_n(y) + 2 \sum_n f_n''(x) g_n''(y) + \sum_n f_n^{(IV)}(x) g_n^{(IV)}(y) \} \sum_i f_i(x) dx = 0, \quad (6.10)$$

$$\int_{-1}^1 \{ \phi_{yy}(x, 0) + (2+\nu) \phi_{xx}(x, 0) + (1-\nu) \Omega_y(x, 0) + \sum_n f_n(x) g_n'''(0) + (2+\nu) \sum_n f_n''(x) g_n'(0) + W_1(x) \} \sum_i f_i(x) dx = 0, \quad (6.11a)$$

$$\int_{-1}^1 \{ \phi_{yy}(x, 0) - \nu \phi_{xx}(x, 0) + (1-\nu) \Omega(x, 0) + \sum_n f_n(x) g_n''(0) - \nu \sum_n f_n''(x) g_n(0) + W_2(x) \} \sum_i f_i(x) dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.11b)$$

$f_n(x)$ は直交正規函数であるから、

$$(f_n, f_i) = \begin{cases} 1, & (n=i \text{ に対して}) \\ 0 & (n \neq i \text{ に対して}) \end{cases}$$

であり、かつ、 $n \neq i$ のときに、 (f_n', f_i') および (f_n'', f_i'') を含む項を省略すると、(6.10) および (6.11) 式はつきのようなになる。

$$g_n^{(IV)}(y) - 2 \sum_n (f_n', f_n') g_n''(y) + \sum_n (f_n'', f_n'') g_n(y) = - \int_{-1}^1 \{ \Delta \Delta \phi(x, y) + (1-\nu) \Delta \Omega(x, y) \} f_n(x) dx, \quad (6.12)$$

$$g_n''(0) - (2+\nu) \sum_n (f_n', f_n') g_n'(0) = - \int_{-1}^1 \left\{ \phi_{yy}(x, 0) + (2+\nu) \phi_{xx}(x, 0) + (1-\nu) \Omega_y(x, 0) + w_1(x) \right\} f_n(x) dx, \quad (6.13a)$$

$$g_n''(0) + \nu \sum_n (f_n', f_n') g_n(0) = - \int_{-1}^1 \left\{ \phi_{yy}(x, 0) - \nu \phi_{xx}(x, 0) + (1-\nu) \Omega(x, 0) + w_2(x) \right\} f_n(x) dx, \quad (n=2, 3, \dots, \infty) \quad (6.13b)$$

(6.12)式は Euler の微分方程式であり, (5.15)式と全く同じである。(6.13)式は自然境界条件であり, これまでに示していなかった四 AD における連続条件を表わすものである。

§ 6.2 未知函数 $g_n(y)$ の決定

(1) $g_n(y)$ と四 AD における連続条件

微分方程式 (6.12) の一般解はすでに (5.18) 式に示した通り,

$$g_n(y) = e^{-\alpha_n y} (A_n \cos \beta_n y + B_n \sin \beta_n y) + e^{\alpha_n y} (C_n \cos \beta_n y + D_n \sin \beta_n y) + G_n(y) \quad (6.14)$$

と書くことができる。4組の常数 A_n, B_n, C_n および D_n は, 原理的には境界条件 (6.6b) および (6.13) より決定することができる。しかしながらすでに述べたように, (6.13) 式に含まれる w_1 および w_2 が非常に複雑な式であるので, 近似計算には不適当である。(6.4) および (6.11) 式によって応力函数の形が定まり, $g_n(y)$ の境界条件としては, (6.6b) 式を用いる以外に, (6.13) 式に代わる簡単な関係を用いなければならぬわけである。(6.13) 式は四 AD における連続条件に対応するものであるから, (6.13) 式の代りに, 最も初等的に, 四 AD 上の数点において連続条件を成立させることになる。

いま, (6.2) 式のカが作用したときの応力および変位を表わすのに, 矩形板 ABCD の部分のものについては添字 1 をつけ, この矩形板に接続している他の弾性体の部分のものについては添字 2 をつけて区別することにする。四 AD での連続条件はつきのように書ける。

$${}^* \sigma_{y,1}(x, 0) = {}^* \sigma_{y,2}(x, 0), \quad {}^* \tau_{xy,1}(x, 0) = {}^* \tau_{xy,2}(x, 0), \quad (6.15a)$$

$${}^* u_1(x, 0) = {}^* u_2(x, 0) \quad {}^* v_1(x, 0) = {}^* v_2(x, 0) \quad (6.15b)$$

(6.15a) の応力条件は (6.4) および (6.14) 式によって直ちに書き表わすことができる。しかしながら, 変位成分についてはまだ述べていないので, 応力函数中の $\sum f_n(x) g_n(y)$ によって生ずる変位成分を求めてみよう。

(2) 矩形板の変位

矩形板 ABCD において, $F_1(x, y) = \sum_n f_n(x) g_{n,1}(y)$ による変位成分 \bar{u}_1 および \bar{v}_1 を求めるために, 変位函数を ψ_1 によって表わすときは, ψ_1 は

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} = \Delta F_1(x, y) \quad (6.16)$$

$$\Delta \psi_1 = 0 \quad (6.17)$$

を満足しなければならない。G. Horray は (6.16) 式は完全に満足するが, (6.17) 式は近似的に満たされるように ψ_1 を定めた。²⁾

平面応力状態においては, 応力と歪との関係を書き直すと,

$$E_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = -(1+\nu_1) \sigma_y + (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu_1) \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y}$$

$$E_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} = -(1+\nu_1) \sigma_x + (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu_1) \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y}$$

この式を積分すると

$$\left. \begin{aligned} E_1 \bar{u}_1 &= -(1+\nu_1) \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + K_1(y) \\ E_1 \bar{v}_1 &= -(1+\nu_1) \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + J_1(x) \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

ここに $K_1(y)$ および $J_1(x)$ は任意函数である。したがって $F_1(x, y) = \sum_n f_n(x) g_{n,1}(y)$ とおくと (6.16) 式は

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} = \sum_n f_n''(x) g_{n,1}(y) + \sum_n f_n(x) g_{n,1}'(y)$$

あるいは, (6.18) 式は

$$\left. \begin{aligned} E_1 \bar{u}_1 &= \sum_n \{ \tilde{f}_n(x) g_{n,1}'(y) - \nu_1 f_n(x) g_{n,1}(y) + K_{n,1}(y) \}, \\ E_1 \bar{v}_1 &= \sum_n \{ f_n''(x) \tilde{g}_{n,1}(y) - \nu_1 f_n(x) g_{n,1}'(y) + J_{n,1}(x) \}, \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

の形に書くことができる。ここに, \tilde{f}_n および $\tilde{g}_{n,1}$ はそれぞれ f_n および $g_{n,1}$ の不定積分を示す。

1) いしながら, 残りの応力と歪の関係から,

$$\frac{E_1}{2(1+\nu_1)} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6.20)$$

が成立しなければならない。この式に (6.19) 式を代入して $J_{n,1}(x)$ および $K_{n,1}(y)$ を定めればよいのであるが, x および y のいかんにかかわらず, (6.20) 式を満足させることは困難である。そこで x が $[-1, 1]$, y が $[0, \delta]$ の範囲において, 平均的に (6.20) 式を満足させることにすると, つぎのように $J_{n,1}(x)$ および $K_{n,1}(y)$ を定めることができる。

(6.19)式と(6.20)式に代入すると,

$$\int_0^y \int_{-1}^1 \{ \tilde{f}_n(x) \tilde{g}_{n,1}'''(y) + \tilde{f}_n'''(x) \tilde{g}_{n,1}(y) + 2 \tilde{f}_n'(x) \tilde{g}_{n,1}'(y) + \tilde{J}_{n,1}'(x) + K_{n,1}'(y) \} dx dy = 0$$

となるから,

$$\tilde{J}_{n,1}(x) = 0,$$

$$K_{n,1}(y) = \begin{cases} 0, & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -\tilde{f}_n(1) \tilde{g}_{n,1}''(y) - \tilde{f}_n(1) \tilde{g}_{n,1}(y), & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (6.21)$$

であればよいことがわかる。

そこで, $\phi_1(x, y) + \Omega(x, y)$ による変位成分を, $u_{01}(x, y)$ および $v_{01}(x, y)$ で表わすと, 矩形板 ABCD の $y=0$ における変位 *u_1 および *v_1 は次式によって表わされる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 ^*u_1(x, 0) &= E_1 u_{01}(x, 0) + \sum_n \{ \tilde{f}_n(x) \tilde{g}_{n,1}(0) - \nu_1 \tilde{f}_n'(x) \tilde{g}_{n,1}'(0) + K_{n,1}(0) \} + a_1 - c_1 y, \\ E_1 ^*v_1(x, 0) &= E_1 v_{01}(x, 0) + \sum_n \{ \tilde{f}_n''(x) \tilde{g}_{n,1}(0) - \nu_1 \tilde{f}_n(x) \tilde{g}_{n,1}'(0) \} + b_1 + c_1 x \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

ここに, a_1, b_1 および c_1 は変位の基準座標のとり方によって定まる常数である。

一方矩形板 ABCD に接続している方の弾性体の変位を *u_2 および *v_2 で表わすと, これらの変位成分は, その弾性体の $y=0$ 上において, $^*\sigma_{y,2} = ^*\sigma_{y,1}$ および $^*\tau_{xy,2} = ^*\tau_{xy,1}$ となる変位として求められる。したがって, *u_2 および *v_2 はその弾性体の $y=0$ 上において, $^*\sigma_{y,1}$ および $^*\tau_{xy,1}$ の関数であるから, 応力函数(6.4)式によって表わすことができる。 *u_2 および *v_2 が求められると, $\tilde{g}_{n,1}(y)$ と決定する2つの条件式(6.15b)を書くことができる。 $y=0$ 上のすべての点で(6.15b)式の条件を満足することは可能であるから, 最も簡単な方法として, $y=0$ 上の数点においてこの条件を満足することにする。

なお, $\tilde{g}_n(y)$ を決定するためには, 辺 BC における2つの境界条件(6.6b)式を用いる必要がある。

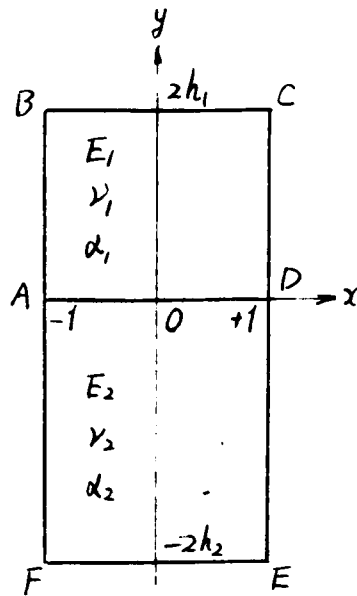
以上に述べた方法を用いれば, 矩形板が他の弾性体に接続している場合の熱応力状態と解析することができる。つぎにこの方法を用いて具体的な問題を解いた結果を示す。³⁾

§ 6.3 同じ幅の矩形板に接続した矩形板の熱応力状態

図-6.2に示すように, 厚さ d , 幅 $2d=2$, 高さ $2d_1$ の矩形板 ABCD が, 同じ厚さと幅の他の矩形板 ADEF と, 辺 AD において接続していて, 矩形板 ABCD の部分のみが温度上昇 $T(x, y)$ をうける場合を考える。応力, 変位, 材料の性質などを区別するために, 矩形板 ABCD に関する値には添字 1 をつけ, 矩形板 ADEF に関するものには添字 2 をつけることにする。座標は辺 AD の中点を原点とし, AD を x 軸とし, 矩形 ABCD の存在する方を y 軸の正の向きに選ぶ。

図-6.2

(1) 基本関係式



矩形板 ABCD における応力函数, 応力および
 $y=0$ における変位は, (6.4), (6.14), (6.5) および
 (6.22) 式より, つぎのように表わされる。

$$\bar{\Phi}_1(x, y) = \phi_1(x, y) + \sum_n f_n(x) g_{n,1}(y) \quad (6.23)$$

$$g_{n,1}(y) = e^{-\alpha_n y} (A_{n,1} \cos \beta_n y + B_{n,1} \sin \beta_n y) + e^{\alpha_n y} (C_{n,1} \cos \beta_n y + D_{n,1} \sin \beta_n y) + G_{n,1}(y) \quad (6.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,1} &= \phi_{yy,1}(x, y) + \Omega_1(x, y) + \sum_n f_n(x) g''_{n,1}(y) \\ \sigma_{y,1} &= \phi_{xx,1}(x, y) + \Omega_1(x, y) + \sum_n f''_n(x) g_{n,1}(y) \\ \tau_{xy,1} &= -\phi_{xy,1}(x, y) - \sum_n f'_n(x) g'_{n,1}(y) \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

$$\left. \begin{aligned} E_1^* u_{,1}(x, 0) &= E_1 u_{0,1}(x, 0) + \sum_n \{ \tilde{f}_n(x) g''_{n,1}(0) - \nu_1 f'_n(x) g_{n,1}(0) + K_{n,1}(0) \} + a_1 - c_1 y \\ E_1^* v_{,1}(x, 0) &= E_1 v_{0,1}(x, 0) + \sum_n \{ f''_n(x) \tilde{g}_{n,1}(0) - \nu_1 f_n(x) g'_{n,1}(0) \} + b_1 + c_1 x \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

いま矩形板 ADEF の方を考えると, 作用する力は $y=0$ (辺 AD) 上における $\sigma_{y,2}$ および $\tau_{xy,2}$ のみである。このように, 矩形板 ADEF においては, 作用する力は境界力のみであるので, この矩形板における応力函数を,

$$\bar{\Phi}_2(x, y) = \sum_n f_n(x) g_{n,2}(y) \quad (6.27)$$

とおく。ここに,

$$g_{n,2}(y) = e^{-\alpha_n y} (A_{n,2} \cos \beta_n y + B_{n,2} \sin \beta_n y) + e^{\alpha_n y} (C_{n,2} \cos \beta_n y + D_{n,2} \sin \beta_n y) \quad (6.28)$$

すると, これまで矩形板 ABCD において得られた関係式 (6.23) ~ (6.26) において,
 $\phi_1(x, y) = 0, \Omega_1(x, y) = 0, u_{0,1}(x, 0) = v_{0,1}(x, 0) = 0$ とおき, 添字 1 を 2 に変更すれば,
 矩形板 ADEF における関係式が得られる。したがって応力および $y=0$ における変位はつぎの通
 りになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,2} &= \sum_n f''_n(x) g_{n,2}(y) \\ \sigma_{y,2} &= \sum_n f_n(x) g''_{n,2}(y) \\ \tau_{xy,2} &= -\sum_n f'_n(x) g'_{n,2}(y) \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

$$\left. \begin{aligned} E_2^* u_{,2}(x, 0) &= \sum_n \{ \tilde{f}_n(x) g''_{n,2}(0) - \nu_2 f'_n(x) g_{n,2}(0) + K_{n,2}(0) \} + a_2 - c_2 y \\ E_2^* v_{,2}(x, 0) &= \sum_n \{ f''_n(x) \tilde{g}_{n,2}(0) - \nu_2 f_n(x) g'_{n,2}(0) \} + b_2 + c_2 x \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

さて、 $g_{n,1}(y)$ および $g_{n,2}(y)$ には、1つの n についてそれぞれ4個の未定係数があり、それらに決定するための条件式は、すでに述べた通り $y=0$ における境界条件(6.15)と $g_{n,1}(y)$ に対しては $y=2h_1$ 、 $g_{n,2}(y)$ に対しては $y=-2h_2$ における境界条件(6.6b)式である。(ただし $g_{n,2}$ に対しては少し書きあらためる必要がある)。

(6.15)式は、(6.25)、(6.29)、(6.26)および(6.30)式を用いると、一連の次の関係式となる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,xx}(x,0) + \Omega_1(x,0) + \sum_n f_n''(x) g_{n,1}(0) &= \sum_n f_n''(x) g_{n,2}(0), \\ \phi_{1,xg}(x,0) + \sum_n f_n'(x) g_{n,1}'(0) &= \sum_n f_n'(x) g_{n,2}'(0), \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 u_{0,1} + \sum_n \{ \tilde{f}_n(x) g_{n,1}''(0) - \nu_1 f_n'(x) g_{n,1}'(0) + K_{n,1}(0) \} \\ = K \{ \sum_n \{ \tilde{f}_n(x) g_{n,2}''(0) - \nu_2 f_n'(x) g_{n,2}'(0) + K_{n,2}(0) \} \} + a - cy, \\ E_1 v_{0,1} + \sum_n \{ f_n''(x) g_{n,1}(0) - \nu_1 f_n'(x) g_{n,1}'(0) \} \\ = K \{ \sum_n \{ f_n''(x) g_{n,2}(0) - \nu_2 f_n'(x) g_{n,2}'(0) \} \} + b + cx \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

ここに、

$$K = E_1/E_2$$

であり、 $-(a_2 - a_1)$ 、 $(b_2 - b_1)$ および $(c_2 - c_1)$ は改めて a 、 b および c と書いた。また $y=2h_1$ および $y=-2h_2$ における境界条件は、

$$g_{n,1}(2h_1) = g_{n,2}(2h_1) = 0 \quad (6.33a)$$

$$g_{n,2}(-2h_2) = g_{n,1}(-2h_2) = 0 \quad (6.33b)$$

理論上は、(6.31) ~ (6.33)の条件式によって $g_{n,1}(y)$ および $g_{n,2}(y)$ における未定の係数を決定することができるのであるが、(6.32)式を完全に満足することは困難である。したがって、すでに述べたように、 $y=0$ 上の数個の点において(6.32)式が成立するように係数を定めることにする。つぎに数値計算例を示す。これらの計算では $n=8$ まで採用し、 $x=0, \pm 0.4, \pm 0.6, \pm 0.8, \pm 1$ の9点において(6.32)式が成立するようにした。

(2) $h_1 = \infty$, $h_2 = \infty$, $T = T_0$ (一定)の場合

この場合には、一様な温度上昇であるから、§5.2で述べたように、

$$\sigma_x = -\alpha_1 E_1 T_0, \quad \sigma_y = 0$$

$$\phi_1(x, y) = (\alpha_1 E_1 T_0 / 2) y^2, \quad \Omega_1(x, y) = 0$$

とおくことができる。(6.33)式が成立するためには、

$$C_{n,1} = D_{n,1} = 0, \quad A_{n,2} = B_{n,2} = 0 \quad (6.34)$$

すなわち、(6.24)式の $g_{n,1}$ は $e^{\alpha_n y}$ の項が、(6.28)式の $g_{n,2}$ は $e^{-\alpha_n y}$ の項が消滅すれば

より。また (6.31) 式より,

$$\left. \begin{aligned} A_{n,1} &= C_{n,2}, \\ -\alpha_n A_{n,1} + \beta_n B_{n,1} &= \alpha_n C_{n,2} + \beta_n D_{n,2} \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

なる関係が得られる。一方 (6.32) 式において, 原点における変位ならびに辺 AD の回転が零になるように常数を選ぶと, (6.32) 式において $a=b=c=0$ とする。そこで (6.32) 式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} &\alpha_1 E_1 T_0 X + \sum_n \left\{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) A_{n,1} - 2\alpha_n \beta_n B_{n,1} \right\} \tilde{f}_n(x) - \nu_1 A_{n,1} f'_n(x) \\ &= X \sum_n \left\{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) C_{n,2} + 2\alpha_n \beta_n D_{n,2} \right\} \tilde{f}_n(x) - \nu_2 C_{n,2} f'_n(x), \\ &\sum_n \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} (\alpha_n A_{n,1} + \beta_n B_{n,1}) \left\{ \{ f''_n(x) - f''_n(0) \} - \nu_1 (-\alpha_n A_{n,1} + \beta_n B_{n,1}) \{ f_n(x) - f_n(0) \} \right\} \\ &= X \sum_n \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} (\alpha_n C_{n,2} - \beta_n D_{n,2}) \left\{ \{ f''_n(x) - f''_n(0) \} - \nu_2 (\alpha_n C_{n,2} + \beta_n D_{n,2}) \{ f_n(x) - f_n(0) \} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (n=2, 4, 6, 8) \quad (6.36)$$

(i) $X=1, \nu_1=\nu_2=\nu$ のとき

このときは, 全く同じ材料でできた無限に長い帯が, $y=0$ にて一様な温度上昇を受けた場合に対応する。(6.35) および (6.36) 式から,

$$A_{n,1} = C_{n,2} = 0 \quad (6.37a)$$

$$B_{n,1} = D_{n,2}, \quad 4 \sum_n \alpha_n \beta_n \tilde{f}_n(x) B_{n,1} = \alpha_1 E_1 T_0 X \quad (6.37b)$$

となる。 $y=0$ 上の 9 点において (6.37b) 式が満足するように $B_{n,1} (=D_{n,2})$ を定めると, 表-6.1 の通りになる。

表-6.1 常数の値

($T=T_0, h_1=\infty, h_2=\infty, X=1, \nu_1=\nu_2$ のとき)

$X \alpha_1 E_1 T_0$	
n	$B_{n,1} = D_{n,2}$
2	0.123 505
4	0.013 075
6	0.002 009
8	0.000 982

係数が全部求められたので, 応力を計算することができる。矩形板 ABCD の応力分布を示すと附図-Ⅱ-6.1 の通りである。接線 $y=0$ 上においては, $\sigma_{x,1}$ は $-0.5 \alpha_1 E_1 T_0$ に近い値 (正解は $-0.5 \alpha_1 E_1 T_0$ である) であり, $\tau_{xy,1}$ はほぼ三角形に近い分布をしている。 $\sigma_{y,1}$ は $y=0$ 上では零であるが $y \neq 0$ では応力が現われ,

境界 $x=\pm 1$ ではかなり大きい応力を生じ, 点 $(\pm 1, 0)$ においては $-0.5 \alpha_1 E_1 T_0$ となることは注意すべきである。この結果は, G. Horvay が得たもの⁴⁾とよく似ていて, ここで示したような近似解析法が, かなり良好な精度を持っていることが明らかにされる。なお, 矩形板 ABCD

と ADEF との応力状態の間には,

$$\sigma_{x,2} = -\sigma_{x,1}, \quad \sigma_{y,2} = -\sigma_{y,1}, \quad \tau_{xy,2} = \tau_{xy,1}$$

のような単純な関係が成立する。そして応力状態は v に無関係である。

(ii) $\kappa \neq 1$, $v_1 = v_2 = 0$ のとき

相接している物体の弾性係数が異なった場合に、どのような応力が生ずるかと言明するために、 $\kappa = E_1/E_2$ が異なるときについて応力解析を行なうことにする。この場合には、(6.35) および (6.36) 式から、

$$p_n B_{n,1} = \alpha_n (3\kappa + 1/\kappa - 1) A_{n,1} \quad (6.38a)$$

なる関係が得られる。これを (6.36) の第 1 式に代入すると、 $A_{n,1}$ は

$$\sum_n \left[\left(\alpha_n^2 - \beta_n^2 \right) + 2\alpha_n^2 \left(1 + \frac{8\kappa}{(\kappa-1)^2} \right) \tilde{f}_n(x) \right] A_{n,1} = \frac{1}{\kappa-1} \alpha_n E_1 T_0 x \quad (6.38b)$$

このようにして、 $A_{n,1}$ および $B_{n,1}$ が得られると、(6.35) 式より $C_{n,2}$ および $D_{n,2}$ を求めることができる。

$\kappa = 0, 1/20, 1/10, 1/5, 1/2, 2, 5, 10$ および 20 のときについて、常数を求めた表 6.2 の通りである。

表-6.2 常数の値 ($T = T_0, h_1 = \infty, h_2 = \infty, v_1 = v_2 = 0$ のとき)

		κ, E_1, T_0					
$n \backslash \kappa$		0	1/20	1/10	1/5	1/2	1
$A_{n,1}$	2	-0.079 886	-0.078 905	-0.063 996	-0.043 705	-0.015 512	0
	4	-0.008 785	-0.006 996	-0.005 858	-0.004 051	-0.001 459	0
	6	-0.001 101	-0.000 883	-0.000 723	-0.000 499	-0.000 180	0
	8	-0.001 395	-0.001 133	-0.000 964	-0.000 666	-0.000 240	0
$B_{n,1}$	2	0.181 360	0.173 426	0.167 839	0.158 707	0.140 822	0.123 50
	4	0.022 402	0.021 597	0.021 577	0.020 659	0.018 607	0.013 075
	6	0.002 822	0.002 742	0.002 676	0.002 560	0.002 306	0.002 007
	8	0.003 407	0.003 351	0.003 401	0.003 252	0.002 925	0.000 982

附図-Ⅱ.6.2 には、この中の代表的なものについて、接続線 $y=0$ 上の応力分布を示している。これらの図において、応力分布曲線は幾分激しく波打っているが、応力係数の項数を多くとり、それに対応して変位条件を満足させる項を増加すれば、より精度のよい滑らかな曲線が得られるであろう。これらの図において注意すべきことは、応力を $\alpha_n E_1 T_0$ のように、矩形板 ABCD の弾性係数を基準として表わしているから、矩形板 ADEF の応力を E_2 を基準として

表わすときには、図に示した数値に $\gamma/\delta = E_2/E_1$ を掛けねばならないことである。

これらの図において明らかなのは、被拘束体の応力は、拘束体の弾性係数が減る（ γ が増大する）ほど小さくなることである。すでに述べたように、接続線上における $\sigma_{x,1}$ は $\gamma=1$ のときに $-0.5\alpha_1 E_1 T_0$ であるから、 $\sigma_{x,1}$ の絶対値は $\gamma < 1$ のときにはこれより大きく、 $\gamma > 1$ のときにはこれより小さい。 $\gamma=0$ のときは、§5.3において採用した条件と同じであるから、附図-11.5.1 と全く同じ応力状態を表すべきものである。 $\sigma_{x,1}$ および $\tau_{xy,1}$ の $y=0$ 上の平均値はほとんど両者同じであるが、本節で得た応力状態は第5章で得た結果ほど滑らかでない。辺 AD 上における σ_y は、すでに述べたように $\gamma=1$ のときには零であり、 $\gamma < 1$ か $\gamma > 1$ かに応じて、応力の符号が全く逆になることは注すべき点である。

(3) $2h_1 = \text{有限}, 2h_2 = \infty, T = T_0$ (一定) の場合

矩形板 ABCD の高さは有限であるが、ADEF は無限に大きいときを考え、 h_1 の大きさと応力状態との関係を調べることにする。一様な温度上昇であるから、 σ_x, σ_y, ϕ および Ω_1 は本節(2)と同じようにとればよい。

境界条件 (6.33) 式より、

$$\left. \begin{aligned} & e^{-2\alpha_n h_1} (A_{n,1} \cos 2\beta_n h_1 + B_{n,1} \sin 2\beta_n h_1) + e^{2\alpha_n h_1} (C_{n,1} \cos 2\beta_n h_1 + D_{n,1} \sin 2\beta_n h_1) = 0 \\ & e^{-\alpha_n h_1} \{ (-\alpha_n A_{n,1} + \beta_n B_{n,1}) \cos 2\beta_n h_1 - (\beta_n A_{n,1} + \alpha_n B_{n,1}) \sin 2\beta_n h_1 \} \\ & + e^{2\alpha_n h_1} \{ (\alpha_n C_{n,1} + \beta_n D_{n,1}) \cos 2\beta_n h_1 + (-\beta_n C_{n,1} + \alpha_n D_{n,1}) \sin 2\beta_n h_1 \} = 0, \\ & A_{n,2} = B_{n,2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

また、(6.31) 式より、

$$\left. \begin{aligned} & A_{n,1} + C_{n,1} = C_{n,2}, \\ & \alpha_n (-A_{n,1} + C_{n,1}) + \beta_n (B_{n,1} + D_{n,1}) = \alpha_n C_{n,2} + \beta_n D_{n,2} \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

原点における変位 w は辺 AD の回転が零になるように規定すると、(6.32) 式において、 $a=b=c=0$ である。したがって (6.32) はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \alpha_1 E_1 T_0 x + \sum_n \left\{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) (A_{n,1} + C_{n,1}) - 2\alpha_n \beta_n (B_{n,1} - D_{n,1}) \right\} \tilde{f}_n(x) - \nu_1 (A_{n,1} + C_{n,1}) f_n'(x) \Big\} \\ & = \gamma \sum_n \left\{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) C_{n,2} + 2\alpha_n \beta_n D_{n,2} \right\} \tilde{f}_n(x) - \nu_2 C_{n,2} f_n'(x), \\ & \sum_n \left[\frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \{ \alpha_n (-A_{n,1} + C_{n,1}) - \beta_n (B_{n,1} + D_{n,1}) \} \{ f_n'(x) - f_n''(0) \} \right. \\ & \quad \left. - \nu_1 \{ \alpha_n (-A_{n,1} + C_{n,1}) + \beta_n (B_{n,1} + D_{n,1}) \} \{ f_n(x) - f_n(0) \} \right. \\ & = \gamma \sum_n \left[\frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} (\alpha_n C_{n,2} - \beta_n D_{n,2}) \{ f_n'(x) - f_n''(0) \} - \nu_2 (\alpha_n C_{n,2} + \beta_n D_{n,2}) \{ f_n(x) - f_n(0) \} \right] \\ & \quad (n = 2, 4, 6, 8) \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

以上の8個の条件式を用いると、すべての常数を決定することができる。

ここでは $\nu=1$, $\nu_1=\nu_2=0$ とし、 $h_1=1/2$, $1/4$ および $1/8$ の場合について解析した結果を示すことにする。常数は表-6.3 に示すような値となる。

表-6.3 常数の値 ($T=T_0$, $h_2=\infty$, $\nu=1$, $\nu_1=\nu_2=0$ のとき)

		$X \propto E_1 T_0$		
$n \backslash h_1$		$1/2$	$1/4$	$1/8$
$A_{n,1}$		0	0	0
$B_{n,1}$	2	0.123 505	0.123 505	0.123 505
	4	0.013 075	0.013 075	0.013 075
	6	0.002 009	0.002 009	0.002 009
	8	0.000 982	0.000 982	0.000 982
$C_{n,1}$	2	-0.005 853	-0.016 475	-0.012 610
	4	0.000 002	-0.000 255	-0.000 809
	6	0	-0.000 002	-0.000 550
	8	0	0	-0.000 008
$D_{n,1}$	2	0.000 722	0.010 111	-0.000 008
	4	0.000 001	0.000 085	0.001 120
	6	0	-0.000 001	0.000 456
	8	0	0	0.000 001

この値を用いて応力を計算すると、附図-Ⅱ.6.3 に示すような応力状態が得られる。この場合には、本節(2)と異なつて、 $\nu=1$ のときでも、 $y=0$ 上にて σ_y が現われ、その値は h_1 が小さくなるほど大きい。しかし h_1 が極端に小さくなれば、 σ_y もまた小さくなるものと考えられる。 $1/8 < h_1/l < 1/2$ の範囲では $y=0$ 上における σ_x および τ_{xy} の値に大差有り。 τ_{xy} は h_1 が小さくなるとわずかに減じている。しかし h_1 が非常に小さくなると、すでに §5.3 で述べたように、これらの応力は急激に減小するものである。一般的には $h_1/l > 1/8$ 程度の寸法では、接線面上における σ_x および τ_{xy} は $h_1 \rightarrow \infty$ における値とほとんど等しいが、わずかに小さい程度である。しかしながら、 σ_y は h_1/l の大きさによってかなり異なった値をとるものである。

§ 6.4 一边で半無限板に接続した矩形板の熱応力状態

図-6.3

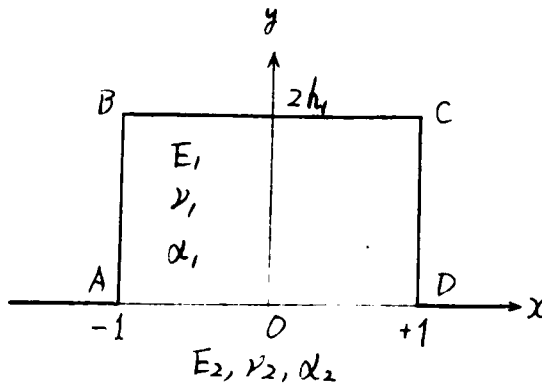


図-6.3に示るように、厚さ d 、幅 $2l=2$ 、高さ $2h$ の矩形板 ABCD が、同じ厚さの半無限板と、辺 AD において接続して、矩形板 ABCD が温度上昇 $T(x, y)$ を受けている場合を考える。座標軸のとり方、記号などはすべて前節と同じように選ぶと、矩形板 ABCD における応力函数、応力なりびに変位は (6.23) ~ (6.26) 式と同一である。つぎに半無限板におけるこれらの関係式を示すことにする。

(1) 半無限板の変位と応力

辺 AD における接続条件を書くためには、半無限板の表面の $-1 \leq x \leq 1$ の区間において、応力 $^* \sigma_{y,2}$, $^* \tau_{xy,2}$ が作用した場合の表面における変位を求める必要がある。以下には、 $^* \tau_{xy,2}$ による $^* \sigma_{y,2}$ による応力と変位の関係式を示すことにする。

図-6.4

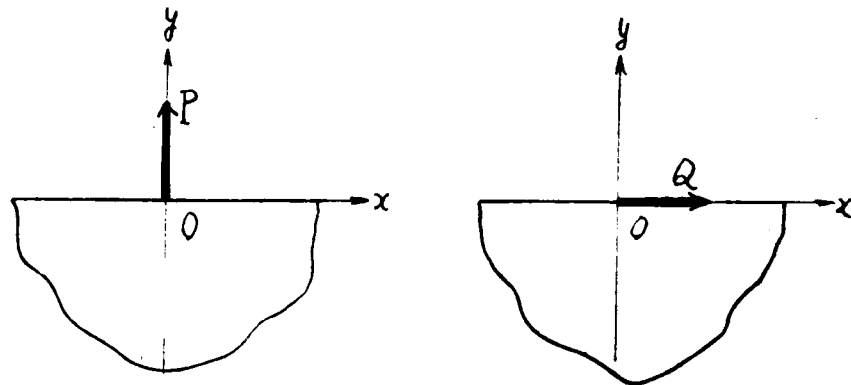


図-6.4において、原点における集中力 P (表面に垂直) および Q (表面に平行) が作用したときの応力なりびに $y=0$ における変位はつぎの通りである。ただし、変位の関係式においては、剛体的変位を表わす項は省略する。

P が作用したときには、

$$u_P = \pm \frac{1-\nu}{2E} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$v_p = -\frac{2P}{\pi E} \ln|x|, \quad (6.42)$$

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \quad (6.43)$$

• Q が作用したときには,

$$\left. \begin{aligned} u_Q &= -\frac{2Q}{\pi E} \ln|x|, \\ v_Q &= \mp \frac{1-\nu}{2E} Q, \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x < 0 \end{matrix} \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

$$\sigma_x = -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2Q}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \quad (6.45)$$

したがって, ${}^*\sigma_{y,2} = {}^*\sigma_{y,1}$, ${}^*\tau_{xy,2} = {}^*\tau_{xy,1}$ が作用したときには, 以下に示すような積分により変位と応力を求めることができる。

$${}^*u_2 = u_p + u_Q = \frac{1-\nu_2}{2E_2} \left\{ \int_{-1}^0 {}^*\sigma_{y,1}(\xi, 0) d\xi - \int_0^1 {}^*\sigma_{y,1}(\xi, 0) d\xi \right\} - \frac{2}{E_2} \int_{-1}^1 {}^*\tau_{xy,1}(\xi, 0) \ln|x-\xi| d\xi,$$

$${}^*v_2 = v_p + v_Q = -\frac{2}{\pi E} \int_{-1}^1 {}^*\sigma_{y,1}(\xi, 0) \ln|x-\xi| d\xi - \frac{1-\nu_2}{2E_2} \left\{ \int_{-1}^0 {}^*\tau_{xy,1}(\xi, 0) d\xi - \int_0^1 {}^*\tau_{xy,1}(\xi, 0) d\xi \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x,2} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 {}^*\sigma_{y,1}(\xi, 0) \frac{(x-\xi)^2 y}{\{(x-\xi)^2+y^2\}^2} d\xi - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 {}^*\tau_{xy,1}(\xi, 0) \frac{(x-\xi)^3}{\{(x-\xi)^2+y^2\}^2} d\xi, \\ \sigma_{y,2} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 {}^*\sigma_{y,1}(\xi, 0) \frac{y^3}{\{(x-\xi)^2+y^2\}^2} d\xi - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 {}^*\tau_{xy,1}(\xi, 0) \frac{(x-\xi)y^2}{\{(x-\xi)^2+y^2\}^2} d\xi, \\ \tau_{xy,2} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 {}^*\sigma_{y,1}(\xi, 0) \frac{(x-\xi)y^2}{\{(x-\xi)^2+y^2\}^2} d\xi - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 {}^*\tau_{xy,1}(\xi, 0) \frac{(x-\xi)^2 y}{\{(x-\xi)^2+y^2\}^2} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

(6.46) および (6.47) 式の被積分函数中における ${}^*\sigma_{y,1}(\xi, 0)$ および ${}^*\tau_{xy,1}(\xi, 0)$ は, (6.25) 式よりわかるように, $\Sigma f_n'(x)$ と $\Sigma f_n''(x)$ なる項を含んでいる。したがって, $f_n'(x)$ および $f_n''(x)$ の各項による定積分をそれぞれ独立して求めておけば便利である。 $f_n(x)$ は多項式であるから, この積分には, つぎの結果を利用することができる。

$$\int \xi^n \ln|x-\xi| d\xi = \frac{1}{n+1} \left\{ (\xi^{n+1} - x^{n+1}) \ln|\xi-x| + \sum_{m=1}^{n+1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} C_m x^{n+1-m} (x-\xi)^m \right\} + C$$

したがって,

$$\int_{-1}^1 \xi^n \ln|x-\xi| d\xi = \frac{1}{n+1} \left\{ \{1+x^{n+1}\} \ln|1-x| - \{(-1)^{n+1} - x^{n+1}\} \ln|1+x| \right.$$

$$+ \sum_{m=1}^{n+1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} c_m x^{n+1-m} \{ (x-1)^m - (x+1)^m \} \quad (6.48)$$

また,

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2y^2} \left\{ \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} + \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2} \right\} + \frac{1}{2y^3} \left\{ \tan^{-1} \frac{1-x}{y} + \tan^{-1} \frac{1+x}{y} \right\}, \\ I_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{(1-x)^2+y^2} + \frac{1}{(1+x)^2+y^2} \right\} + x I_0, \\ I_2 &= -\frac{1}{(1-x)^2+y^2} - \frac{1}{(1+x)^2+y^2} + (x^2+y^2) I_0, \\ I_3 &= \frac{x(x^2-3y^2)}{2y^2} \left\{ \frac{1-x}{(1-x)^2+y^2} + \frac{1+x}{(1+x)^2+y^2} \right\} + \frac{3x^2-y^2}{2} \left\{ \frac{-1}{(1-x)^2+y^2} + \frac{1}{(1+x)^2+y^2} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{(1-x)^2+y^2}{(1+x)^2+y^2} \right\} + \frac{x(x^2+3y^2)}{2y^3} \left\{ \tan^{-1} \frac{1-x}{y} + \tan^{-1} \frac{1+x}{y} \right\} \\ I_m &= \frac{1}{m-3} \left\{ \frac{1}{(1-x)^2+y^2} - \frac{(-1)^{m-1}}{(1+x)^2+y^2} \right\} - \frac{m-1}{m-3} (x^2+y^2) I_{m-2} + \frac{2(m-2)}{m-3} x I_{m-1} \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

$m > 4$ のときには,

(2) $h_1 = \infty$, $T = T_0$ (一定) の場合

前節と同様にして,

$$\phi_1(x, y) = \frac{\alpha_1 E_1 T_0}{2} y^2, \quad \Delta \phi(x, y) = 0, \\ c_{n,1} - D_{n,1} = 0$$

とおくことができ, 条件式 (6.15 b) は,

$$\left. \begin{aligned} &\alpha_1 E_1 T_0 x + \sum_n \left\{ (\alpha_n^2 - \beta_n^2) A_{n,1} - 2\alpha_n \beta_n B_{n,1} \right\} \tilde{f}_n(x) - \nu_1 A_{n,1} f_n'(x) \\ &= K \sum_n \left\{ (1-\nu_2) g_{n,1}(0) f_n'(x) + \frac{2}{\pi} g_{n,1}(0) \int_0^1 f_n'(\xi) \ln|x-\xi| d\xi \right\} + a - cy, \\ &\sum_n \left\{ \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} (\alpha_n A_{n,1} + \beta_n B_{n,1}) f_n''(x) + \nu_1 (-\alpha_n A_{n,1} + \beta_n B_{n,1}) f_n(x) \right\} \\ &= K \sum_n \left\{ (1-\nu_2) g_{n,1}'(0) f_n(x) + \frac{2}{\pi} g_{n,1}'(0) \int_0^1 f_n''(\xi) \ln|x-\xi| d\xi \right\} + b + cx \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

ここに, a, b および c は変位の基準座標のとり方によって定まる常数である。いまの場合では, y 軸に関して対称であるから, y 軸上において x 方向の変位が生じないものとする, $a = c = 0$ とする。

計算に際しては、 $v_1=v_2=0$ とし、前と同様に9点において(6.50)式を満足されるように、常数 $A_{n,1}$ および $B_{n,1}$ を定める。 $K=1, 5, 10$ の各場合について求めた結果は表-6.4に示してある。

表-6.4 常数の値 ($T=T_0, h_1=\infty, v_1=v_2=0$ のとき)

		$\alpha \alpha_1 E_1 T_0$		
n	K	1	5	10
$A_{n,1}$	2	-0.025 501	0.001 447	0.003 600
	4	-0.003 692	0.000 459	0.000 763
	6	-0.001 094	0.000 046	0.000 159
	8	-0.000 292	-0.000 041	-0.000 001
$B_{n,1}$	2	0.143 033	0.079 984	0.053 146
	4	0.023 564	0.015 701	0.010 742
	6	0.007 177	0.004 349	0.002 874
	8	-0.000 165	0.000 346	0.000 266

この値を用いて応力を計算すると、 $K=1$ のときには、附図-Ⅱ-6.4に示すような応力分布が得られる。また附図-Ⅱ-6.5には $K=1$ のときに、接続面上ならびに半無限体内部の応力状態を示している。 $K>1$ のときについて、接続面上の応力分布を比較すると附図-Ⅱ-6.6の通りである。

接続部における σ_x を考えてみると、 $K=1$ のときに、前節で示した(1)の矩形板が同じ幅のものに接続しているときには、その平均値は $-0.5\alpha_1 E_1 T_0$ であったが、本節のように半無限板に接続しているときには、その平均値は $-0.7\alpha_1 E_1 T_0$ 程度まで増加している。このように接続物が大ききときには、拘束を受ける度合が大きくなる。これに反して、半無限体においては、接続部における σ_x は $-0.5\alpha_1 E_1 T_0$ より小さくなる。 $K=1$ のときにおいても、前節の結果と比較すると、矩形板 ABCD の応力は、本節の場合の方が大きい。

接続部における σ_y をみると、 $K=1$ のときにはある程度の大きさを示し、点(±1, 0)においては大きい応力集中を示している。しかし、 $K>5$ 程度になると σ_y の符号は逆転し、応力値も無視してよいほど小さいものとなる。

$K=1$ のときにおける半無限体中の応力状態は、附図-Ⅱ-6.5に示すように、点(±1, 0)においては大きい応力集中を示すが、内部に入ると急激に応力は減衰する。 $y=-0.2$ の断面では σ_x の最大値は約 $0.3\alpha_1 E_1 T_0$ である。 $y=-0.5$ の断面においては、 σ_x は非常に小さくなるが、 σ_y はむしろ $y=-0.2$ の断面における値よりも大きくなっている部分のあることに注意すべきである。

矩形板の一面が半無限板に接続しているとき、ここで示したように矩形板に一樣な温度

変化を生じたときの応力状態につれて、後章において他の研究との比較を行なう。

第 7 章

熱応力問題の新光弾性実験法

前章までにおいて、種々な温度条件と単純な拘束条件に際して発生する熱応力状態について近似解を得たが、条件が複雑になると正確な解析を行なうことが困難である。また以上に得られた結果を実験的に検照することも必要である。そこで本章では構造物に発生する熱応力の実験的研究方法の1つとして、著者が考えた簡便な方法¹⁾を述べることにする。

§ 7.1 熱応力問題の実験法

熱応力問題を解くには、§1.2 において述べたように、 $^*p_x, \dots, ^*X, \dots$ などの力が加えられたときの問題あるいは喰違いの問題を解くことができれば解決される。したがって、M.M.Biot は、二次元の熱応力問題を研究するのに、載荷によっておよびあるいは喰違いの問題によって実験すればよいことを示している。²⁾ 載荷の問題を解析できれば問題が解決されるという実例は、すでに第2章以下において多数あげられている通りである。

現在、奥構造物および模型における応力測定においては、電気抵抗歪計と光弾性学的手法が広く用いられている。構造物および模型に直接温度変化を与えて熱応力の実験を行なうときには、まずオの困難は複雑な任意の温度条件を与えることにある。各種飛行体(航空機、ロケット、ミサイル等)あるいは原子炉などの熱応力状態の研究を進めるために、石英管電熱器を用いて大規模な実験が実施されている。³⁾ しかしこのような大規模な実験を行なうためには、多額の費用を要するのみならず、あらかじめ規定した温度条件を作り出すのは、温度条件が複雑であると、非常に困難である。一方、ダム模型の熱応力については、ポルトガルにおいて実験が開始された。^{4) 5)}

電気抵抗歪計を用いるときには、完全に温度補償を行なうのは非常に困難である。歪計および構造材料の温度特性を正確に知る必要のあることはもちろんであるが、各種の特性が正確に判明したとしても、温度変動のために補正を要する要素が増加するわけであるから、精度の低下することは避けられない。複雑な構造物の実物そのものについての実験に際しては電気抵抗歪計を用いるのがよいが、模

型実験を行なうときには、かなり大規模な設備により実験を実施する必要がある。

簡単な構造物または単純な構造部材の熱応力状態を実験的に求めるためには、光弾性実験が適当である。光弾性実験による熱応力問題の研究としては、焼嵌め、焼入れ⁶⁾、⁷⁾ 材料の硬化過程の利用⁸⁾ などの利用によって、古くから実験が行なわれてきた。最近では、異種の物体の接着⁹⁾ による実験および非定常温度場における実験的研究が行なわれた。¹⁰⁾ ¹¹⁾ 多くの実験では、光弾性材料が室温より低い温度においては性質が安定して実験に好都合であることから、室温から -40°C 程度におよぶ温度範囲において実験を行なっている。また、川本氏は応力のないう物体をすでに応力を凍結されている物体に接着し、これを焼鈍する過程における相互拘束によって生ずる応力の実験を行なった。¹²⁾ しかしながら、一般的には実験方法が面倒であるから広く実用に使われていない。

著者は凍結実験法が普及して、現在ではこの光弾性実験室においても凍結実験用の電気炉があることに着目し、新しい装置を使用せずに熱応力の光弾性実験を行なう法として、 70°C 付近から室温までの温度領域において実験するため基本的な問題について検討を加えた。その結果上記の温度領域では材料の性質が温度によっていくぶん大きい変動を示すので原理上は好ましくないが、実用上十分な精度が得られることが明らかになった。この実験方法は簡便であるので応用範囲はきわめて広い。なお、熱応力によって生ずる光弾性縞を凍結すれば、この縞次数から熱応力の解析が行なえる可能性のあることを実験的に明らかにした。この方法によれば、特殊な装置を用いることなく、三次元熱応力問題の研究が可能である。

§7.2 Epoxy 樹脂の性質

光弾性材料としては、わが国で広く利用されている Epoxy 樹脂である Araldite B (マックス Ciba 社製) を選んだ。この材料は感度、安定性、加工性などの点から考へて、熱応力実験に対してすぐれた材料の一つである。¹³⁾ 以下この材料の性質について、必要な範囲内で測定結果を示す。なお、接着のために Araldite D も、等傾線を求めるために、ときには Plexiglass を用いたので、これらの材料の性質も同時に示すことにする。アメリカで使用されている材料の性質は H. Trampusch およ

び G. Gerard が調べている¹⁴⁾。その結果より, Epoxy 樹脂がすぐれた材料であることを指摘している。

凍結実験用炉中に供試体を置くとときには, 供試体の温度を正確に知るために, 熱電対を埋めた温度測定用試験片を供試体の近くに配置し, この熱電対の読みを供試体の温度とした。

以下に示す性質は同一種類のものでも幾分差を生ずることがある。同一条件で供試体を製作して, 原材料が同じ包装に属する場合とか長期間保存しておいたものについては, あらためて性質を検定しなければならないことは通常の先弾性実験における注意と同様である。以下に示す結果は長期間にわたる実験値をまとめたものであるから, 材料の性質は必ずしもここで述べる数値とは等しくない。

(1) 弾性係数

弾性係数は Martens の光学的歪計を用い引張試験により測定し, 比較のために単純バリの曲げによるタフミ量から求めた。曲げ試験による方が弾性係数は小さい値となった。引張試験により得られた弾性係数 E の値を附図 II.7.1 に示す。いずれの材料においても, 室温以下においては温度による弾性係数の変動がわずかであるが, 室温より高い場合には温度とともに弾性係数の減少が顕著である。とくに Araldite D においては 50°C 付近から急激な弾性係数の減少がみられる。

またこれらの材料は温度が高くなるとクリープが著しくなる。Araldite D においては室温程度においてもクリープが認められる。Poisson 比の大きさは 0.358 である。

(2) Material fringe value

material fringe value f は曲げ試験によって決定し, 参考のために引張試験も行なった。表-7.1 に示すように, 曲げ試験による方がわずかに大きい値を示した。附図-II.7.2 は Araldite B の f と温度との関係を示したものである。 f の値は室温以下では非常に安定しているのみならず, 室温近くでも温度による f の変動はわずかであるから, 温度制御を行っていない室温に材料を露出して実験を行なった場合でも, わずかな温度変化であればその都度 f の値を変えて実験値を解析する必要はない。

表-7.1 引張試験と曲げ試験による f の比較
(Araldite B, 18 °C)

引張試験	10.54 kg/cm
曲げ試験	10.89 kg/cm

(3) 熱膨張係数

材料の熱膨張係数を求めるためには石英の熱膨張係数と比較した。そのためには、第1の方法として、附図-Ⅱ-7.3に示すような装置により各種材料の温度と伸びの関係を求めた。第2の方法としては、凍結実験用炉中に供試体を入れ、これにMartens光学的歪計をとりつけて供試体とMartens歪計との間の熱膨張係数の差を測定した。このときに使用したMartens歪計そのものの熱膨張係数は石英棒にMartens歪計をとりつけて求めた。これら2種類の方法によってほとんど同一の結果を得ることができた。使用した各種材料の熱膨張係数は表-7.2に示す通りである。

表-7.2 熱膨張係数

材 料	熱膨張係数(°C ⁻¹)	温度範囲(°C)
Araldite B	65.1×10^{-6}	16 ~ 90
Araldite B	167×10^{-6}	120 ~ 150
Araldite D	96.7×10^{-6}	15 ~ 67
鋼	10.7×10^{-6}	15 ~ 135
Araldite 121 B	87.4×10^{-6}	15 ~ 67

Araldite Bの熱膨張係数は110°C付近に存在する転移領域の上下においていちじろしい相違のあることが明らかになった。しかし、いずれの温度領域においても熱膨張係数は温度と関係せず一定と考へてよい。

Epoxy樹脂のような熱硬化性樹脂は、転移領域において組織に変化を生ずるために、転移領域よりも高低のそれぞれの温度領域において、非常に性質が異なる。弾性係数、Poisson比、電気伝導度、比熱などの多く

の特性が著しく変化することはすでに明らかにされているところである。Araldite B については、これら二つの領域において、熱膨張係数に差が生ずることを判明したわけである。

§ 7.3 新しい熱応力の光弾性実験法

Araldite B にかぎらず、現在使用されている光弾性材料は、いずれも前節に示したような傾向に従って温度とともに性質が変化する。室温以下においてはこの変動が非常に小さく、これまでの実験では好んで室温以下の領域において熱応力の実験が行なわれてきた。この低い温度領域における実験では、温度による材料の性質の変化を考慮に入れずとも実験結果に生ずる誤差はきわめて小さい。しかしながら、特殊な実験装置を必要とするのみならず、材料の脆性が増し、破損を生ずることもある。¹⁵⁾ そこで、室温より高い温度領域(転移領域より幾分低い温度まで限定する)において実験する場合について、応力と発生高次数との間の関係について考察を加えることにする。なお、凍結実験法についても基本的な性質を調べた結果を述べる。

(1) 基本関係

転移領域より低い温度においては、材料の熱膨張係数は一定と考える、簡単のために機械的ならびに光学的クリープを生じないものと仮定する。このときに両端が固定された細長い棒が、温度 T において dT の温度変化を受けたときに生ずる軸応力の差は、 α を熱膨張係数とすると、

$$d\sigma = -\alpha E(T) dT \quad (7.1)$$

によって与えられる。したがって、 T_1 より T_2 ($T_1 > T_2$) まで温度変化を生じたときに生ずる軸応力はつぎのようになる。

$$\sigma = \alpha \int_{T_2}^{T_1} E(T) dT \quad (7.2)$$

しかしまた f も温度とともに変化するため、温度 T において $d\sigma$ の応力変化を生じたときに、単位厚さ当りに生ずる高次数の変化 dN_0 は

$$dN_0 = \frac{|d\sigma|}{f(T)} = \left| \alpha \frac{E(T)}{f(T)} \right| \quad (7.3)$$

となる。したがって、 T_1 から T_2 まで温度変化を受けたときに、単位厚さについて現われる高次数は次式によって示されることになる。

$$N_0 = \left| \alpha \int_{T_2}^{T_1} \frac{E(T)}{f(T)} dT \right| \quad (7.4)$$

一方 E, f が温度にかかわらず一定であると仮定すると発生係数 N'_0 は次式によって求められる。

$$N'_0 = \left| \alpha (T_1 - T_2) \frac{E}{f} \right| \quad (7.5)$$

そこで、附図・II・7.1 および II・7.2 を参照して、 E および f の値はつぎのような2次曲線によって表わすことにする。

$$E(T) = -1.20T^2 + 14.0T + 29200, \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (7.6)$$

$$f(T) = -0.0002T^2 - 0.0010T + 11.08, \quad (\text{kg/cm}) \quad (7.7)$$

ここに T は $^{\circ}\text{C}$ による温度を表わすものである。これらの値を (7.4) 式に代入し、(7.5) 式においては、 E および f の値として 20°C の値を用いて、 $T_1 = 70^{\circ}\text{C}$, $T_2 = 20^{\circ}\text{C}$ するときの N'_0/N_0 を計算してみると、

$$\frac{N'_0}{N_0} = 1.03 \quad (7.8)$$

となって N_0 と N'_0 との差はきわめてわずかである。このように、 70°C 付近より室温まで下げた実験において、実用上は、 E および f の値は一定であると考え、室温におけるこれらの値を用いて発生係数を計算できることがわかる。したがって、このような温度領域における実験においては、単位厚さ当りに生じた係数に室温で測定した f を乗じて得られる応力は、 E が一定値、すなわち室温における値（もちろん α は一定と考えている）であるような物体の熱応力と考えてよい。

N_0 と N'_0 との値がほとんど等しいことは、室温よりも温度が上昇しても E, f とともに同様な傾向で減少するので、(7.4) 式における E/f が温度によらず大差のないことより容易に想像される。 E/f が温度にかかわらず一定値を示すような材料があれば実験に最も好都合なわけである。しかしながら材料が力学的あるいは光学的なクリープを生ずる場合には、(7.4) 式のような簡単な関係が得られず、発生係数は必然的に減ることになる。このようなクリープは温度が室温より高いときにはかなり顕著であるから、以上のような論議のみでは簡単に実用に供されるとはいえない。拘束された物体を高温から室温まで冷却した場合の熱応力の発生過程を考えると、高温においては発生応力が小さいので、クリープが激しくてこれによって応

力ならびに繰り上げの減する量は、室温まで温度が下ったときに生ずる繰り上げに比べて比較的小さいのではないかと考えられる。したがって実際に(7.8)式のように N_0'/N_0 が 1 に近いか、またクリープの影響が無視できる程度かどうかを実験的に検討することにした。

(2) 二次元実験

両端を鋼材に固定した細長い棒について実験を行ない、その結果得られた単位厚さ当りの繰り上げ N_0 と計算によって求めた N_0' との値を比較した。両端を固定するには、機械的に締結すること考えられるが、各種の実験を行なう場合に、接着することができれば便利であることを考え、接着方法についても検討した。目的で、Araldite B と鋼材とを接着することにした。通常の接着材は材質が非常に軟かくクリープも大きいので好ましくない。ここでは、やはり Epoxy 樹脂を用いることにし、Araldite D と 121 の両者の性質を調査したがいずれの材料でもかなり大きいクリープを示す。たとえば Araldite D を 125°C で 15 時間硬化させたものの力学的クリープ(クリープ歪/弾性歪)は附図-II-7.4 に示す通りである。同図には Araldite B のクリープも示しておいた。光学的クリープは比較的小さい。熱膨張係数は表-7.2 に示した通りである。実験結果によればこのどちらを用いてもほとんど同様な繰り上げが得られたので、Araldite D を用いて接着することにした。

実験には附図-II-7.5 に示す寸法のものを用い、接着温度を $70\sim 40^\circ\text{C}$ とし、6～15 時間経過して Araldite D が硬化した後 25°C まで冷却し、棒に発生した繰り上げを測定した。その結果は表-7.3 に示す通りである。

表-7.3 両端固定棒に生ずる繰り上げ

温度範囲($^\circ\text{C}$)	40～25	50～25	60～25	70～25
K_α ($\text{cm}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$)	0.158	0.159	0.159	0.153

ここに、 K_α は温度差 1°C に対して厚さ 1cm 当りに生ずる繰り上げ、すなわち

$$K_\alpha = \frac{N_0}{T_1 - T_2}$$

であって、熱応力実験に関する適正係数¹⁶⁾である。換言すれば、熱応力の実験に関する感度を表わす数値である。一方この材料はクリープを生じないとする

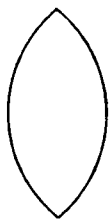
と、適正係数 K'_α は (7.5) 式よりつぎのようにして計算することができる。

$$K'_\alpha = \frac{N'_0}{T_1 - T_2} = (\alpha - \alpha_s) \frac{E}{f} = 0.156 \text{ cm}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$$

ここに, $E = 32100 \text{ kg/cm}^2$ (25°C にて), $(\alpha - \alpha_s) = 53.4 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ (Araldite B と鋼との熱膨張係数の差) である。この値は表-7.3 に示した実験値とほとんど一致しており, 接着およびクリープの影響は無視しうることがわかる。接着層はきわめて薄いため, 接着剤のクリープ, 弾性係数, 熱膨張係数などの値の相違が実験結果にほとんど影響を与えない。

両端固定棒の実験において, 室温まで冷却後長時間放置してもほとんど光学的クリープは認められなかった。また, 接着後室温まで下げたものについて, 数回接着温度と室温との間の温度サイクルをくり返したが発生縞次数に変化は認められなかった。たとえば, 図-7.1 に示すようなレンズ状の断面

図-7.1



を持った棒の両端を 70°C にて固定し, 28°C まで温度を下げると, 附図-II-7.6(a) のような等色線が得られる。これをさらに 70°C まで温度を上げて, 1 時間経過してから 28°C まで下げると, 同図(b) のような等色線が得られる。こうして 3 回目, 4 回目の等色線として得られたものが同図の(c)および(d)である。これらの等色線の間にはほとんど縞次数の差が認められないう。

$K_\alpha = 0.16 \text{ cm}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ とすると, 厚さ 1 cm の両端固定棒が 40°C の温度差をうけるときに現われる縞次数は, $0.16 \times 1 \times 40 = 6.4$ (次数) となる。したがって室温から 60°C くらいまでの温度領域において実験を行なえば, 応力解析に適する程度の縞次数が得られる。またこの温度領域では温度制御も非常に簡単である。そして接着が可能であるため種々な形状ならびに拘束条件に関する実験を行なうのに便利である。ただし Araldite D を接着材として用いたときには, 附図-II-7.1 に示すように 60°C 近くでは Araldite D の弾性係数がいちじるしく小さくなるので, 接着する場合には 60°C 以上に温度を上げることは好ましくない。

つぎに, 実例として, 外周も鋼材によって固定された薄い円環に発生する熱応力の実験を行ない計算値と比較した。

図-7.2 に示すように, $r=b$ にて 2 種の材料が
接続しているとき,

$$\frac{a}{b} = \beta, \quad \frac{c}{b} = \gamma$$

とおくと, T_1 から T_2 まで温度変化を受けたとき, 内
側の円環に生ずる主応力差は次式によって与えられる。

$$\sigma_r - \sigma_\theta = (\alpha - \alpha_s) E (T_1 - T_2)$$

$$\times \frac{2(\gamma^2 - 1)}{(\gamma^2 - 1)\{(1-\nu) + (1+\nu)\beta^2\} - (\beta^2 - 1)\{(1-\nu_s) + (1+\nu_s)\gamma^2\} E/E_s} \left(\frac{a}{r}\right)^2$$

$E/E_s \ll 1$ とすると,

$$\sigma_r - \sigma_\theta = (\alpha - \alpha_s) E (T_1 - T_2) \frac{2}{(1-\nu) + (1+\nu)\beta^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \quad (7.4)$$

ここに, 添字 s は鋼材をあらわす。

実験には $b = 60 \text{ mm}$, 厚さ 5.9 mm の寸法のものをを用いた。附図 II-7.7 に
得られた等色線を示すものである。この実験と同時に, 両端を鋼材に固定
した棒に関する実験を行なって, その結果得られた縮次数 N_0 と円環に生
じた縮次数 N'_0 と比較して, 円環の熱応力を求めた。すなわち,

$$N_0 = (\alpha - \alpha_s) E (T_1 - T_2) / f$$

によって表わされるから, 縮次数 N'_0 のときにおける主応力差は

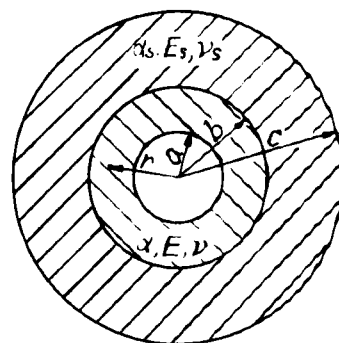
$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{N'_0}{N_0} (\alpha - \alpha_s) E (T_1 - T_2)$$

によって与えられる。附図-II-7.8 はこのようにして得られた結果を (7.4) 式の計
算値と比較したものであって, かなり良好な結果が得られている。ただし,
 $\nu = 0.3$ とした。

(3) 凍結実験

前節で述べた実験方法によれば, 室温において縮次数の測定を行なうこと
が可能であるので, 収斂光法または散乱光法によく三次元構造物の

図-7.2



模型実験を行なうのに好都合である。しかしながら、そのためには特殊な装置を必要とするので、これを避け、かつ広範な三次元模型実験を行なうための方法として、熱応力を凍結する方法について検討を加えた。

材料が転移領域を越えた温度にあるときは、絶対温度を K とするとき、

$$E = AK, \quad f = BK, \quad (A, B \text{ は比例常数}) \quad (7.10)$$

なる関係が成立する¹⁷⁾から、縮次数は、

$$N_0 = \left| \alpha \int_{T_2}^{T_1} \frac{E}{f} dT \right| = \left| \alpha \frac{A}{B} \int_{K_2}^{K_1} dK \right| = \left| \alpha \frac{A}{B} (K_1 - K_2) \right| \quad (7.11)$$

といふような簡単な関係によって生ずることになる。しかしながら、この縮次数を凍結する場合には、常温に達したときに凍結されている縮次数は、(7.11)式で得られる値とは全く異なることを考えられるのみならず、その縮はクリープを起すことも予想される。もしこの現象が生ずるとして、実験条件を規定したときに、材料の単位厚さ当りに対して凍結される縮次数 N_0 と弾性学上の計算より得られる応力のとの間に、

$$\sigma = K_T N_0, \quad (K_T \text{ は比例常数}) \quad (7.12)$$

なる比例関係が成立するならば、いままで行なわれてきた通常の凍結実験法と同様に、三次元熱応力の模型実験法として、熱応力の凍結実験法がきわめて有効の方法となる。

まず、両端を固定された棒について、凍結温度と縮次数との関係を求めてみた。接着剤としては Araldite B を用い、附図-II・7.5 と同じようにして鋼材に接着し、長時間接着温度に保って接着完了後規定の速度で徐冷した。常温に達してから Araldite 棒を鋼材から切離し、20分後に観測した単位厚さ当りの凍結縮次数 N_0 は附図-II・7.9 の通りであった。この図によると、凍結縮次数と凍結温度はほぼ直線的な関係にあり、 $K_2 = 100 \sim 105^\circ\text{C}$ と考えることができるようである。ただし切断した後には、附図-II・7.10 に1例を示すように、縮次数にかなりいちじらしいクリープが認められる。したがって冷却過程、切断時刻、等色線測定時刻などを規定する必要がある。

一定温度で凍結した場合に、(7.12)式が成立し、 K_T なる比例常数が存在すれば、熱応力の凍結実験を行なえるわけである。そこで前節で行った実験と同様に、棒の両端および円環の外周を鋼材に接着固定し熱応力の実

験を行なつて、(7.12)式が成立するかどうかを検討した。附図-II-7.11は円環に凍結された等色線を示すものである。棒および円環に凍結された単位厚さ当りの繰次数を N_0 および N'_0 とすると、(7.12)式が成立する場合には、

$$\sigma = K_T N_0, \quad (\sigma_r - \sigma_\theta) = K_T N'_0$$

$$\therefore (\sigma_r - \sigma_\theta) / \sigma = N'_0 / N_0 \quad (7.13)$$

一方図-7.2において内側円環の性質が α_0, E_0, ν_0 で"あるとし、 $E_0/E_s \ll 1$ とすると、 $(\sigma_r - \sigma_\theta)$ に対して(7.9)式を用いることにより、(7.13)式に示した応力の比は理論上つぎのような関係となる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\sigma} &= \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\alpha_0 E_0 (T_1 - T_2)} = \frac{2}{(1 - \nu_0) + (1 + \nu_0)\beta^2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \\ \text{ゆえに、} \quad \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\alpha_0 E_0 (T_1 - T_2)} &= \frac{N'_0}{N_0} = \frac{2}{(1 - \nu_0) + (1 + \nu_0)\beta^2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \quad (7.14) \end{aligned}$$

$\nu_0 = 0.5$ と仮定し、(7.14)式によって計算式と実験値を比較すれば、附図-II-7.12に示す通りである。この図によれば、実験値の方が幾分大きくなっている。この原因は $\nu = 0.5$ という仮定が誤りではな"いかと考えられるが、 $\nu < 0.5$ とすれば附図-II-7.12の計算値はさらに小さくなり、 $\nu > 0.5$ ということはず"起りえないから、全く別な原因によるものである。そこで(7.12)式における K_T が同一凍結温度、同一温度経歴においても一定値を示さな"ることに起因するのでな"いかと考えられる。棒の両端を固定した場合の凍結繰模様は附図-II-7.13(a)に示すようにきわめて整然と現われるのが普通であるが、ときには、附図-II-7.13(b)に示すように、同一断面の棒において繰次数が横断面の位置によって異なるというような不合理な結果の得られる場合もあった。このようなことから、 K_T が一定値を示すかどうかという点についてさらに研究しなければならない。この点については、材料の応力が次第に増加しつつ高温から転移領域を越えて常温に達する過程における先弾性繰の発生機構について考察を加えるとともに、実験によって詳細に検討する必要がある。また $\nu = 0.5$ とした仮定についても適否を確かめる必要がある。しかしながら、附図-II-7.11(a)およびII-7.12(a)においては比較的よい実験結果の得られていることから、十分注意して実験を行なえばかなり満足すべき結果が得られるものと思われる。

(4) 実験法に対する考察

一般に、光弾性材料は室温より低い温度領域では温度によって弾性係数および fringe value の変動することが小さいが、室温より高い温度領域においてはこれらの値の変動が大きいのみならずクリープもいちじるしくなるので、原理的にはなるべく低温で熱応力の実験を行なうのが望ましい。しかしながら、低温装置を必要とすること、低温では材料の脆性が増すこと、恒温装置中に模型を設置して光弾性縞の測定を行なわねばならないことなどの不便が多い。そこで、原理上好ましくないが、実用上の便宜を考えて、室温以上において熱応力の実験を行なうことについての精度を検討した結果、十分満足すべき精度の得られることが明らかになった。この方法においては接着を行なうことが可能で、特殊な装置を要しないこと、室内に模型を露出して光弾性縞の測定を行なうことなどの便宜が多い。とくに、模型の周囲に測定の支障となるものが存在しないので、三次元模型に対して収斂光法または散乱光法を適用するのにきわめて便利である。したがって、この方法の応用範囲は極めて広いものである。

ここでは材料の Poisson 比については測定を行なっていないので、Poisson 比の大きさを仮定して計算値と比較したが、温度とともに Poisson 比は幾分変化しする。ことに凍結された縞は、Poisson 比がいくらの値の応力に対応するものであるかという点について全く考察を加えていない。より厳密な検討を加えるためには、Poisson 比の大きさについての考察を省くことはできない。

熱応力によって生ずる光弾性縞を凍結する実験を行なった結果によれば、かかる縞の発生過程は非常に複雑であるが、凍結された系高次数と弾性学上の計算応力との関係は、近似的に比例関係が成立すると考えてよいように思われる。この関係については、今後なお詳細な研究を行なう必要がある。凍結された縞には光学的クリープが認められるので、実験に際しては温度経歴、切断時刻ならびに等色線測定時刻などの実験条件を規定する必要があるが、上述のように系高次数と応力との間に比例関係が成立するときには、熱応力の模型実験法としてここに述べた方法はきわめて有効である。

第 8 章

光弾性実験による熱応力の研究

前章に述べた方法によれば、特殊な装置を用いることなく、光弾性学的に比較的良好な精度で熱応力の研究を行なえる。この方法はとくに拘束された物体における熱応力状態を知ることが便利である。そこで、まず第5章および第6章における近似解析の結果を参照することにした。

§ 8.1 研究の概要

実験的な研究方法は、解析の困難な問題に適用して最も効果がある。すべてのダム の横断面は、図-8.1に示すように、三角形ないし梯形に近い形をしていて底面が拘束されている。また一つのブロックの縦断面は、河心部を除くと、図-8.2のように、基礎が傾斜しているために三角形または梯形となる。このような場合の熱応力状態の解析は面倒であるから、単純化した三角形または四角形の場合について、光弾性実験により応力状態の研究を行なうことにした。

高さが無限に大きい三角形（すなわち無限大の楔）の応力状態を解析しようとすると、多くの書物に示されているように、極座標で表わされた通常の応力函数を用いれば簡単に解決することができると。しかしながら、図-8.3のように、有限な三角形が辺ACにおいて他の物体に拘束されている場合には、応力解析を行なうのは困難である。

問題の解決が困難な理由は、矩形板の場合と同様に、通常の応力函数では、

図-8.1

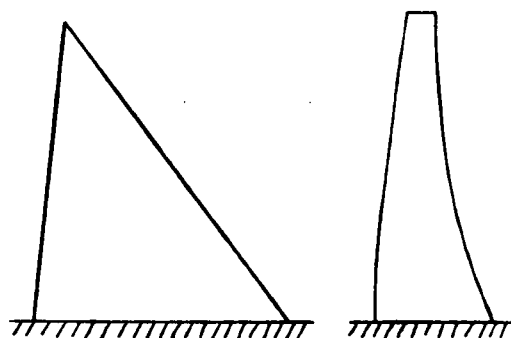


図-8.2

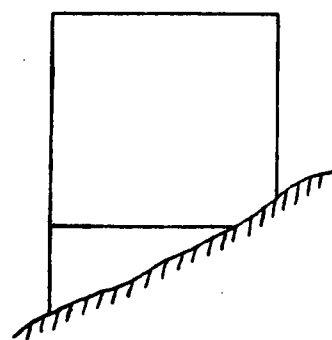
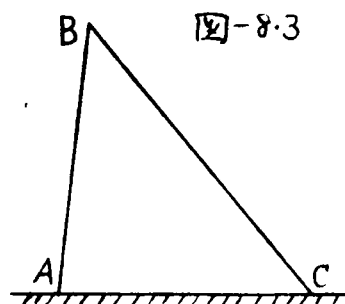


図-8.3



辺ACにおける条件を満足することができないためである。古くにはB.F. Jakobsen が歪エネルギー最小の原理を用いてこの問題を解いた。¹⁾ しかしながら、任意の水平断面より上部に与えられる歪エネルギーが最小の状態が真の釣合状態であると考えたことと、F. Vogt が指適しているように、三角形の頂点Bからの放射線上では、応力の大きさが頂点からの距離に比例すると仮定しているから²⁾、はなはだ不完全な解である。辺ACにおける条件を正確に満足させようとすると、J.H. A. Brahtz が導いた応力函数³⁾を用いればよい。この函数は級数で表われ、複素数が導入されるので計算が面倒である。その結果、級数において採用する項数が少なくなり勝ちであり、したがって精度を向上し難い欠点がある。最近ではJ.K. Silverman がポテンシャルエネルギー最小の原理を適用して、辺ACの条件を取り入れた近似解を求めた。⁴⁾

これらの方法によって、一辺が拘束された三角形板の熱応力解析は不可能ではないが面倒な計算を実行する必要がある。しかしながら、系統的に変化した各種の形状の三角形板および四角形板の光弾性実験は、組織的な一連の実験によって便利に実施することができる。そこで、基本的な形状の一辺が固定された三角形板および四角形板については、もっぱら光弾性実験によって熱応力解析を行なうことにした。

温度変化が一様でなく複雑な形である場合には、第2章～第5章で示したように、一様な温度変化の場合の応力状態が判明していれば、比較的簡単かつ正確に、これらの複雑な温度変化に対する応力を知ることができる。したがって、本章においては、一様な温度上昇を受けるときのみについて実験を行ない、形による応力状態の差異を調べることにする。

§8.2 一辺固定の矩形板

(1) 実験方法

前章で述べたように、Araldite Bと鋼とにおいては弾性係数に大きい差があるので、Araldite製のものが鋼材に接着されているときには、Araldite製の物体は鋼材に完全に固定されていると考えてよい。したがってAraldite製の矩形板ABCDを、辺ADにおいて鋼材に接着し、これに一樣な温度差を与えるこ

とにした。模型寸法は図-8.4に示す通り、巾 $2l = 50$ とし、高さは $2h = (4 \sim \frac{1}{16})l$ ($h/l = 2 \sim \frac{1}{32}$) の範囲で変化させた。厚さは Araldite B と鋼材ともに 0.59 cm である。

模型材料の性質は表-8.1に示す通りである。Araldite B については表-7.1～7.3に示した値と少し異なっている。

図-8.4

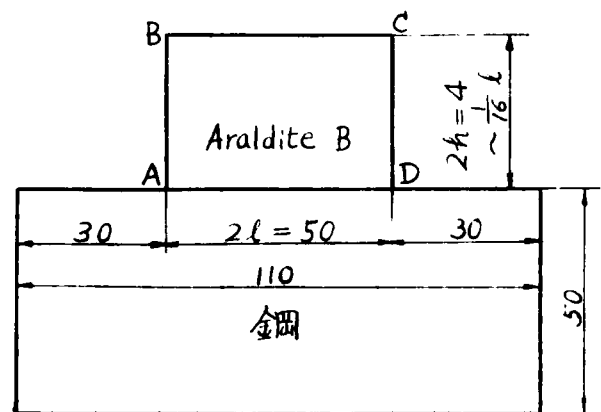


表-8.1 材料の性質

材 料	熱膨張係数 ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	弾性係数 (kg/cm^2)	Fringe Value (kg/cm)
Araldite B	$\alpha = 62.3 \times 10^{-6}$	$E = 28.4 \times 10^3$	10.7
鋼	$\alpha_s = 10.7 \times 10^{-6}$	$E_s = 2100 \times 10^3$	

まず、 62°C において、所定の形に作り上げた矩形板と、Araldite B と鋼板に接着し、接着完了後 $15^{\circ}\text{C} \sim 17^{\circ}\text{C}$ の浸漬液中に入れ、通常の光弾性装置によって等色線ならびに等傾線を観察した。これを詳しく述べる、まず、Araldite B および鋼材を所定の形に作り上げ、両者の被接着面に Araldite D を塗布して密着し、あらかじめ 62°C の恒温を保つように調整した凍結実験用の炉に投入する。数時間 62°C に保っておくと、Araldite D が硬化して接着が完了する。この間、実験模型と同じ厚さの温度測定用試験片（熱電対を埋めこんであるもの）を、実験模型の近傍に置いて、埋め込まれた熱電対によって温度測定を行なった。接着完了後は、室内の空気に露出して等色線ならびに等傾線の観察を行なうことができるが、模型の温度をなるべく均一に保ち、変動を少なくし、かつ測定が容易なように浸漬液に入れることにした。ここに、浸漬液とは、模型と光の屈折率が等しい液体の意味であり、ここでは α -モノブromサフタリンと流動パラフィンとの混合物を用いた。一連の実験を実施中に、浸漬液の温度は $15^{\circ} \sim 17^{\circ}\text{C}$ の間にわたって変動した。

同一の模型を3個作って同時に実験し、ばらつきが大きいかわ調べた。上記のように $h/l = 2 \sim \frac{1}{32}$ の多数の模型の実験を、系統的に一連の実験で

済むためには、つぎの如くすればよい。すなわち、まず最も h/l の大きいもの ($h/l=2$) について、接着後に常温まで冷却して観察する。すると、つぎにはこの模型を順次削って h/l を小さくし、そのまゝ常温において観察すればよい。このように、ただ一度たり高温において接着すれば、その後は模型を削って所定の形に仕上げるのみで、一連の実験を円滑に実施することができるから非常に便利である。

(2) 実験結果

等色線および等傾線の例を示すと附図-Ⅱ・8・1 および Ⅱ・8・2 の通りである。附図-Ⅱ・8・3 は主応力線を描いたものである。これらの図によれば、 $h/l = \frac{1}{2}$ のときには、矩形板の中央に特異点が存在し、これによって 2 分された上下の部分は縁応力の符号の異なることゝわかる。したがって、このときには底辺と上辺における縁応力の符号が異なる。しかしながら $h/l \leq \frac{1}{4}$ の図を見れば、底辺と上辺中央部においては縁応力が同符号であることは明らかである。このときは、すでに §5.3 において、解析結果によって明らかにされた事項と全く同じである。

以上の資料を用いると、縁応力のみならず内部応力も解析することができる。内部応力は shear-difference method^{5) 6) 7)} によつた。その結果は附図-Ⅱ・8・4 に示す通りである。ただし、いまごと同様に一様な温度上昇を T_0 とし、応力を $\alpha E T_0$ で割つて無次元化して示してある。これらの実験では、材料の Poisson 比は約 0.3 であり、平面応力状態を示しているものである。それゆゑ、附図-Ⅱ・5・3 の計算値と対応するものであるから、これらの図には実験値も示しておいた。両者の応力値がよく一致していることから、計算ならびに実験ともに満足すべきものであることがわかる。ただ自由な側辺における周辺応力 σ_y は相違が著しい。隅角の点 A および D における応力値は、元来正確に求められるものではないが、読み取りうる最大縮小次数から求めた値を示したものである。この隅角において、 $n=6$ まで採用したときの計算値よりかなり大きい値となっている。

実験値は計算値よりもはるかに単調な曲線となっている。計算においては、応力函数の項数を多く採用すれば、滑らかな曲線になることはすでに 5 章において示した通りである。実験の結果は計算値と非常によく一致を示しているため、ここでは応力状態についての説明を省略することにする。

§ 8.3 一辺弾性拘束の 矩形板

(1) 実験方法

図-8.4 において, 辺 AD を弾性拘束された場合について, 前節のように直接温度差を与えたときの相互拘束による応力状態を求めようとする, 矩形板に接着されるべき物体は, 規定の弾性係数を有し, 熱膨張係数が Araldite B と非常に異なる材料で作らなければならない。實際上興味のある $\kappa = E_1/E_2$ (第 6 章参照) の範囲は 0 ~ 10 程度である。一方, 実験上好都合な材料は熱膨張係数が約 $10 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 以下あるいは $100 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 以上のものである。これらの条件を満足し, 温度に対して安定した良好な弾性体を得ることは困難である。そこでこの場合には荷重に置き換えて実験することにした。実際に実験したのは, 第 6 章で行なった計算の一部を検照する目的で, $\kappa = 1$ の場合のみに過ぎない。

実験方法はつぎのような考え方により導き出される。

図-8.5 に示すように, 同一の性質を有する弾性体 a と b が 線 AD において接続しており, 弾性体 a のみが一様な温度上昇 T を受けるとする。この状態は, ①弾性体 a と b がともに T だけ温度上昇を受けた状態と, ② b のみが T だけ温度降下を受けた状態, とを重ね合わせればよい。

さて, ①の状態では熱応力を生じないので, ②の状態のみについて熱応力を考えればよい。②の状態のときに発生する熱応力は, § 5.2 で述べたように, まず弾性体 b に x 方向の一様な圧縮応力を加えたとき (図-8.6) の応力状態, すなわち附加応力状態を求める。

すると弾性体 a については, このときの応力が求める答である。弾性体 b については, このときの応力と x 方向の一様な

図-8.5

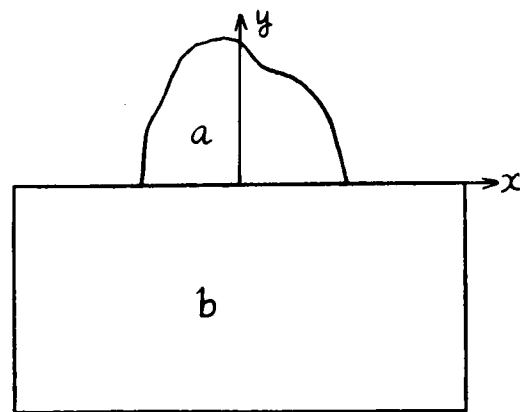
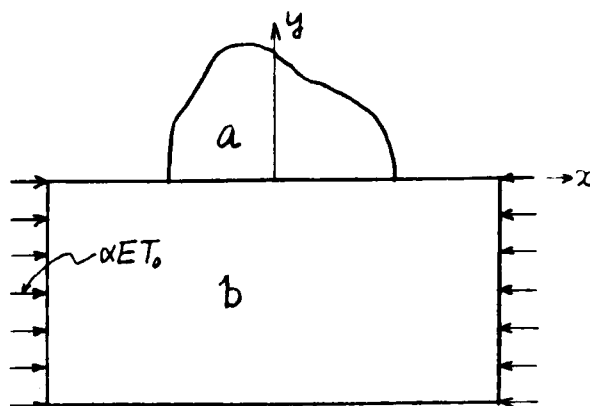


図-8.6

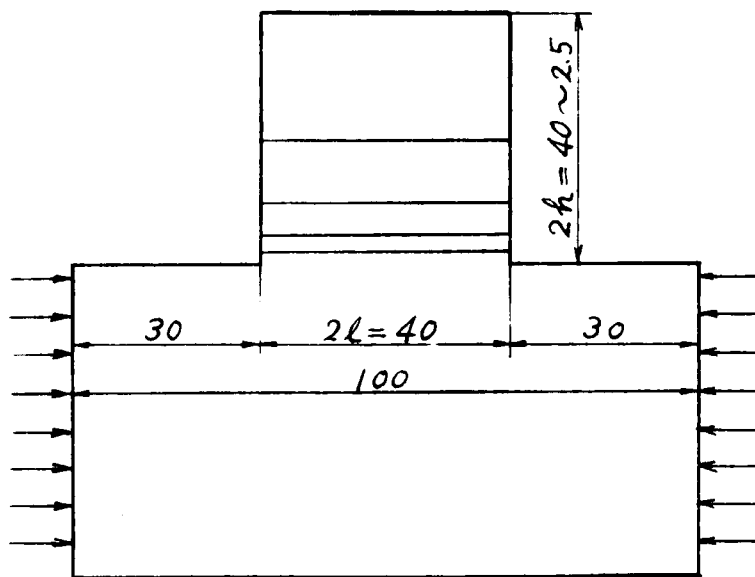


引張応力 αET_0 を加えたものが真の熱応力状態である。したがって、光弾性実験としては、図-8.6 に示すように、弾性体 b に x 方向の一樣な圧縮応力を加えた実験のみを実施すればよい。

いま、弾性体 a と b との熱膨張係数は同じであるが弾性係数の異なる場合を考えてみる。 a, b の弾性係数をそれぞれ E_a, E_b によって表わすと、 b に与えるべき応力は $-\alpha E_b T_0$ である。 b に荷重を加えたときに、 b がある程度の大きさの歪を生じなければ、 a に大きい応力が生じないので、光弾性縞が現われ難い。したがって、 E_b が大きいときには非常に大きい荷重を加える必要がある。そのため $E_a \ll E_b$ なる場合には、実験が非常に困難になる。 $E_b = \infty$ のときには、理論上本節のような実験は不可能である。このような場合には前節で述べたような実験が有利である。

光弾性材料としては Araldite B を用いた。

図-8.7



模型寸法は図-8.7 に示す通りであり、矩形の高さは 4 cm から順次削って 0.25 cm までとした。
 $h/l = 1 \sim 1/16$ である。
 厚さは 1.02 cm のものを用いた。

(2) 実験結果

応力状態は、前と同様な形式によって、附図-II・8.5 に示す。第6章の計算値は、この場合と全く同じ条件で実施されたものであるが、§6.4において、 $\nu = \infty$ 、 $\nu = 1$ とした場合は、本実験における最もおの大きい場合 ($\nu/l = 1/2$) にかなり近い (ただし、計算に際しては、 $\nu = 0$ と仮定している)。したがって、附図-II・8.5(a) と附図-II・6.5 とを比較すると、

接続辺 AD における応力状態はよく一致している。

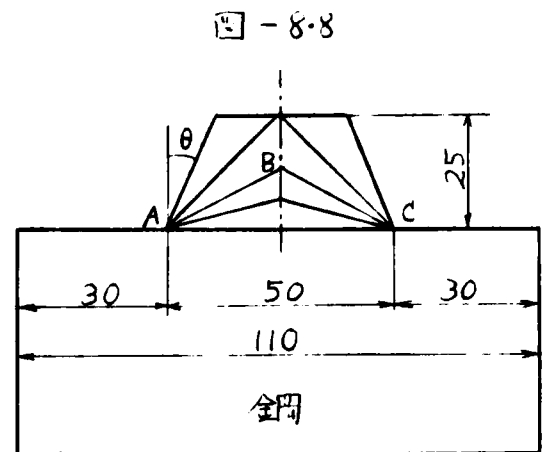
辺 AD において固定された場合 (附図-Ⅱ・8・1) と比較すると、辺 AD 上をはじめ、ほとんどすべての点において、本節の実験値の方がもちろん応力は小さい。しかしながら、自由辺 AB および CD 上においては、接続点より少し離れた位置において、むしろ大きい応力の現われていることには注意すべきである。また応力の零となる位置も異なっていて、本節の場合の方が接続点に近い。第5章と第6章の計算値 (附図Ⅱ・5・1 とⅡ・6・4) と比較しても、明らかにこの傾向が示されている。

§ 8.4 三角形 および梯形板

三角形あるいは梯形の場合には、矩形の場合と比較して、応力状態にどのような差が現われるかを知らるために、一辺が拘束された場合について先弾性実験を行なった。

(1) 一辺固定の二等辺三角形板

図-8.8に示す模型 (厚さ0.59cm) によって、§ 8.2 と同じ方法により、一様な温度変化をうける一辺が固定された二等辺三角形板の熱応力状態を調べた。側辺の全長直線よりの傾き θ は $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ の4種とした。附図-Ⅱ・8・6 は $\theta = 45^\circ$ の場合に対する等色線、等傾線および主応力線を示したものである。



実験結果は 附図-Ⅱ・8・7 に示す通りである。側辺ならびに隅角 (A 点 および C 点) 近傍を除けば、矩形板 (附図-Ⅱ・8・4) とほとんど同じ応力を示している。 θ が大きくなることは矩形板において θ が小さくなることに対応し、 θ が大きくなると、底辺においては、反はほとんど変わらないが、 σ_y および τ_{xy} は減ずる。隅角においては、 θ が大きくなると、応力集中が急激に減じ、 $\theta > 60^\circ$ においては、隅角において応力集中は生じない。

この程度に θ が大ききときには、隅角には応力集中が現われなかつた、側面全体にわたって縁応力が大きくなることに注意する必要がある。

(2) 一辺固定の直角三角形板

図-8.9

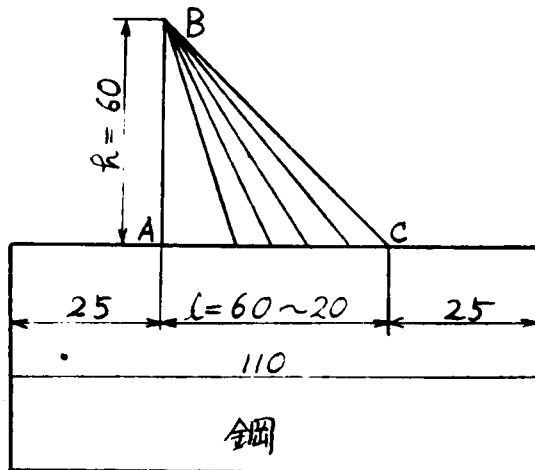


図-8.9 に示す厚さ 0.59 cm の模型により実験を行なった結果 附図 II-8.8 に示すような結果が得られた。実験は $h/l = 1, 1.25, 1.5, 2.0, 3.0$ の 5 種について実施したが、結果はその一部のみを示した。 $h/l = 1$ のとき見ると、直立側面 AB の縁応力は矩形板(附図-II-8.4)に類似し、傾斜側面 BC の縁応力は二等辺三角形板(附図-II-8.7)の応力状態との差がやや大きい。

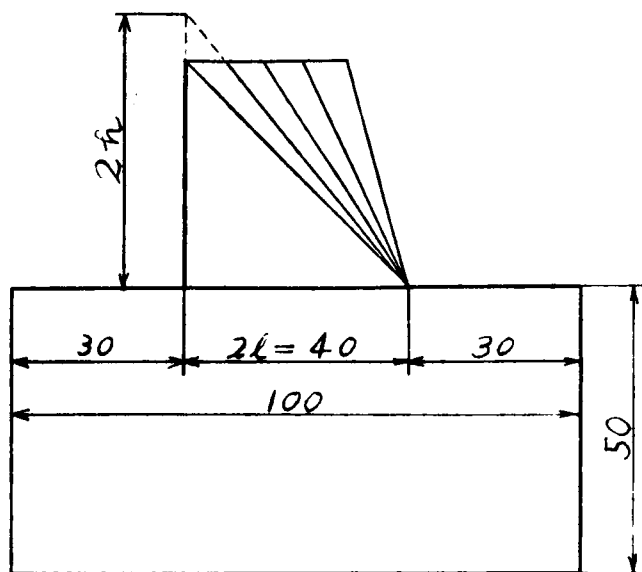
一般的には、直立側面およびその近傍においては、矢矩形板、傾斜側面

およびその近傍では二等辺三角形板の応力状態に近いものと考えても大きな誤りのないことがわかる。固定面 AC における応力状態をみれば、点 A の近くでは矢矩形板、点 C の近くでは二等辺三角形板の応力状態に似ていることは明らかである。要するに、この程度の形では、一辺の側面の形の影響がわずかしか他の側面近くまで及ばないことを示しているわけである。

(3) 一辺弾性拘束の直角三角形板

この場合には図-8.10 に示す厚さ 1.02 cm の模型を用い、前節で述べたように、側圧を加えて実験を行なった。したがって、この場合には $\alpha = 1$ である。実験値より、上部の三角形(または梯形)板が一様な温度上昇 T_0 を生じたときの応力状態を示すと、附図-II-8.9 に示す通りになる。附図-II-8.8 と II-8.9 とを比較すると、底面が完全固定のときと $\alpha = 1$ のときとの応力状態の差は、三角形板において矢矩形板のときとほとんど同様であることがわかる。

图-8.10



第 9 章

一辺が拘束された矩形板の熱応力状態に関する考察

§ 9.1 解析ならびに実験の精度

(1) 解析の精度

一辺が拘束された矩形板の熱応力解析を実施するには変分原理を用いる。したがって、hypercircle method によって上界と下界がわかるから、誤差の程度を評価することが出来る。しかしながら、こうして得られる誤差の評価は、物体の全領域における値の平均として得られるものであるから、最大応力あるいは危険点における応力などを考察の対象とするときには大きい意義を有しない。このような考えによって誤差の評価を行なわなかった。

解析における誤差の原因として考えられる大きい要素は、§ 2.3 で行なったように、 (f_n', g_n') および (f_n'', g_n'') なる値は、 $i=n$ のときには i 以下のときに比べて小さいと考えて、それらを含む項を省略していることである。表-2.2 に示したように、 (f_n', g_n') および (f_n'', g_n'') の値は零でないが誤差が導入されることとなる。これらの値を零でないとしても計算ができるのであるが、この場合の方程式が連立微分方程式となるので計算の面倒を避けたわけである。このようにして述べた計算法は全くの第一次近似にすぎない。このような条件の下においてなるべく精度を向上させるために、self-equilibrating ortho-normal polynomial を用いた。この多項式はそれぞれが独立に釣合条件を満足しているものであるから、精度の向上に役立っていることは間違いない。

厳密な精度の検討は行なわなかったが、§ 5.3 に示した一辺固定の場合について、さらに1項多く採用した結果の数値を示してみよう。表-5.1 には、 $\nu=0$ のときにかぎり、 $n=8$ の項まで採用した場合を示した(表-5.1 および 附図-Ⅱ.5.2 参照)。 $n=8$ の解放は非常に小さく、 $n=5$ までのときと $n=6$ までのときの応力状態と比較すると差はわずかであり、応力分布の凸凹は改良される傾向があることがわかる。固定辺における $0 \leq x \leq 1$ の間における平均応力ならびに点 $(\pm 1, 0)$ における σ_y を求めると、 $n=8$ の項のみにある値は表-9.1 に示す程度である。以上の結果より、項数を多くすると応力分布は滑らかになる。固定辺における応力は、わずかながら σ_x の絶対値は増加し、 τ_{xy} は減少する。一方点 $(\pm 1, 0)$ における σ_y の絶対値は著しく増加することになる。

第6章では弾性拘束された場合の近似計算を行なったが $n=8$ まで採用しただけでも、相

表-9.1 $n=8$ の項のみによる応力 (単位: $\alpha E T_0$)

(附図-II.5.2参照)

σ_x の接続辺における平均	-0.0175
τ_{xy} の " "	-0.0094
尖 ($\pm 1, 0$) における σ_x	-0.5695

束辺上の9尖のみにおいて変位を一致させた。そのために第5章の結果より精度の低下することが考えられる。そこで附図-II.9.1には正しい値¹⁾とすでに附図-II.6.1で示した応力分布について、接続辺の応力を比較した。近似計算値は応力分布の凸凹が大きいの。この凸凹は尖の並び方によって変化する。しかしながら接続辺における応力成分の平均値は尖の並び方によってほとんど変化しない。この例によれば、 σ_x の平均値は正解が $-0.5\alpha E T_0$ であるのに対して、普通の近似解が $-0.460\alpha E T_0$ であって、誤差は8%である。また附図-II.6.1とII.6.2(a)は同一条件($h=\infty$, $v=0$, $K=0$)であるので、第5章と第6章の計算法の比較は、すなわち自然境界条件をそのまゝ用いるときと、数個の尖で接続条件を一致させる場合の結果の比較ができる。後者の場合の方が応力分布の凸凹が大きく、接続辺における平均値は前者に比べて10%程度大きく、 $-0.993\alpha E T_0$ である。

(2) 実験の精度

光弾性実験における精度は、理論的に考えると§7.3に示したように約3%以内であると考える。しかしながら、通常の載荷による光弾性実験法と実験の過程を比較すると、荷重の測定に対応して、熱応力実験の場合には、温度差の測定を行なうことになる。したがって温度制御とその測定によって精度の支配されることが多い。実験模型の温度はだいたりにおいて $\pm 0.5^\circ\text{C}$ 以内の変動に保った。

実験資料の解析に際しては、内部(接続辺を含む)応力を shear-difference method によって決定したのでこのときに誤差が導入される。このような誤差が結果にどの程度及んでいるか不明であるが、すでに示した例によるとかなり満足すべき精度の得られているものと考えてよいだろう。

(3) 他の研究との比較

一辺が完全に固定された矩形板に対する研究は次節以下において述べることにし、ここでは、 $K = E_1/E_2 = 1$ の場合について矩形板が半無限板に接続しているときの応力分布を求めた研究

が二、三あるので、それらの結果と著者の求めた応力とを比較することにある。O. C. Zienkiewiczは、このように問題を解くには差分方程式によることが有利であることを示し、 h_1 が有限値の場合についての解析結果の数例を示している。²⁾ それによると、接線面における σ_{x1} は正確には示されていないが、 $-0.6 \sim -0.8 E_1 T_0$ 程度である。一方著者の解析によると、第5章、第6章および第8章で示したように、矩形板の h_1 が固定されているときにおいても、他の弾性体に接続しているときにおいても、高さ h_1 によってほとんど接続部の σ_{x1} は変化しないから、この例のように $h_1 = 1/2 \sim 1$ のときにおいても、 $h_1 = \infty$ のときと同様に σ_{x1} の平均値は約 $-0.7 \alpha E_1 T_0$ （後述する）と考えることができる。したがって著者の計算値ならびに実験値の方が幾分大きい。全般的にわたる応力状態の概要は全く類似している。

一方、H. G. Smithの実験³⁾によると、接線面における σ_x の平均値は約 $-0.7 \alpha E_1 T_0$ であって、著者の求めた値とよく一致している。この実験では、矩形でなくて三角形が接続されている場合のみを取り扱っている。しかしながら、第8章で示したように、底面における σ_x の平均値は三角形と矩形とにおいて大差がない。

川本⁴⁾は $h_1 = 1 \sim 1/4$ の場合について、光弾性実験により応力状態を研究し、 h_1 がこの範囲においては、接線面における τ_{xy} の最大値は約 $0.4 \alpha E_1 T_0$ であり、三角形状の分布を有するものと考えている。著者の計算では $h_1 = \infty$ のときに、 τ_{xy} の平均値は $0.21 \alpha E_1 T_0$ であり、上述の h_1 に今まで述べたことから、 $\infty > h_1 > 4$ の範囲では τ_{xy} に大きい差のないことがわかるから、川本氏の実験とかなり良く一致している。また同氏は半無限体中の応力分布を実験的に求めるとともに近似的に解析しているが、これらの結果とも比較的よく一致している。

著者の計算値と実験値はだいたいにおいて満足すべき一致をみており、ここで示した数例では、他の研究結果ともほとんど類似の応力を示している。したがってその他の各種の場合の応力状態も大きい誤差の少ないものと考えてよいであらう。

§ 9.2 弾性性質の影響

(1) 矩形板のうける拘束と危険応力

図-9.1において、矩形板 ABCD のみが温度変化をうけると、矩形板に生ずる応力は § 1.3 (2) に述べたように温度変化によって変わるのみならず、これに接続している他の物体の性質ならびに寸法によって影響される。後者の影響を簡単に表わすために、外部拘束度あるいは単に拘束度という言葉が用いられる。これは温度変化が一定値 T_0 であるとき、辺 AD における

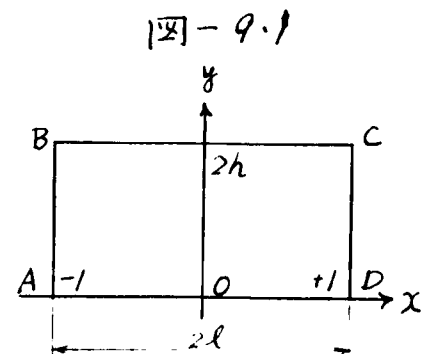


図-9.1

ADに沿う方向の矩形板の直応力と $\alpha E T_0$ との比を表わすものである。この値は温度変化が一様であるとしても、矩形の形、接続物体の形、矩形と接続物体の寸法比と弾性係数比によって変化するものである。したがって、本節と次節においてこれらの及ぼす影響を考えることにする。

従来では大部分の論文が上記の拘束度のみに着目しているにすぎなかったが、コンクリートリフトが打継がれたときの危険な状態を考えるときには、辺ADにおける σ_x のみならずつぎのような応力値も検討しなければならない。リフトに鉛直ひび割れが生ずるかどうかについては、辺BCにおける σ_x ならびに中心断面における σ_x の値、リフトに水平ひび割れが現われたりリフト打継目において離れるかどうかについては、点AおよびDにおける σ_y と辺ADにおける τ_{xy} と σ_y である。これらの応力についてはすでにそれぞれの場合に状況を示したが、ここで一括して示すことにする。

(2) Poisson 比の影響

すでに§5.3 (1), 附図-Ⅱ.5.2 において説明したように、 ν の値が大きくなると応力は小さくなる。附図-Ⅱ.5.2の場合について辺ADにおける平均応力 $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\tau}_{xy}$, ならびに点A, Dの最大値, 点AおよびDにおける σ_y の計算値を示したものが表-7.2である。

表-7.2 Poisson比と応力との関係

位置		辺 AD			(± 1.0)
応力		$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\max \tau_{xy} $	σ_y
ν	0	-0.907	0.428	0.927	-1.832
	0.2	-0.869	0.390	0.850	-1.446
	0.3	-0.855	0.375	0.803	-1.285

$\nu=0.3$ の場合を $\nu=0$ の場合と比較すると $\bar{\sigma}_x$ は5%, $\bar{\tau}_{xy}$ は12%減じていて、点AおよびDにおける σ_y は31%も小さくなっている。

これらの計算では平面応力状態としているため、平面歪状態(打設リフトに鉛直断面はどのように考えるべきである)における応力を求めようとすると、§1.2.(6)において述べたようにここに得られた応力を $(1-\nu)/(1-2\nu)$ 倍する必要がある。大抵の場合において $\nu=0.3$ として計算しているが、近似的に同じ応力状態を示すべき平面歪状態におけるPoisson比を ν' と $\nu'=0.15$ となる。この値はコンクリートのPoisson比として採用することができ、したがって平面応力状態

において $\nu=0.3$ とし示した応力状態は、平面歪状態におけるコンクリートの応力状態であると考えることができる。

(3) 弾性係数の相違による影響

$\alpha = E_1/E_2$ の値が応力に及ぼす影響は附図-Ⅱ.9.2 およびⅡ.9.3 に示す通りである。附図-Ⅱ.9.2 におけるように、矩形板が同一幅のものに接続しているときには、 $\alpha < 1$ において応力変動が著しく、 $\alpha = 1$ のときには拘束度が 0.5 となって、それ以上の α では拘束度は漸減している。しかしながら、半無限体に接続しているときには α の値が小さいときでも α に対する応力変動は比較的ゆるやかである。真 (±0) における σ_y は α が小さいときには大きい値になるので、引張応力によって打継目の開口する危険性が大きくなる。ただし、 α が大きくなると応力の符号が逆になることに注意すべきである。 $\alpha = 1$ の場合について先弾性実験値と比較すると、たとえば、半無限体に接続した $a_1 = 1/2$ のときに $\bar{\sigma}_{x,1} = -0.68 \alpha_1 E_1 T_0$ 、 $\bar{\tau}_{xy,1} = 0.17 \alpha_1 E_1 T_0$ (附図-Ⅱ.9.7 参照) である。実験値は Poisson 比が 0.3 のときであることを考慮に入れると、良好な一致を示していると考えよう。

α と拘束度との関係 すなわち $\bar{\sigma}_{x,1}$ の値は、半無限の基礎礎に対して

$$\text{拘束度} = 1 / (1 + 0.4\alpha) \quad (9.1)$$

なる関係が得られている。⁵⁾ 附図-Ⅱ.9.3 にはこの式による計算値も示した。著者の結果(ただし $\nu=0$) とほとんど一致した値を示している。附図-Ⅱ.9.2 によれば、この式は接続物体の形によっては利用できないことが明らかであるから注意する必要がある。この図から、同一幅の物体に接続しているときの拘束度と α との関係と (9.1) 式に似た形で数式化すれば、極く近似的に次式となる。

$$\text{拘束度} = 1 / (\alpha + 1) \quad (9.2)$$

この式は $0 < \alpha < 1$ においては過大、 $\alpha > 1$ においては過小な値を与える。この式は (9.1) 式と類似した形式でしかも簡単な形とすることを目標としたので誤差はかなり大きい、実用的には便利である。少し複雑な形の式を用いればさらに精度のよい関係式が得られる。

α による影響はここに示した拘束度によってだいたいの傾向を把握できるわけであるが、おと第 6 章において図示したように、応力成分の種類類ならびに位置に応じて影響の異なることに注意する必要がある。

§ 9.3 寸法の影響

(1) 矩形の形の影響

附図-Ⅱ.9.4 には辺 AD が完全に固定されているとき ($T = \text{一定}$, $\nu = 0.3$) について l/h と応力の関係を示した。辺 AD においては σ_x はほとんど変化せず τ_{xy} は漸減することはすでに述べた通りである。 l/h が増加すると角 A および D における応力が減ずるのは必ずしもあつたが、上辺中央における σ_x が増大するので、この角から鉛直ひび割れの発生する危険性が増す。この角の σ_x は l/h が 0 ~ 10 の間においては急激に大きくなる。

鉛直ひび割れの可能性を中心線の上端や下端における応力のみでなく、中心線上における平均応力で表現しようという考えもある。⁶⁾ 中心線上における σ_x についても $0 < l/h < 10$ において大きく変化している。図には R. W. Carlson と T. J. Reading が求めた値⁷⁾ も示した。 l/h の大きいときに著者の値は幾分大きい、附図-Ⅱ.9.7 に示す実験値とはかなり良く合致しているし、A. V. Bicklov の示している値⁸⁾ にも近い (Bicklov の値はさらに少しばかり大きい)。したがって、Carlson-Reading の数値は $l/h = 10$ 程度の大きい所では幾分小さすぎると考えられる。 $l/h > 10$ では中心線における σ_x はほとんど $-\alpha E T_0$ に近いものと考えてよい。

附図-Ⅱ.9.5 には、辺 BC の温度は変化せず辺 AD において T_0 上昇し、その間は直線的変化をする場合について、 l/h と応力との関係を示した。このような温度変化では、一様な温度変化とはほとんど同様な傾向をもっていることがわかる。ただ、 σ_x は上辺 BC において辺 AD と符号を異にする特徴を有し、 l/h が増加すれば応力は減ずる。

附図-Ⅱ.9.6 は同幅の無限に長い物体に矩形板が接続したとき ($\nu = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$) の応力変化を示したものである。この場合では辺 AD における σ_x のみならず τ_{xy} も変化が小さい。ただし、中心線における σ_x と角 A および D における σ_y はかなり変化する。

(2) 接続する弾性体の寸法の影響

すでに前節においては、2つの物体の弾性係数の差によって非常に応力の異なることを示した。このことから、2つの物体の寸法によっても応力状態の異なることは容易に想像されるところである。すなわち、矩形に接続する物体の寸法が小さければ、拘束作用が減じて矩形の発生する応力は小さくなるであろう。すでに示した附図-Ⅱ.9.2 と Ⅱ.9.3 とにおいて拘束度を比較すると、 $\nu = 1$ のときにおいて、同じ幅のものが接続しているときには 0.5 であるのに対して、半無限体が接続しているときには 0.7 となっている。また前者の $\nu = 1$ に相当する拘束度を与えるものは後者においては $\nu = 3$ の場合である。このように、接続する物体の寸法とか形によって

拘束度がかなり大きく変化するものである。

拘束度 異なる辺 AD における $\bar{\sigma}_x$ の変化率と他の任意の点の任意の応力成分の変化率とは対応しない。接続する物体の形や寸法に応じて、矩形板中の応力状態はそれぞれ異なった形になる。たとえば、 $\kappa=1$ における辺 AD における $\bar{\sigma}_{xy}$ はそれぞれ $0.134 \alpha_i E_i T_0$ と $0.206 \alpha_i E_i T_0$ である。また点 $(\pm 1, 0)$ における σ_y の値は非常に違いがある。

(3) 矩形以外の形の時

矩形以外の形のものが半無限弾性体に接続しているときの応力状態は計算を行なっていない。しかしながら第 8 章において述べたように、タムの横断面形を理想化した台形および三角形に対しては、温度変化が一樣なときにつれて光弾性実験によって応力状態を求めた。矩形の場合と計算値をも加えて総括したものが附図-Ⅱ-4・7 である。矩形の場合には、断面の平均応力が実験と計算においてより一致を示していることがわかるであろう。矩形以外の形の場合の拘束度ならびに主要点の応力状態はつきう通りである。

(a) 接続辺における $\bar{\sigma}_x$ (拘束度) および $\bar{\sigma}_{xy}$ は側辺の傾斜によってほとんど変化しない。したがって矩形の場合と値に差がない。これらの値が h/κ が大きくなると漸減する傾向：矩形板の場合と同様である。

(b) 点 $(\pm 1, 0)$ における周辺応力は、正確には求められていないが、側辺の鉛直となす角 θ が 60° 位まで強く傾斜しないと値が減じない。一般にこの点の応力の計算はさらに頂角を大きくとらねばならぬ。側辺における最大応力は点 $(\pm 1, 0)$ において生じ、この点の応力は θ の増加とともに減ずるけれども、かなり大きい応力を受ける範囲はかえって増大していることに注意を払わねばならない。

§ 9.4 温度分布の影響

弾性体が全く拘束を受けていないときは直線的な温度分布を生じても熱応力が発生しない。しかしながら、いま考えている弾性体は一面において他の物体に拘束されているため、一樣な温度変化によってさえ熱応力を発生する。この場合には接続辺において大きい応力が生じる。一樣な温度変化でないときには、弾性体に生ずる応力は平均温度によるものではない。このとき、拘束の影響は接続辺における温度変動によって支配されるものである。したがって、上辺 BC においては温度変動がないが接続辺 AD において温度差を生じ、その間は直線的に分布するような温度変化を生じたときにおいても、辺 AD 附近においては大きい応力を発生した。非直線的な温度変動を受けるときには

外部拘束をうけないときにおいても熱応力を発生する。このようなときの熱応力を求めるためにはつぎの3つの温度変動に分けて考えるのが便利である。(図9.2参照)

(a) 一様な温度上昇

(b) 平均温度は零である一様傾斜
の温度変化

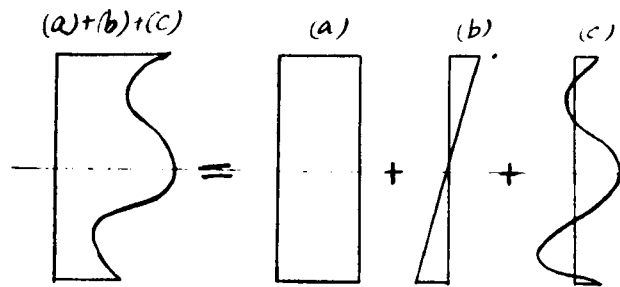
図-9.2

(c) 平均温度は零である非直線的
温度変化

これらの場合についての基本的な温度
変動と熱応力状態の関係を求め

たので、種々の複雑な温度変動の

場合についても、だいたいの様子を推定することができる。拘束をうけない物体のときと同様に、温度変化が凸凹の多い曲線で表わされるときには、応力分布が温度変化に類似した形になるが、拘束面において生ずる温度変化量が大きいときには、先に述べたように拘束の影響が大きいことに注意する必要がある。



第 10 章

結 論

ガムの熱応力解析に際しては、その形、材料の性質、境界条件、温度条件などが非常に複雑であるから、厳密な解析は困難のみならずそれぞれのガムに応じて発生する熱応力の状況や大きさが異なる。そこで本篇では二次元応力状態と考えることにして、材料は完全弾性体と仮定し、その形、境界条件、温度条件などは非常に単純化した場合について熱応力状態を研究した。ガムの基本的な条件に対しては、すでに述べたように多数の注目すべき結果が得られた。本篇の結果を要約するとつぎのような結論がえられる。

§ 10.1 熱応力状態の一般的性質

ガムの熱応力状態を研究するに先だつて、熱応力の一般的性質を明確に把握しておく必要がある。熱応力の基本的な性質はつぎの通りである。

(a) 熱応力の発生原因は体積変化であるから、湿度変化、自己成長、アルカリ-骨材反応などの体積変化によって発生する応力などと同様に、理論上固有応力として取り扱うことができる。ガムにおいては熱応力のみならずこれらによって生ずる応力も重大な影響を及ぼすことがある。

(b) 弾性体に熱応力が生じなれたための第1の条件は、物体の中の任意の点において熱膨張によって生ずる歪が適合条件式を満足するときである。その第2の条件は、二次元応力状態にある物体の任意の位置において、外に向つて熱の流出または流入のないような任意の閉曲線の描き得ることである。三次元応力状態にある物体に対しては直線的な温度場にあるときである。第2の条件は、内部に発熱源のない一重連結領域の物体が定常温度状態にあるときに成立する。

(c) 熱応力状態は重ね合わせることのできるのだから、基本的な条件の解を数多く求めておけば便利である。

(d) 物体が三直交方向、二直交方向、一方向のみにおいて完全に固定され他の方向には自由であるときに発生する熱応力の比率は $1/(1-2\nu) : 1/(1-\nu) : 1$ である。したがって、^{完全に拘束された}平面歪と平面応力の状態における応力比は、 $(1-\nu) : (1-2\nu)$ であると考えてよい。したがって、前者のPoisson比を ν' 、後者のそれを ν とすると、近似的に同一の応力を生ずるためには、Poisson比の関係が $\nu=2\nu'$ であればよい。完全に自由なときには $1 : (1-\nu)$ となる。

§ 10.2 熱応力の解析法

近似的な熱応力の解析法ならびに実験法について研究を行なった結果つぎのことが明らかになった。

(a) 矩形板の熱応力状態を解析するには種々な方法を用いることができるが、精度と手数から考えてポテンシャルエネルギー最小の原理を用いるのがよい。この場合には変位函数を $\sum f_n(x)g_n(y)$ なる形におき、 $f_n(x)$ としては *self-equilibrating ortho-normal polynomial* を用い、 $g_n(y)$ は変分法における Euler の方程式より決定した。この方法によれば矩形板のみならず拘束された矩形板にも用いることができ、計算が比較的簡単で、満足すべき精度が得られる。また最終的な応力計算を実行しなくても、応力分布の傾向を探ることができると便利である。

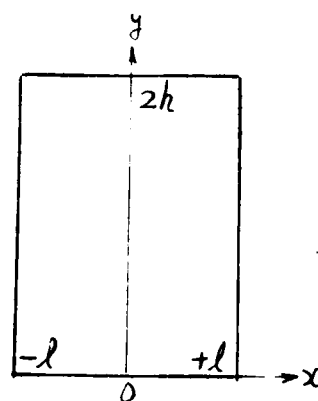
(b) 拘束された弾性体における熱応力の実験的研究には、常温より高い温度範囲において実施する光弾性実験法が便利である。この方法では、三次元構造物物体についても、収斂光法または散乱光法を用いて応力解析を行なうことができる。一方、熱応力を凍結する光弾性実験が可能であることがわかったが、精度ならびに凍結される材料等については研究すべき点が残されている。

§ 10.3 拘束をうけない物体の熱応力状態

拘束をうけていない一重連結領域の物体では、非直線的な温度分布の場合のみにおいて熱応力を発生するから、今において現われる基本的な形状と非直線的な温度変化の場合について応力解析を行なった結果よりつぎの事項が明らかになった。

(a) 表面に垂直な直応力は、自由表面においては発生せず、内部に入るほど大きくなる。表面からの距離と発生応力との関係は温度変化の状態によって変る。一般に温度変化曲線が表面方向の座標の高次式で表わされるほど、表面からわずかな距離において熱応力が大きくなる。たとえば、図-10.1における矩形において、温度変化が $f_n''(x)$ (f_n は *self-equilibrating ortho-normal polynomial*) で表わされるときには、表面からの距離 y と応力 σ_y との関係は

図-10.1



$(1 - e^{-\alpha_n^2}) \times E f_n''$ によって与えられる。 α_n の値は表-2.4 に示通りであり、 f_n'' が二次式のとくと大式のとくととちがうと、 σ_y が $0.9 \times E f_n''$ とに達するための表面からの距離は、 $n=2$ のときは 1.11 l 、 $n=6$ のときは 0.26 l である。

(b) 各方向の寸法が大きい矩形において温度分布が x のみの函数であれば、 σ_y の最大値は compensation line method によって求められる。この大きさは $\sigma_y = -\alpha E (T - \bar{T})$ によって与えられ、板の中央部分において生ずる。温度分布が $f_2''(x)$ であるときには $l/h < 2$ 、 $f_6''(x)$ であるときには $l/h < 0.5$ であれば、 σ_y の最大値は compensation line method で求めた値より小さくなる。

(c) このように温度変動が x のみの函数のときにおいても、 x 軸に平行な自由表面にはかなり大きい熱応力の生ずることに注意する必要がある。

(d) 表面に週期的温度変動 $T = T_m \sin \omega t$ をうける物体の表面が最大応力を生ずるのは、表面温度が極値となる時刻より以前であり、最大応力の大きさは $-\alpha E T_m$ より小さい。位相のずれと応力の減少量は、厚さが薄く週期が長いほど大である。たとえば厚さ 15m のコンクリートに対する例では、週期温度変動に対する位相のずれは $-0.28 \omega t$ 、最大応力は $0.82 \alpha E T_m$ であるが、日週期温度変動に対してはそれぞれ $-0.01 \omega t$ 、 $0.99 \alpha E T_m$ である。しかし厚さが 2m のときには、日週期温度変動に対して、上記の値が $-0.10 \omega t$ 、 $0.92 \alpha E T_m$ となる。

表面の温度変化が表面に大きい応力を与えるのは、温度変動が時間的に速いとき、物体の寸法が大きいときである。物体が厚いときでも長さが短かければ自由な端面の影響によって応力が小さくなる。表面温度の突発的な低下は、表面に大きい引張応力を生じるためひび割れを発生する危険が強い。この場合に表面が水のような熱伝達率の高いものでなく空気で蔽われていて、空気の温度が急変するときを考えると、コンクリートの表面温度はそれに応じないのでひび割れ発生応力は減少する。

(f) コンクリートを弾性体と考えると、リフトの平均温度上昇を T で表わせば、側表面に発生する引張応力は、

$$\sigma = \beta \alpha E T$$

なる形で書くのが便利である。なぜなら、 β の値はコンクリートの発熱速度ならびに最高断熱温度上昇値にほとんど無関係だからである。 β を発熱応力係数と名付けることにする。打設温度と気温が等しいと仮定すると、 β の値は材令の若いときには 1.0 ~ 0.9 である。型わきのないときには、材令が増えるとともに β の値が漸減するが、木製型わき使用の際これを取り外すことを考えると、材令 10 日以後でないと減じない。表面に最大応力の生ずる時期はかなり後の材令である。

(8) 発熱応力係数を型わくがないときを β 、木製型わくを使用するときを β' とすると、 $\beta' > \beta$ であるから、型わくを用いる方がひび割れの危険性が高い。クリープを考えるとさらに型わくを用いる方が危険性の大きいことがわかる。クリープを考慮するときは、持続弾性係数 E_s を用いて、表面応力はつぎのように表わされる。

$$\sigma = \beta \alpha E_s T, \quad (\text{型わくのないとき})$$

$$\sigma' = \alpha T (\beta_1 E_s + \beta_2 E) \quad (\text{型わく使用のとき})$$

(9) 以上の水和熱による応力状態は熱流が表面に直角方向のみに限られているという仮定した結果である。リフト側面の引張応力を考えるときには、鉛直方向に熱が逃れるために、温度上昇 T としては断熱温度上昇よりかなり小さくなる。したがって発生応力も小さくなる。

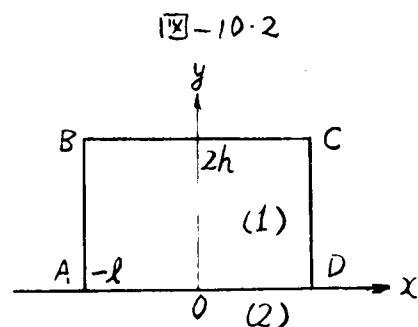
(10) 中空重力式ダム頭部の熱応力状態を研究するために、八角形板および円板の熱応力状態を求めてみた。無限に長い矩形板の場合と表面応力の大きさを比較すると、八角形板の方が小さく円板ではさらに小さくなる。減少の割合は温度条件によって異なる。この三者の間の応力値の差は、一般には温度変動が速いほど、また温度変動後の経過時間 t が短いほど小さい。無限に長い矩形板と円板との応力状態がわかれば、八角形板の熱応力はその中間であるから容易に推測できる。

(11) 八角形板においても円板においても、水和熱によって生ずる表面の引張応力の最大値となる時刻は無限に長い矩形板とほとんど同じである。円板と無限に長い矩形板との応力差を調べると、枚令3日および6日においてそれぞれ9%および14%である。八角形板の温度ならびに熱応力解析を差分法によって行なうと、よほど細分化した計算を行わなければ、表面応力にかなりの誤差を生ずるので、円板と無限に長い矩形板の応力を求めてその平均をとるのが実用上便利である。

§ 10.4 一辺が拘束された物体の熱応力状態

ダムは基礎岩盤に接着されることおよびリフトを順次下に存在するコンクリートに打ち継ぎで行くために、水平方向に拘束を受けることになる。このような拘束による応力状態を研究した結果と要約するとつぎの通りである。ここでは、図-10.2において温度変動をうける物体 ABCD を 1 と表わし、これに接続する物体を 2 で表わすことにする。

(a) 図-10.2 において、矩形 1 が一様な温度低下を生じたときにひび割れの発生する危険な部分とは、辺 AD、点 A および E、辺 BC の中央部である。ただし、



l/h が小さいときは辺 BC の中央部よりひび割れの発生する心配はない。

(b) 拘束度を接続面 AD における圧縮応力の平均値と $\alpha_1 E_1 T_0$ (T_0 は一様温度上昇量) との比で表わすことにすると、物体 1 の寸法ならびに形にかかわらず拘束度はほとんど同一の値であり、主として弾性係数比 $K = E_1/E_2$ および物体 2 の物体 1 に対する寸法によって影響される。 K が小さく、物体 2 の寸法が大きければ物体 1 の熱応力は大きくなる。もちろん温度変化の形式が変われば拘束度が異なり、このときの拘束度はほとんど辺 AD における温度変化量のみによって支配される。

(c) 拘束度と弾性係数との関係はつぎの通りである。

同幅の弾性体に接続しているとき： $1/(1+K)$

半無限弾性体に接続しているとき： $1/(1+0.4K)$

(d) 一様な温度変位力の場合、辺 AD の拘束は辺 AD の 0.5 倍以上の高さには及ばない。辺 BC の中央における縁応力は、 $l/h > 10$ のときはほとんど辺 AD の応力の平均値と同じ大きさの力である。 l/h が 10 より大きくなるにつれて辺 BC の応力は急速に減ずる。点 A および D における力は l/h が大きくなるほど減少する。なお、Carlsson と Keading が示している中心線上にある点の平均値は $l/h = 10$ 程度においては値が小さくなる。

(e) 辺 AD における T_{xy} の平均値は l/h が大きくなるにしたがって、また K が大きくなるにしたがって徐々に減ずる。

(f) 辺 BC で温度変化がなく、辺 AD において T_0 変化しその間は直線的な変化とする場合を考えると、 l/h が小さいときは辺 BC の応力は辺 AD の α_1 の符号が逆になる。

(g) 一般に任意の温度変化をうけるときの応力は、物体 1 が自由であると仮定したときの応力状態と、辺 AD における温度変化による拘束の影響によって生ずる応力状態とを重ね合わせれば近似的に解を求めることができる。与えられた任意の温度変化は、一様な温度変化、平均値は零である一様な配の温度変化 および平均値は零である非直線的な温度変化の 3 つに分けて考えれば便利である。これらの基本的な温度変化に対する応力状態は本篇において得られている。

(h) 物体 1 が三角形あるいは台形になって、側面 AB および DC が辺 AD と直交しないとき、AD の法線となす角 θ が大きくなるほど側面において大きい応力を受ける範囲が増大する。(しかし、側面中の最大応力であるところの点 A および D における縁応力は、 θ が大きくなるほど減少する。

(i) Poisson 比の大きさが応力に与える影響は複雑であるが、問題となるような主要な応力は、Poisson 比の大きいほど小さい。

第 III 編

コンクリート ダムの熱応力に関する諸問題の検討

序 説

コンクリート ダムにおける温度変動の原因は水和熱の発生と外界の温度変動である。水和熱の発生と外界の条件が同じであるときにおいても、ダム(または1つのブロック)の寸法や形に依りてそれ自身の温度変動の様子が異なる。熱応力は温度変動によって発生する以上、コンクリートダム(またはブロック)に生ずる熱応力の大きさは上記すべての因子が関係するものも当然であるが、それ以外に拘束条件によって熱応力の大きさが著しく異なることは、その基本的な様子をオニ編において述べた通りである。そこで、本編ではオニ編で得られた知識を基として、コンクリートダムにおける主要な熱応力問題の考察を行なう。

ダムが完成するまでの間を考えると、それを構成するそれぞれのブロックは、施工法と使用するコンクリートの性質に応じて、岩盤による拘束およびそのブロック自身による拘束の条件と温度変動状況が異なる。そのために、ブロックの施工中あるいは完成後における熱応力状態は種々な様相を呈する。この熱応力がダムに及ぼす影響は、ひび割れの現象において最も直接的に知ることができる。ダムに現われるひび割れの主因は熱応力によるものであり、熱応力状態とコンクリートの性質が異なるに応じて、ひび割れの発生状況も異なる。ひび割れの大部分は非常に微細なものであつて、コンクリートの表面の極く浅い部分に限られるから、幾分耐久性を減ずるのみで著しい支障を起すものではない。しかしながら、場合によっては、ひび割れを伝つて漏水を生じたり、ダムの一体性を損なうことにより安全性を低下せしめることさえある。

もしひび割れが生じないとしても、ダム完成後に熱応力が残存しており、そのうえ、外界の温度変動によつても熱応力を生ずる。ダムの応力状態を知るには、これらの熱応力を求めて他の荷重による応力と加え合はせなければならぬ。

ダムの熱応力はつぎの2つに分類することからできる。その一つは、コンクリートが水和熱を発生することによるものである。この熱応力はほとんどコンクリートの性質と打設工法によつて支配され、ダムが完成するまでにそれぞれのブロックに特有の値が現われる。

ひび割れの原因はほとんどこの熱応力によるものである。その中では、外界の温度変動によるものである。この熱応力は外界の温度変動、ダム型式と寸法、コンクリートの性質などによって異なり、ダムの存続するかぎり、外界の温度変動に応じて周期的に値の変動するものである。

本編においては、まず水和熱の発生と冷却過程における熱応力状態とそれによるひび割れの発生状況について考察を加える。この過程における熱応力を軽減し、ひび割れの発生を避けるために、リフトの高さと打設間隔の制限、人工冷却などにより、基礎の温度変動の起らないように留意され、一帯ではブロックの寸法を制限することによって拘束度を減ずる様に配慮されている。この場合の熱応力状態を考えるとコンクリートの性質が及ぼす影響が大きいので、コンクリートの性質を検討し、つぎにコンクリート打設工法と熱応力との関連を研究し、熱応力を軽減させるべき工法の考察を行うことにする。

既設のダムの嵩上げを行う場合には、熱応力問題がさらに複雑かつ重要な影響を持つ。特に旧堤体の下流側に新堤体を築着させる工法を採るときには、新堤体の激しい温度変化の影響を受けて、嵩上げ完成後のダムに危険な熱応力が現われたり、打継ぎを引継ぎような応力を生じたりする可能性などについて不安が大きい。この問題については、第3章において熱応力解析の実例を述べる。

最後に、完成後のダムが常に外界の温度変動に曝されるときには、どのような応力を呈するものであるか知る必要がある。外界の温度変動の中で、日週期変動とか日射、降雨、降雪などにより、短時間の温度変動によって生ずる応力は、第II編で示したことからわかるように、ほとんど温度変動の条件によつてのみ規定されるものと考えよう。これに對して、年週期の温度変動は、ダムの型式や寸法に応じて、かなり発生応力に差を生ずるものである。このような温度変動はアーチダムにおいて最も問題となるものであるから、特にアーチダムについて年週期温度変動を受けたときの応力解析を行ない、周辺継目も設ければ熱応力の軽減に効果のあることを示した。

温度変動と同様な影響を及ぼすものは、コンクリートの硬化時における収縮、自己成長、湿度変化などである。これらの現象の及ぼす影響は、発生する体積変化量を判明すれば、温度変化による応力と同様に取り扱うことができるものであるから、その体積変化の一般的な傾向を示すに止めて、発生応力の大きさを検討することは省略した。

第 1 章 コンクリートの性質

コンクリートダムに発生する熱応力の大きさは、施工方法ならびに環境条件によって支配されるとともに、コンクリート自身の熱的ならびに力学的性質が及ぼす影響も大きい。また、熱応力によってひび割れその他の危険な状態を示すか否かは、コンクリート自身の性質によって異なる。このように熱応力とその及ぼす影響を研究するためには、まずコンクリートの性質を十分詳しく知る必要がある。したがって、実際のダムの熱応力問題を検討するに先だって、ダムに使用されるコンクリートの一般的な性質を示すことにする。すでにオニ編において述べたように、湿度変化、自己成長などの体積変化によって生ずる応力は熱応力と同様に取り扱えるものであり、その応力の大きさも無視できないものであるから、これらの体積変化による影響も述べることにする。

ダム用コンクリートの性質については、すでに膨大な研究が実施されているので、ここでは比較的最近の研究によって明らかになった事項および従来ややもすれば注意を払われることの少なかった事項の中で、重要な特性について述べることにする。

§1.1 ダム用コンクリートの概要

(1) 一般的要求事項

ダムに使用されるコンクリートは極めて大量となり、コンクリート工学上特に重要であるので、古くから多くの学者ならびに技術者によって最良のコンクリートを作るために研究が行われてきた。ダム用コンクリートは他のコンクリート構造物に使用されるコンクリートに比べて、配合の決定ならびに施工の方針に関する基本的事項は同じであるが、ダムに使用されるコンクリートは、“マス コンクリート”という名で呼ばれているように特殊な注意が必要である。そこで、ダム コンクリートが備えなければならぬ性質を列挙するとつぎの通りである。

- | | |
|------------------------|------------------|
| (a) 所要の強度を持つこと | (b) 単位容積重量の大きいこと |
| (c) 耐久性の大きいこと | (d) 水溶性の大きいこと |
| (e) 容積変化の小さいこと | (f) 発熱量の少ないこと |
| (g) 品質のばらつきがなく均等性であること | (h) 施工の容易なこと |
| (i) 経済的であること | |

このような性質は、(b)、(c)および(f)を除くと、ほとんどすべてのコンクリート構造物に要求されることであるが、それぞれの項目の重要性あるいは意義については、構造物によつてかなりの差が認められる。つぎにその特長の二、三を示し、(c)および(f)の項目は熱応力問題と密接な関係があるから、次節以下にあらためて述べることにする。

(2) 圧縮強度

コンクリートの強度自体が第一義的な問題になるのは、ほとんどアーチダムの場合に限られている。外国では平均アーチ応力が 100 kg/cm^2 程度のアーチダムが造られ、わが国でも黒部第四ダム、一ツ瀬ダムなど最近の高アーチダムでは設計応力 80 kg/cm^2 程度で設計されている。このようなときには、材料の安全率を5とする（ダム設計基準、第3章、第1節、第2条の解説および第4章、第1節、第7条）と、材令81日において 400 kg/cm^2 以上の圧縮強度を有するコンクリートを作る必要がある。このような場合には、所要の強度を有するコンクリートを作ることは自体が主要な課題であり、かかるコンクリートはだいたいにおいて他の性質が優れている。しかしながら、他の形式のダムでは必ずしもこのような事情にはない。

たとえば、重力ダムの例を挙げると設計応力は表-1.1の通りである。丸山ダムの例を

表-1.1 重力ダム設計最大圧縮応力(kg/cm^2)

ダム名	高さ(m)	鉛直直応力	圧縮主応力
小河内	149.0	-29.5	-45.7
五十里	112.0	-22.0	-29.2
丸山	98.2	-18.1	-28.3

とすると、安全率を5とするとときには、表-1.1よりコンクリートの圧縮強度は 140 kg/cm^2 あればよく、かかる最大応力の生ずるのは表面部分であるから、内部のコンクリートではさらに強度を低下させてよいわけである。丸山ダムのコンクリート試験結果によると、単位モルタル量 150 kg/m^3 によつて 156 kg/cm^2 の強度のコンクリートが得られているが、実際に使用されたのは、表-1.2のように強度の大きいものである²⁾。このように、所要強度以上の良質なコンクリートを使用したのは、品質の均一性、水密性ならびに耐久性を確保することを目的としてためてある。

(3) 比重

重カダム、中空式重カダム、ならしに扶壁ダムにおいては、ダムが転倒あるいは滑動することに対して重量によって抵抗せしめる構造物であるから、コンクリート比重はダムの安全性に直接関係がある。したがって、設計基準ではコンクリートの単位体積重量を必ず実際に使用する材料の配合で試験を行なった結果によって決定するように規定されている(第3章、第1節、第1条)。他の型式のダムにおいても、一般に自重による力は他の荷重による力と同程度の大きさに達するから、コンクリートの単位体積重量は試験によって決める必要のある重要項目である。重カダムにおいて使用されるコンクリート量は莫大なものであり、コンクリートの比重が大きくなるとともにはかたなりコンクリート量を減ずることが出来る。コンクリートの比重はほとんど骨材によって決定されるので、比重の大きい骨材を用いることが望ましい。また、骨材の最大寸法を大きくし、粒度のよいものを用いて、できるだけコンクリート中の骨材を多くすると、比重の大きいコンクリートを作ることが出来る。³⁾

表-1.2 丸山ダムのコンクリート

区 別	単位セメント量 (kg/m ³)	91日圧縮強度 (kg/cm ²)
内 部	160	177
	180	252
表 面	240	380

骨材の使用量は極めて大量に達するため、その選定には所要の健全な骨材が安価に入手できることを第一とされる。骨材の種類は学義的により考慮されないが、岩石の種類に応じて比重のみならず、後述するようにコンクリートの熱的性質が大きく変動する。表-1.3 は岩石の比重を示すものであり、表-1.4 には粗骨材の種類とコンクリートの比重

表-1.3 岩石の比重

岩 石	比 重
花崗岩	2.51 ~ 3.05
砂 岩	1.9 ~ 2.7
石灰岩	2.46 ~ 2.84
大理石	2.52 ~ 2.85
片麻岩	2.4 ~ 2.7
方解岩	2.6 ~ 2.8
石英	2.66
正長石	2.57

表-1.4 骨材の種類と
コンクリートの比重

骨 材	比 重
玄武岩	2.52
白雲石	2.50
石灰岩	2.45
石英岩	2.43
花崗岩	2.42
流紋岩	2.34

度との関係を示す一つの測定値⁽⁴⁾を示した。このように、岩石の種類によつてコンクリートの比重にかなり差が生ずることに注意すべきである。なお、同一種類の骨材でも比重に差があり、比重の大きいものは一般的に堅固であるから、なるべく比重の大きいものを使用すべきである。

(4) 耐久性及び水密性

耐久性の甚しいコンクリートを作るには、一般的には強度の大きいコンクリートを作れば目的が達成される。ダムにおいて特に耐久性が重要視されるのは、寒冷地の山地において築造され凍害の心配の大きい場合である。コンクリートの凍結融解に対する抵抗は、水密性と密接な関係にあると考えられている。なぜなら、凍結による体積変化はコンクリート中の孔隙にある自由水の凍結によると考えられるからである。

強度の甚しい骨材を用い、配合、混合、締め固めおよび養生が適切であれば、現在使用されている程度のコンクリートは十分な水密性を有するのが普通である。水密性が低下するのは、コンクリートの締め固めの不十分とか材料の分離を生じた場合が多い。それ以外に、収縮縫目や止水ならびに打継目の施工の不完全とかひび割れなどによつて漏水を生ずる。水密性が要求されるのは上記のように耐久性との関連のみならず、これが揚圧力の大きさに重大な影響を及ぼすからである。特に注意すべきことは、下流面近くのみで不透水性で、他の大部分において比較的透水性の大きいとよには、ダムの水平断面の大部分にわたつて大きい揚圧力をうけるので、非常に危険な状態となることである。

ダムにおいて漏水の多いのは、そもそも貯水の目的に合しないので不都合であるのみならず、漏水が激しくなると局部的な破損を生じ、これから不測の重大な事故を生ずる危険性がある。

(5) 均質性

ダムにおけるコンクリートは非常に貧配合のものを用いられる。特に重力ダムの内部コンクリートは、近年では単位セメント量 150 kg/m^3 以下まで減じて温度上昇の低下と経済性をもたらしている。このような貧配合コンクリートでは均質性を保持せしめることが非常に困難であり、施工上においても十分注意を払う必要がある。貧配合コンクリートの打設が可能となったのは、施工機械や混和材の進歩に負うところが大きい。ダムに使用するコンクリートに対して特に要求される特性は、水膨熱の発生が

小さく、種々な温度変動に耐え得るものであるということである。つまりはこれの真について少し詳しく検討することにする。

§ 1.2 熱特性

コンクリートの熱特性として、熱膨張係数、単位体積当りの熱容量、温度伝導率、熱伝導率のわりに水和熱の発生量とそれによる温度上昇について考えてみることにする。これらの中で、使用セメントによって支配されるものは、水和熱の発生量とそれによる温度上昇である。他の性質は、コンクリート容積の大部分を占めるという骨材の性質によって決定されるものである。

(1) 熱膨張係数

変形縮小について述べたように、弾性係数における熱た力 σ は、

$$\sigma = -R \cdot \alpha E T, \quad (R \text{ は拘束度}) \quad (1.1)$$

この関係によって示されるから、まず、コンクリートにおける熱膨張係数 α はどのように変化するものがあるかを示す。イギリスの Building Research Station においては、多数のセメントならびに骨材について熱膨張係数が測定された。⁵⁾ たとえば純セメントと砂利コンクリートの熱膨張係数は表-1.5 に示す通りである。ただし、セメントペーストの熱膨張係数について、他の多くの測定者の報告は $11 \sim 15 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ の範囲内にある。純セメントの熱膨張係数はセメントの種類に応じて異なっているが、骨材の種類を一定にすると、コンクリートの熱膨張係数には大差がなくなる。

骨材の種類によってコンクリートの熱膨張係数は異なり、この関係は表-1.6 に示す通り

表-1.5 純セメントおよび砂利コンクリートの熱膨張係数 ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)

セメントの種類	純セメント		砂利コンクリート ¹⁾	
	乾燥	水中	湿度65%	水中
高 炉	23.2	19.2	14.2	12.4
ポルトランド	22.6	14.8	13.1	12.2
早 強	14.2	12.1	13.5	10.6

1) 配合は 1:6

りである。ここに注意すべきことは、セメントの熱膨張係数は骨材のそれよりも著しく大きいということである。なお、コンクリートのセメント量が増しても、コンクリート中のセメントと骨材の量的関係は一定の差を生ずることがないから、セメントの多いコンクリートは必ずしも熱膨張係数は大きくなるが、本質的な差は生じない。これらの研究から判明した他の事は、空気養生のコンクリートにおいては膨張係数が材令3日まで増加しそれ以後は減ずる。一方、水中養生のコンクリートでは材令によつて不変である。空中養生のコンクリートを水で完全に飽和させると膨張係数は減ずるが、水中養生したコンクリートを乾燥させても膨張係数は変わらないということである。水中養生のコンクリートの方が熱膨張係数が小さいから、コンクリート表面を十分散水養生すれば温度変動による体積変化を幾分小さくすることができる。

表-1.6 骨材とコンクリートの熱膨張係数 ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)

骨材の種類	骨材自身		コンクリート ¹⁾	
	乾燥	水中	湿度 65%	水中
砂 利			13.2	12.2
珪 岩	11.7	11.0	12.8	12.2
多孔スラック			12.0	9.2
礫 岩	10.1	9.9	11.7	10.0
高炉スラック	7.9	7.9	10.6	9.2
玄武岩	7.8	7.4	9.5	8.4
花崗岩	5.8	5.4	9.5	8.6
石灰岩	4.5	4.0	7.4	6.1
ポルトランド	4.3	3.8	7.4	6.1

1) ポルトランドセメント使用 材令 3月

(1.1) 式において α を小さくするには α を小さくすればよい。しかしながら、 α の小さいコンクリートを作るためには熱膨張係数の小さい骨材を用いる必要がある。そのためにセメントペーストと骨材との間の熱膨張係数の差が大きくなるから、コンクリートが温度変動をうけるとその構成要素の熱膨張の差によつて自由な伸縮が阻害され、複雑な応力が生ずる結果、コンクリートの引張強度(あるいは圧縮強度)を低下せしめないかどうかを検討してみなければならない。温度変動と引張強度の変化との関連に関する研究は比較的少ない。一方、この熱膨張係数の差と凍結融解試験による耐久力との関連は、多くの研究が行なわれてゐるから、必ずしも同一の結果が得られてゐない。

B. Mather⁶⁾ はアメリカにおいて、ひび割れの少ない John H. Kerr グラム, Pine Flat グラム, Detroit グラムなどはすべて骨材が珪酸塩であり、一方、ひび割れが認められたグラム骨材は石灰岩であることを見出し、このような差の現われる原因として、珪岩を骨材として使用するコンクリートはつぎのような性質を持つていることによるものであると述べている。

(a) 珪岩のように酸性の強い骨材は 200 mesh 以下のものが少なく、 $\text{Ca}(\text{OH})_2$ の結晶の寸法が大きい。したがって無定形セメントが結晶粒子によって防害されることが少ない。これがひび割れの少ないことに関係がある。なお、石灰岩質の骨材では微細組織が多いため、ブリーディングが小さく、連行空気も細かいものが数多くなる。

(b) 弾性係数が小さい。たとえば John H. Kerr グラムの弾性係数は他のグラムの場合の 40% 程度に過ぎない。弾性係数の小さいコンクリートはクリープが大きくなる。

このように、B. Mather によれば石灰岩を使用したコンクリートにひび割れが生じ易いのは主としてコンクリートの組織と弾性係数によるものとされている。ここに挙げたグラムにおいては、使用セメントの種類、温度規制の方法などに差があったため、ひび割れ発生の有無を必ずしも骨材の性質の相違のみに帰することができないが、骨材の性質がひび割れの発生に大きい役割を果たしていることは明らかに認められる。コンクリートの熱膨張係数を小さくし、熱力を軽減せしめようとするに、石灰岩質の骨材を用いねばならぬために、弾性係数が大きくなるのみならずコンクリートの組織にも悪影響を及ぼすことになる。以上の例を検討すると、熱膨張係数の小さい骨材を用いると、前者の好結果よりも後者の悪影響の方が大きくなり、かえってひび割れの可能性を増大せしめるものであると考えられる。この場合には、骨材とセメントとの間の熱膨張係数の差の大きいこと自身も著しい悪影響を与えているのではないかと考えられる。もしもそうであれば、高炉セメントはポルトランドセメントよりも熱膨張係数が大きいため、高炉セメントを用いたコンクリートはひび割れに対する抵抗力は小さいものと考えられる。この点については、確実な結論を得るためには今後の研究が必要である。

骨材の種類とコンクリートの温度変化とそれとの強度変動との関連は完全に解明されておらず、代表的な結果を示すところの通りである。S. Walker 他⁷⁾ は特性の異なる多数の骨材を用いたコンクリートについて、凍結融解、加熱冷却、乾湿繰返しの試験を行ない、その耐久性を測定した結果、上記のよう熱膨張係数の差は耐久性にはほとんど影響せず、むしろコンクリート自身の熱膨張係数が支配的因子であると述べている。この研究では、熱膨張係数の小さい方が耐久性が良好であった。しかし、E. J. Callan⁸⁾ の実験では、粗骨材とモルタルとの熱膨張係数の

差の大きいものほど耐久性が悪いという結果が得られている。最近、本間氏⁹⁾によつて行なわれた研究では、やはり同様の結果が得られている。S. Walker の実験では、コンクリートの熱膨張係数が大きいと、加熱冷却時に表面に於ける伸縮が大きくなり、そのために表面附近の熱応力が大きな影響を与えたものであろう。

(2) 温度伝導率その他

熱膨張係数以外にコンクリートの熱的性質の中で、主として骨材によつて決定されるものには温度伝導率、熱伝導率、比熱、単位体積当りの熱容量などがある。

アメリカの Bureau of Reclamation では、Boulder ダムの建設に際して骨材の種類とこれらの熱的性質を調査し、附圖-Ⅱ・Ⅰ・Ⅰ に示すような結果を得ている¹⁰⁾。この表によれば骨材の種類に応じて、コンクリートの熱的性質にかなりの差があることが明らかである。實在するこのコンクリート供試体から求められた数値¹¹⁾の中から代表的な例を挙げると、表-1・7 に示すような広い範囲にわたっている。なお骨材そのものの熱的性質についても Bureau of Reclamation において測定された数値が文献¹¹⁾に示されている。

表-1・7 ダム コンクリートの熱特性

ダム	国	骨材	ρ	C	λ	α
殿山	日本	石灰岩、頁岩	2.35	0.21	1.92	0.0039
佐久間	"	石英岩、珉岩	2.41			0.0040
井川	"	砂岩、粘板岩	2.44			0.0036
岩川	"	玄武岩	2.34	0.25	1.60	0.0027
上根葉	"	砂岩、石英岩	2.38	0.23	1.72	0.0032
Grand Coulee	アメリカ	玄武岩、花崗岩	2.53	0.23	1.61	0.0027
Nimbus	"	閃綠岩、石英岩	2.52	0.22	2.17	0.0038
Angostura	"	石灰岩	2.42	0.24	2.20	0.0038
Hungry Horse	"	砂岩、珉岩	2.40	0.23	2.54	0.0046
Aitua	"	花崗岩	2.40	0.24	2.35	0.0042
Myronga	オーストラリア	石英岩	2.35			0.0060
Bort	フランス	珉岩、花崗岩、粘板岩	2.40	0.2	2.2	0.0046

註 ρ : 比重, C : 比熱 kcal/kg.°C, λ : 熱伝導率 kcal/m.h.°C
 α : 温度伝導率 m²/h

コンクリートの単位体積当りの熱容量 C_p が大きいと、同一の水和熱が発生しても断熱温度上昇量が小さいから好ましいわけである。この点に因しては石膏石や玄武岩などは骨材として優れたものであり、石英岩や流紋岩が劣っている。しかしながら、熱伝導による温度変動は温度伝導率の大きいものほど大きいから、初期の熱拡散に因しては石英岩や石膏石などは骨材として優れているが、流紋岩や玄武岩は好ましくなりことになる。また温度伝導率が大きいと外界の温度変動によって表面附近に生ずる急峻な温度勾配の軽減される効果はあるが、その平均温度の変動が大きくなるという欠点を生ずる。このように、ここで述べている熱特性については利害が複雑である。

なお、温度伝導率、熱伝導率、比熱などについて述べて各種の数値は、骨材の鉱物成分が判明すれば計算することからできる。一方、使用水量、温度、配合なども上記の熱特性にある程度の影響を及ぼすものである⁽¹²⁾が、本項論に大きい効果と及ぼすものではない。

(3) 水和熱と断熱温度上昇

コンクリート中における水和熱の発生量はセメントの種類と使用セメント量によって決定される。したがって (1.1) 式において熱応力と小さくするためには、セメントの種類とその量を適当に選んで、温度上昇が小さく、しかも強度の大きいコンクリートを作ることになる。

その資料は古い⁽¹³⁾が、わが国におけるセメントの種類と水和熱との関係は表-1.8 に示す程度のものである。⁽¹³⁾ セメントの水和熱は、一般に

$$W = W_m (1 - e^{-mt}) \quad (1.2)$$

なる式によって表わされている。ここに、 W はセメント単位体積当りの水和熱、 W_m および m は常数である。発熱量の大きいものが好ましいので、 $3CaO \cdot Al_2O_3$ ならびに $3CaO \cdot SiO_2$ の含有量を少なくして中熱セメントの用いられることが多い。低熱セメントが最も優れているが価格が高いこと、初期強度が小さいので寒期には養生に日数を要することなどのためにほとんど使用されない。

表-1.8 ホルツマンセメントの水和熱 (cal/g)

種類	セメント	
	7日	28日
普通	67.4	84.1
中熱	54.7	72.2
高炉	59.0	82.1

W がわかっていると、コンクリートの断熱温度上昇日は次式で求めることができる。

$$\theta = CW/c_f = \theta_m(1 - e^{-mt}), \quad \theta_m = CW_m/c_f \quad (1.3)$$

ここに、 C は単位セメント量、 c_f はそれぞれコンクリートの比熱および密度、 m の値は (1.2) 式と同じである。

一般的には低熱系セメントを使用するほど、(1.3) 式における m の値が小さくて発熱速度が遅い。それに応じて強度ならぬに弾性係数は小さく、クリープは大きい。いままでに得られた結論によると、これらの影響が重なり合つて低熱系のセメントを用いるほどたゞに発生するひび割れを減少させることができることとされている。

最近ではしばしば高熱セメントが使用され、フライアッシュなどのボゾランの混合されることが多い。わが国のダムに使用された最近の高熱セメントの試験結果⁽⁴⁾より水和熱の平均値を示すと、表-1.9 のようにその発生割合はほとんど中熱セメントに類似

表-1.9 高熱セメントの
水和熱 (cal/g)

材 令	7日	28日
水和熱	61.0	77.4

しているかむしろ幾分速いことかわかる。一方、フライアッシュを混合したセメントを用いれば、フライアッシュの置きかゝ率に応じて発熱量を低下することが可能である。高熱セメントを用いたりフライアッシュと混合すると、一般的に堅固性となるのみならず、ウオカビリナー、耐酸性、

耐久性が増大するので近年ではこれらが盛んに使用されている。ただし、高熱セメントの凍結融解試験の結果によれば、必ずしも耐久性が良いものとはいえない。なお、水和熱の発生割合は養生温度によつて変わるものである。それのみならず、実際の発熱量が (1.2) 式のような割合で表わされるものではなく、通例のように材令 7 日と 28 日の実を通る曲線で m の値を決定するとき、他の材令で合致するようにしたときとにおいて m の値が異なる。一般には初期における発熱割合が (1.2) 式で表されるよりも大きいものである。

§ 1.3 力学的性質

一般に強度の大きいコンクリートは弾性係数も大きい。したがつて (1.1) 式によつて熱応力を計算できる場合を考えると、強度の大きいコンクリートが温度変動に対して大きい抵抗力を持っているとは限らない。外界の温度変動の影響を考慮しないと、(1.1) 式における温度変化 T はコンクリートの発熱によるものであるから、ここでは主として発熱による温度上昇と強度ならぬに弾性係数との間の関連を調べることにする。

(1) 強度の増進

数個のダムに用いられた中庸熱セメントの圧縮強度と水和熱との関係と有泉、小松集、安次⁽¹⁵⁾の各代が調べた結果によると、全社ならびに工場が異なっても大きな差がなかった。しかしながら、鉦畑ダムにおいて高炉セメントを使用すべく、この関係を求めて中庸熱セメントと比較した結果⁽¹⁶⁾によると、同一の水和熱に対してセメントの圧縮強度はわずかながら小さい。ダムにおいては圧縮強度そのものが重大な問題となることは少ない。水和熱発生時にひび割れが生ずるかどうかはむしろ引張強度と引張応力との関係に帰せられるべきものである。ダムのコンクリートにおける引張強度を調べたものはほとんどないようである。そこで、セメントの曲げ強度を基準にとつて考えてみることにする。文献⁽¹⁴⁾と⁽¹⁵⁾に示された資料から、ダムに使用された中庸熱ポルトランドセメントと高炉セメントに対して、単位水和熱当りの曲げ強度と比較すると表-1.10の通りになる。この表に示されるように、同一の水和熱に対して高炉セメントの方が曲げ強度の発生割合が同じ位かむしろやや小さいようである。

表-1.10 セメントの種類と単位水和熱当りの曲げ強度($\text{kg-cm}^2/\text{cal-g}$)

種類	材令	
	7日	28日
中庸熱	0.632	0.869
高 炉	0.607	0.819

(1.1) 式および第II篇(3.35)式において、温度変化 T が水和熱の発生量に比例するとすると、もし同一の水和熱 α とよび αE が同じであるセメントにおいては、曲げ強度の大きいセメントの方がひび割れが生ずる危険性が少ない。したがって、水和熱の発生速度が小さく、その最終値の小さいセメントが好ましい。

これはもちろんであるが、表-1.10に示したように、単位水和熱当りの強度についても考慮を払う必要がある。

引張強度と圧縮強度の比はだいたい1/10位の値が得られる。この値は材令および配合によって幾分変化するものであり、材令が若いほど、および貧配合のコンクリートほど大きくなる。材令と配合の影響は曲げ強度と圧縮強度の比に対しても同様の効果と及ぼすものである。ダム用コンクリートの品質の判定にはもっぱら圧縮強度が用いられており、ひび割れを研究するときにはこのような点に注意を払う必要がある。

(2) 弾性係数とクリープ

一般に、セメントにボゾラン質を混合するとポルトランドセメントのみを用いたコンクリート

より弾性係数は低下する。また、すでに述べたように、低熱系セメントを使用した場合においても同様である。一方、骨材の性質によっても弾性係数の値が異なることは前節で述べた通りである。熱応力の点から考えると、弾性係数の小さい方が好ましい。ただし、この場合においてもただ材料と弾性係数との関係を考えるだけでなく、初期のひび割れの問題と考えるときは、その材料における強度、水和熱などと同様に考慮する必要がある。

コンクリートの材料が若いときにはクリープが大きいから、初期の熱応力によるひび割れの発生条件を考慮するときには、クリープの効果と無視することはできない。一般的には弾性係数の小さいコンクリートはクリープが大きい。各種のダムに使用されたコンクリートについて、君島氏が弾性係数とクリープの値を示している。¹⁷⁾ その結果によると、やはり弾性係数の小さいときにはクリープも大きいという傾向が幾分認められる。ただし、この研究の中でアメリカの試験結果が、かなり大きい弾性係数を持つているにもかかわらず、わが国と同程度のクリープを示している。これらの資料は、それぞれのダムによってセメントの種類や配合の異なっているけれども、単位当たりクリープ率でも、

$Q(K, t-K) = F(K) \ln(1+t-K)$, または, $Q(\sigma_c, t-K) = F(\sigma_c) \ln(1+t-K)$ によって表すとすれば、 F の値は表-1.11に示すように、材料および圧縮強度と比較的密接な関係にある。ここに、 t はコンクリートの材料(day), K は載荷開始の材料(day), σ_c は圧縮強度(kgf/cm²)である。ここで示した例では、大森のダムのコンクリートのクリープは他と比べて小さい。

表-1.11 F の値 ($10^{-6}/\text{kg/cm}^2$)

K (day)	$F(K)$	σ_c (kg/cm ²)	$F(\sigma_c)$
7	0.9 ± 0.2	150	0.9 ± 0.4
28	0.5 ± 0.15	300	0.5 ± 0.2
91	0.3 ± 0.1	450	0.25 ± 0.1

クリープは養生条件によって変わるものであり、養生時に水分の多い乾燥したときにはクリープが大きい。また高炉セメントを用いたコンクリートのクリープはポルトランドセメントを用いたものより小さいという報告がある。¹⁸⁾ 注意すべきことは、クリープが大きいと確かに初期のひび割れの軽減は役立つが、それより後の時期において呈するダムの熱応力状態は、クリープの大きいコンクリートほど良好であるとは必ずしもいえない。長期にわたるダムの熱応力状態の経過は、すでに第I編において明らかのように非常に複雑であるから、それらの各時期における熱応力状態については別に考える必要がある。一般的には、熱応力は長期間にわたって徐々に変動するものであるから、クリープが大きいほど応力の大きさは軽減されると考えよう。

コンクリートのクリープは水セメント比、養生条件、骨材の性質、湿気など多くの要素によって支配されるが、強度がばね係数を減らす要素の多くはクリープを増大するものである。したがって、強くてクリープの大きいコンクリートを作ろうとすれば、温度変動に耐えられるための効果として期待される程は小さい。たとえば表-1.11に示したクリープは上限と下限とにかなりの開きがあるが、クリープの大きいコンクリートを作る余地はあるとしても、そのために努力を払っても効果は少ないであろう。一般的には、主として経験的であるが、低熱系のセメントを用いるとダムにおけるひび割れの防止に効果があることが知られている。

(3) 伸び能力

(1.1) 式を書き改めると、

$$\varepsilon = \sigma/E = -R \cdot \alpha T$$

となる。したがって、温度降下 $T (< 0)$ を与えるコンクリートの伸び能力を ε_t とするとき、上式をそのまま破壊時に適用すると、

$$\varepsilon_t > -R \cdot \alpha T, \quad \text{あるいは,} \quad \varepsilon_t / -\alpha T > R \quad (1.45)$$

なる関係があるがひび割れを生ずることになる。同じ条件を第II編の(3.35)式を用いて書くと、

$$\varepsilon_t > \beta \cdot \alpha T, \quad \text{あるいは,} \quad \varepsilon_t / \alpha T > \beta \quad (1.46)$$

となる。この式によると直接コンクリートの伸び能力のみを測定しておけばよい。伸び能力の試験は弾性係数やクリープの試験に比べて簡便であり、材料による伸び能力の変化は後者の諸性質に比べて小さい。しかしながら荷重速度によって大きく変化をうける。たとえば、J. L. Savage¹⁹⁾の研究によるとかなり長期間の持続荷重の下においては、伸び能力は $70 \sim 110 \times 10^{-6}$ の値を示し、急速な荷重の下ではこの値の $1/1.2 \sim 1/2.5$ であった。また、R. E. Davis²⁰⁾の求めた結果は、2~3ヶ月で破壊させたときには $80 \sim 160 \times 10^{-6}$ であった。

発生ひびきと引張強度の大小関係よりひび割れ条件を考察するとよければ、第I編の4.3の計算においてもそうであったように、クリープが応力の大きさにかわらず同一であると仮定する。通常の試験においては、圧縮強度の数分の1の圧縮応力によって試験され、引張強度附近の応力のときにおいてもそこから得られた値と同じ大きさのクリープを示すものと仮定している。(1.4)式のように伸び能力によってひび割れ発生条件を考えるのは非常に直接的であり、上記のような欠陥はなくなると考えられ易い。しかしながら、このときにおいても、発生する歪の大きさを求めるに当たって上と同様にひびきと歪との関

係式を用いる限りにおいては、やはり同様の欠点が残されているわけである。

(4) ひび割れ条件

ダムにおいては、ヤニ編 §3.4 において述べたように、アーチダムの耐荷力を考えるとき以外は、圧縮による破壊現象が直接的な問題となることはない。特に熱応力を考慮するときにはひび割れ、すなわち引張に対する破壊現象を取り扱わなければならない。しかもダムにおいては単軸応力状態を呈することはほとんどなく、二次元あるいは三次元応力状態を示すものである。ダムの表面において急速な温度低下を行うときを考えると、このときには表面における応力勾配が極めて大きい。

以上のような結果から、単軸引張試験の結果と発生応力を比較したのみではひび割れの生ずるか否かを決定することはできない。曲げ応力状態のように、応力勾配のあるときには、単軸引張状態よりもひび割れの発生し難いことは多くの実験から明らかになっているが、多軸応力状態に対するひび割れの条件についてはほとんど不明である。最近ではわが国においても多軸応力下の圧縮強度の研究が行われており、引張強度についても研究が望まれるわけである。

(5) 温度の影響

セメントの水和作用は温度が高いほど促進されるので、打設温度ならぬ養生温度が高いほど、初期材令において水和熱、弾性係数などが増大する。しかしながら、材令の経過とともに水和作用が抑制され、長期間後には、打設温度ならぬ養生温度の低い方が上記の値が大きくなる。ダムが最終安定温度に達したときにおける熱応力は、ヤニ編 (4.5) および (4.6) 式に示すように、

$$\sigma = R \alpha E (T_p + T_r - T_f) \quad (1.5a)$$

$$\sigma = R \alpha \{ (T_p + T_r - T_f) E_2 - T_r E_1 \} \quad (1.5b)$$

によって計算することができ、(1.5)式は打設温度 T_p が低いほど小さくなり、結局の引張強度は打設温度が低いほど大きい。したがって、コンクリートが凍結をうける限りにおいて打設温度を低下させるのがよい。高野氏²⁾は実験的にこの事実を明らかにするとともに、普通セメントと中熱セメントを比較すると中熱セメントを用いたコンクリートの方が安全性の大きいことを示した。

以上の関係は高炉セメントあるいはフライアッシュを用いたコンクリートに対しても成立する。しかしながらかなり低温で打設ならぬ養生を行う場合には、これらのコンクリートは

強度の小さいことに注意する必要がある。養生温度 $4 \sim 10^{\circ}\text{C}$ においては、フライアッシュを用いたコンクリートの強度増進の割合はフライアッシュを用いないときとそれほど大きな差はないことが多い。^{22)~24)} しかしながら、河本ダムコンクリートに対する予備試験によると表-1.12 のような値が得られている。すなわち、低温において養生したものは、強

表-1.12 低温養生コンクリートの性質 (河本ダム; 中腐蝕: フライアッシュ = 7:3)

(a) 強度と弾性係数

養生温度 $^{\circ}\text{C}$ (日)		3	7	28
圧縮強度 (kg/cm^2)	20 ± 3	54	75	152
	5.5 ± 2.5	35	51	99
引張係数 (kg/cm^2)	20 ± 3	6.5	9.0	14.8
	5.5 ± 2.5	4.3	6.3	11.1
動弾性係数 $\times 10^5$ (kg/cm^2)	20 ± 3	2.086	2.514	2.950
	5.5 ± 2.5	1.618	2.051	2.805

(b) 指数

養生温度 $^{\circ}\text{C}$ (日)		3	7	28
圧縮強度 (%)	20 ± 3	100	100	100
	5.5 ± 2.5	65	67	65
引張係数 (%)	20 ± 3	100	100	100
	5.5 ± 2.5	66	70	75
動弾性係数 (%)	20 ± 3	100	100	100
	5.5 ± 2.5	77	82	95

度の増進に比べて弾性係数の増加の方が著しい。高炉セメントを用いたコンクリートにおいても同様の結果が現われている。²⁵⁾²⁶⁾ このことには、(1.1)式およびヤング係数(3.35)式より明らかたように、温度変化を受けたときにはひび割れが発生する可能性が大きくなる。なお、フライアッシュや高炉セメントは、供給源や供給時期の異なるために幾分性質の異なることがあるのに注意する必要がある。現在まで行なわれた多くの実験結果において、異なる結果が得られている例々あることはこのような事情が影響していると考えられる。

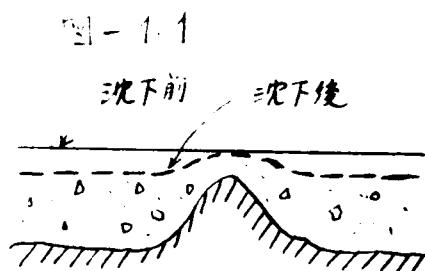
§1.4 体積変化

温度変動による体積変化については、すでに §1.2 において述べたが、コンクリートは他の多くの原因によっても体積変化を生ずるものである。それらに起因するものは熱収縮と同様の関係によって解析のできることにについても、すでにヤング係数において評述した。ここでは、クリープを除外して、温度変動以外の原因によるコンクリートの体積変化について略述することにする。

(1) 沈下収縮

コンクリート打設後固まらないうちに沈下する現象は常に見られることである。このような沈下現象は通常沈下収縮と呼ばれている。沈下収縮は「ブリージング」によるコンクリート中の空隙水の減少によるものであるから、この収縮を抑えるには「ブリージング」を少なくすればよい。沈下収縮に関しては比較的多くの研究が行われていて、その概略値と推定することも可能である。しかしながら、打設後固まらないうちに沈下することのあるひび割れ（沈下収縮が影響しているものと考えられている）あるいは固有応力とどの程度の関係があるかはまだ明らかではない。沈下収縮は、ともかくコンクリート材料の極力若いときに発生するものであるから、セメントがほとんど硬化せず、その変形能力も大きいから、固有応力として残存する量は無視しても差支えないほどの小さい値であると考えてもよい。

通常の条件においては沈下収縮のみによってコンクリートにひび割れが生ずることはない。ただ他の原因と重なると、沈下収縮がひび割れ発現の有力な一要素となることがあるから注意をしなければならぬ。



たとえば図-1.1 に示すように、若い突出部を持つ着盤の両側にわたってコンクリートを打設すると、突出部の両側のみが不同沈下を生じ、突出部上のコンクリート表面に引張応力を惹起する。

(2) Plastic shrinkage

これはコンクリート打設後数時間以内の間に、コンクリートがまだプラスチックな間に、その表面から水分が蒸発することによって生ずる収縮である。このためにコンクリート表面において水分による充満がなくなつてしばらく後からひび割れが発生することがある。W. Lerch²²⁾は、plastic shrinkageの原因は内部より供給される水分より表面から蒸発する水分の方が大きいために生ずるものであると述べている。表面からの水分蒸発速度は条件によって激しく変動する。ある場合にはむしろ極めて蒸発速度が大きいために、ブリージングによって表面に浮き上る水量の割合よりも蒸発量が大きくなってひび割れが生ずる。蒸発割合に主要な関係を持つ要素は、風速、外気の温度、コンクリートおよび外気の温度などである。

plastic shrinkageに自身によるひび割れは比較的表面部分のみに止まっている

が、他の原因によつて生ずる引張力によつて内部でひびが進行する可能性が少からできだけ避けるべきである。そのための主要な方法はつぎの通りである。

(a) 暑い時期においてはコンクリート温度を下げる。寒い時期にコンクリートを暖めるときには過熱しないように注意する。

(b) 打設後できるだけ速かに養生を開始する。養生としては散水、湿砂または防水剤で敷く。

(c) 表面の風速を弱め、日射を避ける。

(3) 硬化収縮

セメントの水和作用が進行するにつれてセメントの水和物が生成されるため、セメント相の体積は増加するが、混合水として溶解していた水の量は減する。これらの増減の結果としては、通常体積が減する。水和作用が著しく進行した後においては、セメント相はたかひに連続した固体となり、水は生成したゲルあるいは結晶に含まれる以外の余剰が自由水として空隙中に存在することになる。このような状態に達すれば硬化収縮はほとんど生じなくなる。

(4) その他の化学反応による体積変化

セメントと骨材あるいは水との化学変化は、硬化過程にのみ現われるものではない。自己成長と呼ばれるように、非常に長期間にわたつて徐々に化学反応が進行してコンクリートに体積変化を生ぜしめることがある。自己成長の大きさはセメントおよび骨材の性質によつて変わり、膨張となることも収縮となることもある。²⁸⁾ 实例をあげると表-1.13 のようにかなり大きい値を示すこともある。²⁹⁾

硬化収縮および自己成長による体積変化は必ずしも完全に分離して考えることができない性質のものであり、一方、体積変化は長期にわたつて徐々に進行するものであるから、その大きさにいかかわらず比較的なかに及ぼす効果は小さい。

表-1.13 コンクリートの自己成長
(10-6)

ダム	自己成長
Hiwassee	85~190
Norris	90~125

しかしながら注意を要するのは Parker ダム³⁰⁾³¹⁾ に見られるようなアルカリ—骨材反応による体積変化である。このような場合にはダムに重大な損傷を生ずるが、幸いにしてわが国においては極端なアルカリ—骨材反応を生ずるような骨材は少ないのである。

(5) 湿度変化

コンクリートに含まれる水分の大小に応じて伸縮する。現在までの研究によると、コンクリートの伸縮に影響する水分はセメントゲル中に含まれている半結合水³²⁾の量の変化によるものであり、自由水はほとんど関係ないとされている。ただし、結晶水が放散されるほど激しい乾燥を受ける場合は除外することにする。したがって、コンクリート中の全含水量の変化と体積変化とは直接的な関係がない。

コンクリートが乾燥を受けたときに生ずる収縮量はつぎに挙げるような多くの因子によって支配される。

(a) セメントおよび骨材の種類ならびに配合

(b) 養生条件

(c) 材質と環境条件

なお、乾燥セメントおよびフライアッシュを混合したセメントを用いると乾燥収縮量は減少する。

湿度の影響について詳述することは省略し、乾燥収縮を大まかにいう因子の主要なもののみを示せばつぎの通りである。ただし乾燥速度は表面よりの蒸発割合に影響されるものである。

(a) セメント中の $3\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$ の量

(b) 多孔性および軟かい骨材ならびに粘土分

(c) セメント量と水セメント比

(d) 材質の若さ

乾燥収縮量の関係する要素は極めて多いが、Hiwassee ダムではこの収縮量が 200×10^{-6} であると報告されているようにかなり大きいものである。そのために湿度変化とそれによる体積変化の関係については多くの学者が研究を行っている。この関係をかなり理想化すると、つぎのように温度変化とそれによる体積変化を取り扱う場合と目標な関係式が得られる。

コンクリートの単位体積中の水量 w の変化は、

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a' \nabla^2 w \quad (16)$$

というような拡散方程式で表わされるものとする。(16)式は熱伝導の微分方程式と同じ型であり、 a' は水分伝導率と呼ぶべきものである。つぎに w と体積 v との関係と

考へなければならぬ。この関係は

$$e = \alpha' w + \beta, \quad (\alpha', \beta \text{ は 常 数}) \quad (1.7)$$

と置く。(1.7)式は極めて近似的な関係にすぎないが、この直線的な関係式が成立すると仮定すると、含水量の変化ならびにそれによる体積変化の関係は、温度の変化ならびにそれによる体積変化と全く同じような関係式によって表現することができる。³³⁾³⁴⁾

この場合問題になるのは、表面における境界条件として蒸発量を考へなければならぬことである。表面における蒸発量は本節(2)において述べたことより明らかなるに気象条件に著しく左右される。

コンクリート中における水分の移動は極めて緩慢である。換言すれば(1.6)式における α' の値が極めて小さい。そのため、厚いコンクリートダムにおいては内部まで乾燥されると考へる必要はない。しかしながら、 α' が小さいために表面部分のみが乾燥され、その結果表面において生ずる体積変化が内部のコンクリートによって著しく拘束され、大きな引張応力を生ずることになる。

なお、コンクリートが湿気あるいは湿度変動を繰り返すと徐々に収縮する現象が認められている。したがってダムの表面(とくに下流表面)ではこの影響による引張応力が余分に加えられるわけである。

第 2 章 コンクリート打設法の検討

コンクリートダムに生ずる熱た力の起因を大別すると、水和熱の発生とそれの冷却によるもの、および外界の温度変動によるものの2つに大別される。この章においては前者による熱た力を研究し、古くから問題になつてゐるところのひび割れ防止のために有効なコンクリート打設工法について検討を加へることとする。すでに第1章において明らかにしたように、コンクリートの性質の差異に応じてひび割れに対する抵抗力が異なるのであるから、コンクリート打設計画に際しては、まず第一にコンクリートの性質を十分詳しく調べて、それぞれのコンクリートに適した打設工法を採用する必要がある。つぎに考慮しなければならない重要な点は環境条件である。環境条件とは単にダムの境界条件を考慮のみならず、コンクリートの打設温度、最高温度、養生条件などに大きな影響を与える。

温度変動とそれに伴う熱た力の大きさを評価するためには、ダムの施工工程のすべての要素を考慮に入れ、しかもコンクリートの塑性的性質も加味しなければならないので非常に複雑になる。そこで条件を単純化し、個々の因子を单独で変化する場合の熱た力状態について考えることが非常に有効となる。こうすれば、熱た力の絶対値は正しく知ることができるとしても、施工法と環境条件の変化が熱た力状態ならぬにひび割れの発生に及ぼす影響の程度について基本的知識を把握することができ、この知識はそれぞれ、ダムについてひび割れ防止のための工法を決定するのに役立つ。

本章では、コンクリートの性質ならぬに温度変動と熱た力状態との関連について考察し、有言な熱た力を生ぜしめずひび割れを減ずるためのコンクリート打設法について一般的に研究結果を述べる。

§2-1 コンクリートの選択と養生条件

第1章においてはコンクリートの各種特性に及ぼす因子について述べたので、ここでは親和性として、各種コンクリートの特徴を、主として生ずる熱た力の大小ならぬにひび割れに対する抵抗力の優劣という点から示すことにする。

(1) セメント

現在においてダム用コンクリートとして用いられているセメントは普通ポルトランドセメント、中庸熱ポルトランドセメント、高炉ならい、フライアッシュ混合セメントである。低熱セメントを用いれば、水和熱の発生が小さく、若し材料において弾性係数が小さくクリープが大きいうで、通常の条件においてはひび割れ防止には極めて有効である。しかしながら、価格が高いためにわが国においてはほとんど使用されておらず、ここには考察を加えないことにする。

普通ポルトランドセメントは最も広く使用されかつ使用経験も深いものであるが、ダムに用いるときには水和熱の発生量が大きいので、グラウトを充填するまでに必要な収熱量が大きいうで好ましくない。若し材料において水和熱の発生割合が大きければ、ワット閉塞前に放散される熱量が大きくなるという点では有利であるが、一般的には伸縮能力、引張強度、弾性係数、クリープなどの性質と水和熱の発生量との関係が、他のセメントよりもひび割れに対して不利な結果を与えるものであり、経験上もこのことが認められている。したがって近年の大型ダムにおいては普通セメントの単独の使用はされることはほとんどない。高炉セメントやフライアッシュ混合セメントとして使用されることが多い。

普通ポルトランドセメントの欠陥を補ない、低熱セメントは価格が高くないものとして中庸熱ポルトランドセメントが盛んに用いられる。普通セメントに比較するとひび割れに対する抵抗力が小さく、表-1.8によれば材料28日における水和熱は約15%少ない。ただし長期材料においては水和熱にこれほど大きい差はない。一般に、ダムにおける各種の厳しい条件下においても十分に満足すべき結果が得られているようである。

高炉セメントは価格が安く、長期材料において大きい強度と發揮するので最近盛んに利用されている。大ダム会議日本国内委員会において使用者の所見を調査した結果によると、十分高炉セメントの性質を認識して使用可能なダムコンクリート用のセメントとして使用できるものであると考えられる。それぞれのダムの工事者から寄せられた所見を調べると、低温時には初期強度の発生が遅いので養生ならぬに照わく存置期間について十分慎重に考えなければならぬこと、連行空気を導入し難いことなどを共通して述べている。しかしながらその他々々についてはあるダムにおいて利点としていることが他のダムにおいては欠点として教えられるという例もある。

このようなことは高炉セメントのものの品質の差および使用条件などによつて現われるものと思われ、したがつて使用する高炉セメントの性質と使用条件を十分よく研究する必要がある。そこで以上の所見と第1章に示したことから、高炉セメントを用いたコンクリート構造物の注意する点と挙げるべきものの通りである。

(a) 耐水性が悪いという結果と悪いという結果がでてゐる。

(b) 高炉セメントの熱膨張係数が大きい。

(c) 水化熱は中庸熱ポルトランドセメントに等しいかそれより大きい。

(d) 単位水化熱当りの強度が中庸熱ポルトランドセメントに等しいかそれより小さい。

(e) 水化熱の発生する際にはとくに強度増進が小さい。また強度の小さい割合には弾性係数の低下という傾向がある。

(f) 硬化および乾燥による収縮は他のセメントと比べて大きいことがある。

ポゾランとしてフライアッシュを混合することかたよく行なわれている。普通ポルトランドセメントにフライアッシュを混合すれば中庸熱セメント程度の水化熱とすることと思ふ。フライアッシュは高炉スラグと同様に生産工場や時期による工場差があり、幾分品質の変動することに注意する必要がある。またフライアッシュを混合する時期における水化熱の減少に伴つて強度が低下する割合には弾性係数の低下が小さい。一、二、硬化および乾燥による収縮は他のセメントより小さいという利点がある。今までの経験によるとセメントにフライアッシュを混合して使用した場合には、たゞりたつたにおいて良好な成績が収められているようである。これは水化熱の減少よりも伴ひ能力および強度の低下が小さく、クリープは増加する傾向にあり、比較的経過時においてもとくに欠点が見られないことによるものであらう。

初期におけるコンクリートのひび割れに対する抵抗性の吟味を行なうには、水化熱の発生状況、弾性、クリープ、引張強度、伸び能力などの他に使用条件をも考へて総合的に研究する必要がある。現状においては、現象が非常に複雑であることと、セメントおよびコンクリートについて以上の性質を一貫して実施した研究がほとんどないので、どの種類のセメントを用いればいかなる使用条件（施工条件）まで許されるかということと決定することはできない。もちろん、これらのことは、セメントの種類のかによつて決定されるものではなく、つぎに述べる骨材の種類や配合によつても影響をうけるものである。初期材料におけるコンクリートの伸び能力がセメントの種類によつてどの程度差があるかが明らかでないが、この値がセメントの種類によつて大差がなければ、養生に面倒を及ぼさる程度に於いて水化熱の小さいセメントを用いるのがよいことになる。水化熱による温度上昇が小

されれば (1.5) 式より、最終安定温度に達したときより張力も小さくなる。(1.5b) 式によれば、最終安定温度における引張力を減少させるためには、材料の若い時期にクリープが小さくて最高温度に達するときまでの間の持続弾性係数 E_t が大きい必要があり、このことは初期にひび割れを低くするために要求される性質と逆であることを注意する必要がある。

(2) 骨材とコンクリートの配合

骨材は経済上ならぬにコンクリートに使用する時の品質の一律性、粒度、形状などの点に關する要求から決定する必要があるので、岩石の種類を自由に選定することができない。しかるから、ひび割れに対する抵抗性のみより考へると、石灰岩質のものゝ硅酸質のものゝにおいて非常に大きい差があることが明らかであるから、このような点についても考慮を払ふ必要がある。ほんのわずかな輸送距離の増加によつて優秀な硅酸質の骨材が得られる場合には、骨材価格の増大と養生あるいは打設工程における各種の便益ならぬに経済性にかゝる慎重に比較検討する必要があるだろう。

一方、骨材が支配的な影響を及ぼすコンクリートの性質としては、温度伝導率、熱伝導率、熱膨張係数などがある。これらの性質によつてコンクリートに現れる温度変化と体積変化の量が異なることも注意する必要がある。

骨材が与へる他の効果は、コンクリートの配合に大きい關係を持つてゐることによるものである。できるだけセメント量と水セメント比の小さいコンクリートを作るように骨材の粒度と形を選定し、水和熱、沈下収縮、硬化収縮などを減らすことによつて強度、耐久性、耐水性などの大きいコンクリートが得られるようにしなければならない。配合の決定に對しては AE 剤あるいはセメント分散剤などの各種の混和剤についても研究をしなければならない。

(3) 養生

養生温度によつて水和熱、強度、弾性係数などの増加して行く割合が異なり、凍結の恐れ加へる程度の低温において打設を行なう方が最終安定温度に達したときのひび割れに対する安全性の大きいことはすでに述べた通りである。水和熱の発生時におけるひび割れを考へるときには、水和熱の発生量と他の多くの性質との關係を考へなければならぬ。したがつて、打設温度がひび割れの可能性にどの程度の影響を及ぼすか明確にすることは困難であり、この點に關する一貫した研究結果

果も少ない。ただし、外気の温度より打設温度を低下せしめると、水和熱が発生しても外気との温度差が小さいために、熱応力を軽減するのには著しい効果がある。

plastic shrinkage ならびに乾燥収縮の両者とも生ずるときに万が一も養生温度に低くすかより、すなわち、表面散水その他の方法で養生すれば、とくに夏期に万が一も表面における収縮量を軽減し、効果が大なり。型わくと長期間使用していることも表面の乾燥を抑制するのにも効果がある。

§2.2 鉛直断面内の熱応力状態

ダムの中のプロット内には生ずる熱応力を、中継層にはらって鉛直断面と水平断面内における二次元問題として考えることにする。本節では基礎岩盤にコンクリートが打設され、順次逐次打設されるコンクリートの上に新しいリフトの打設が進行し、その間に水和熱の発生と放散が行なわれ、進行するにつれて現われる鉛直断面内の熱応力状態を考察する。水平断面内の熱応力状態は次節において述べることにする。

1) 拘束状態の一般的傾向

基礎岩盤または下のコンクリートに新しいコンクリート リフトが打設されたときを考察するが、このときには基礎岩盤は半無限体、下部コンクリートはリフトと同程度の長い物体と考えればよいであろう。その結果は、同じ弾性係数のときに岩盤の方が拘束度が大きくなり、被拘束物と拘束物との弾性係数比 E_1/E_2 が小さいほど拘束度が大きくなるという（中継層第5頁以下、あるいは附図-Ⅱ-9.2～Ⅱ-9.7参照）。実際の熱応力などを計算するには、リフトの弾性係数 E_1 の大きさとともに拘束物の弾性係数 E_2 の値がいかに小さいかということが重大な問題になる。

(i) 基礎岩盤による拘束

基礎岩盤の弾性係数はその構成岩石の性質のみならず、存在するひび割れ、あるいは介在する粘土質の量によっても影響される。基礎岩盤の弾性係数の把握は困難な事項であつて、載荷試験を実施すると、荷重—変形曲線が非直線的となるのみならず、クリープならびにヒステリシスの現象を示す。基礎岩盤の力学的性質を定明するために実施される試験方法としては、弾性波の伝播速度の測定と載荷試験が行なわれるのが通例である。後者では、

(ii) 地上において荷重を載せる方法

(b) 試掘坑その地の坑内において油圧ジャッキにより坑の直経方向に何う相対する荷重を加える方法,

(c) 坑内は水を満たして水圧を加え坑の全周に水圧を加える方法,
 などが採用される。各地のダム基礎岩盤に対して、これらの各種の方法を用いて弾性係数を決定した結果は、試験法に応じて異なつた値の得られることが明らかに成つた。弾性波の伝播速度より求めた弾性係数が最大の値となり、載荷試験による各種の方法で得た値の方が小さい。後者の中で (b) と (c) を比較すると (b) の方が大きい弾性係数を与える。また、同一の載荷方法では、載荷面積を大きくし荷重を大きくするほど弾性係数として小さい値が得られる。

以上の傾向よりつぎのような事項が明らかになる。基礎岩盤は亀裂、粘土層あるいは軟弱岩などの存在によつてかなり大きい塑性的性質を示すので、微小な荷重による試験と大荷重による試験とでは同一の性質を示さない。したがつて実際に作用する程度の大きさの荷重によつて載荷試験を行ふ必要がある。一方、荷重の及ぶ範囲が小さければその部分のみの岩盤に対する荷重—変形の関係が得られるにすぎないから、常に実際に荷重が及ぶ範囲にわたつての性質が求められるように、できるだけ大規模な試験を実施しなければならない。Davis ダムに接して造られた発電所の基礎岩盤に対して、地上からの載荷試験によつて荷重—変形曲線と求めたところ、グラウトを実施する前後においてほとんど弾性係数に差がなかった²⁾。この岩盤には、載荷点の下がかなり深い所に断層破砕帯が通つていて、載荷試験によると、この破砕帯の変形が支配的な大きさを占めているために、岩盤のみがグラウトによつて弾性係数が増大したとしても、載荷試験によつて得られた全体の荷重—変形曲線にはほとんど影響を及ぼさなかつた⁴⁾のである。

基礎岩盤の弾性係数はそれほど大きいものでないことは上記の説明で明らかになる通りである。わが国における載荷試験の結果によると塑性変形が大きく、計算に採用された弾性係数は、グラウト工による岩盤改良の効果も考慮に入れて $3 \sim 20 \times 10^4$ kg/cm² 程度である。このように、基礎岩盤の弾性係数は比較的小さいから、コンクリート材令の若い時期を除くと、基礎岩盤による拘束は大きくないと考えられ、コンクリート打設直後においては $\alpha = 0$ 、長期間経過後においては α が増加するが最大値は $\alpha = 10$ 位までと考えればよいであろう。そうすると基礎の拘束度は $1.0 \sim 0.2$ の間にあることになる。附図—Ⅱ・9・3 および Ⅱ・9・4 (9.1) 式より、拘束度は α の値によつて比較的徐々に変化するため、 α の値としては概略値を用いて拘束度を求めた応力状態を求めてもよいことがわかる。

熱応力問題のみを考へると基礎岩盤が悪くて弾性係数の小さい方がよいが、 α に縮むに似ていたように、特にアーチダムにおいては堅固な岩盤が望まれる。応力状態に関する考察以外に、浸透水量やひびに揚圧力の減少を目的として、岩盤のグラウト工は必ずしも必要であるから、熱応力問題とは全く別な観点より基礎岩盤の調査ならぬに改良を実施しなければならない。

(ii) 旧コンクリートによる拘束

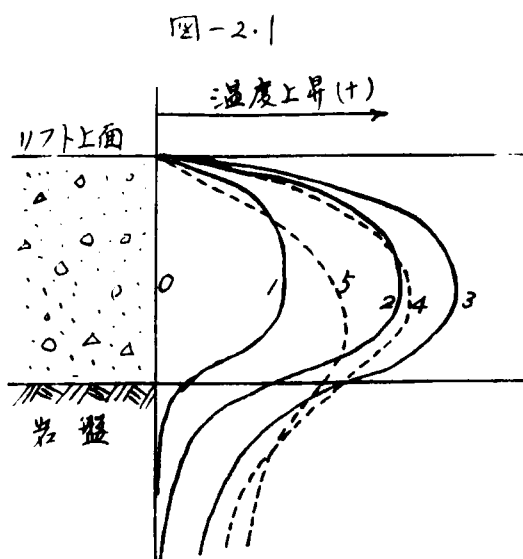
新しいリフトがすでに硬化したコンクリートに打設されると、下のコンクリートによって拘束をうける。このリフトの上にさらにリフトが積み重ねられると、注目しているリフトは上部のコンクリートからも拘束をうけることになる。問題となる弾性係数比 α の値はコンクリート試験によって決定できる。注目しているリフトが打設された直後においては $\alpha = 0$ であり、 α が進むにつれて下層との弾性係数の差が小さくなり $\alpha = 1$ となる。一方上層からうける拘束を考へると、上層が打設された直後においては $\alpha = 0$ であり、長期間後には $\alpha = 1$ まで達する。この場合の拘束度を求めるには同一幅の物体に連続した矩形板の熱応力状態（ α 縮み α 6章）を参照すればよい。

下部のコンクリートによる拘束度は附図-Ⅱ-9.2 および α 縮み (9.2) 式より求められる。下部のコンクリートによる拘束は、 $0 \leq \alpha \leq 1$ において拘束度 R が $1 \geq R > 0.5$ というようになり大きく変わる。上部のコンクリートによる拘束は、 $\infty > \alpha \geq 1$ において $0 \leq R < 0.5$ の間にある。

以上の物体中の一部分のみにおいて一様な温度変化をうけるものとして考へた場合の結果であつて、通常簡単のために使用されている拘束度という言葉を用い、このかどのよう状態にあるかを示したものである。一般には拘束度の大きいときには熱応力が大きくなるが、水和熱の発生による応力とそれに続く冷却期間中の状態を詳しく考へると、上記のような拘束度のみによって熱応力あるいはひび割れの問題を考へることができない。

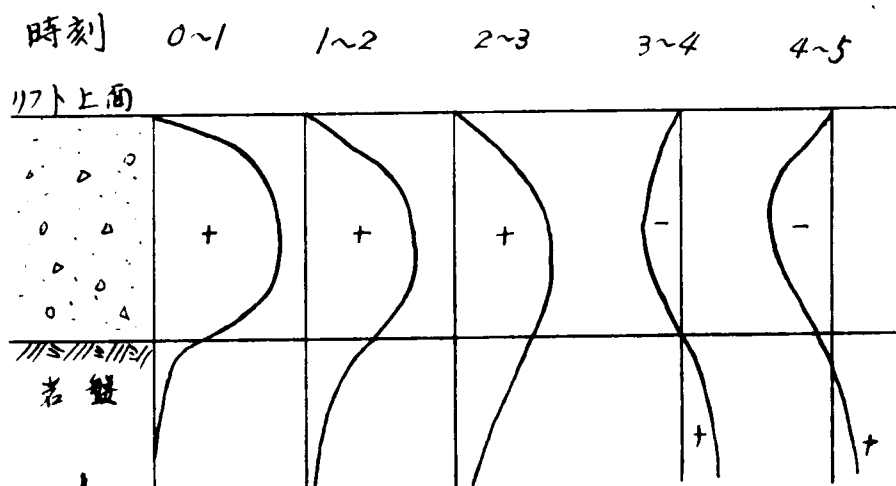
(2) 基礎岩盤上に打設したリフトの熱応力の経過

基礎岩盤にコンクリートを1リフトのみを打設した場合を考へよう。このときの温度経歴の典型的な例は、図-21に示すように、時刻が経過するにつれて図に記入した番号順に温度分布が変わる。ただし、打設温度と気温とは等しく、気温は変動しないものと仮定する。そこで、それぞれの時刻において以前の時刻との間に生じた温度増減量を画くことにより示すようになる。基礎岩盤の温度変化はコンクリートに取られる部分のみに



生ずるものであり、岩盤全体から考えると極く局所的な温度変動であるために周囲の岩盤による拘束が大きくて、温度変動を主いても変形量はかなり小さいであろう。また、コンクリート材令が若いときには、コンクリートと岩盤との弾性係数比 α がかなり小さいものと考えてよい。そこで、簡単のために基礎岩盤は温度変動によって変形せず、かつ $\alpha = 0$ の状態にあるものと仮定

図-2.2



よう。そうすると、打設リフトに生ずる応力を求めるには、そのリフトの温度変動のみを考えればよい。

(i) 1 リフトのみを打設するとき

ブロックの幅 $2l = 15\text{ m}$ 、打設リフトの厚さ $2h$ は $0.75 \sim 1.5\text{ m}$ 程度であるから、 $l/h = 20 \sim 10$ である。このような寸法のあるときには、第II編第5章(附図-Ⅱ-5.3および4)に示したように、 $\alpha = 0$ のときにはブロック中心部における水平方向の直応力 σ_x は、ブロックの両端で完全に拘束されたときの熱応力

$$\sigma_x = -\alpha E T \quad (2.1)$$

にほとんど等しい。したがって、(2.1)式を基礎としてクリープの生ずることを考慮を入れて、打設したコンクリート層の水平直応力の経過を考えたかよう。

リフト上面では温度変化がないから常に応力は生じない。リフトの厚さの中央部で

は時刻 0~3 の間において (図-2.2 参照) 他のどの部分よりも大きい圧縮応力を生じ、以後の時刻には漸く圧縮応力が減ずる。この部分は温度上昇をうける期間が比較的長いから、弾性係数が小さくクリップが大きいために圧縮応力の値そのものは大きくない。それに続く冷却期間中において、比較的硬化が進行しているために温度降下の割に圧縮応力の減少が著しい。そのために打設温度まで冷却するよりもかなり以前において引張応力の現われることが考えられる。一方、基礎岩盤面においては真下の中央部と類似の傾向であるが、生ずる圧縮応力はむしろ引張応力の最大値が小さく、時刻が遅れる。

以上は定性的に傾向を示したのみであって、実際の熱応力の大きさと経過はコンクリートの性質ならびに打設したリフトの寸法によっても異なる。計算例として A. T. Biélov³⁾ の求めた結果を示すことにする。コンクリートの性質としては附図-Ⅱ・2.1 の通り仮定する。気温に等しい打設温度において、高さ 3m で無限に長いリフトを剛性の基礎の上に打設したときの応力経過は附図-Ⅱ・2.2 に示す通りである。上表面においては応力が極めて小さく、基礎面においては図に示された期間中においては許容引張応力を超過することはない。しかしながら、高さの中央においては、初期の圧縮とこれに続く引張応力が大きくなり、打設 950 時 (40 日) において引張応力が許容値を越えることになる。

打設リフトの高さならびにプレ・クーリングの効果は附図-Ⅱ・2.3 より明らかになる。この図は高さの 1/2 奥の水平直応力を示したものである。一方、リフトが高くなるにつれて初期の圧縮応力が大きくなり長期間続き、その後引張応力の増加は徐々であるが最終値は大きくなる。R. W. Carlson⁴⁾ がリフト高さで温度経歴を求めた結果 (A. T. Biélov の計算値と条件は同じでない) は附図-Ⅱ・2.4 の通りである。この温度経歴より、附図-Ⅱ・2.3 のような応力経過を示すことは容易に理解される。リフトの高くなるにつれて引張応力の発生時期が遅れるという長所はあるが、最終の引張強度は大きくなるという欠点を持つている。したがって、ここまで示した事柄のみでは、リフト高さをいかにすべきかという結論を引き出すことはできない。

(ii) 連続して打設するとき

つぎに、規則正しくリフトを打設していく場合を考えよう。そのために注目しているリフトが上のリフトによって与える影響を考察すると、つぎのような理由によってその影響は小さく、起るべきところには上部のコンクリートによる拘束をほとんど無視してもよいことがわかる。

(a) 上層の材料が若いときには、上層の弾性係数が著しく小さい。そのうえ注目してい

るが、この近傍において激しい温度変化が生ずる時期においては、上部の拘束力寸法がそれほど大きくなるので拘束力は小さい。

(b) 少なくとも注目しているリフトと上のリフトとの接続部では温度変動が同じである。そのためおたがいに拘束を及ぼし合うことは少ない。

(c) リフトがかなり高く打上げられるときを考えると、 α II編の第5章において述べたことより、基礎附近の水平直応力はほとんどその附近の温度変動のみによって支配される。

α II編において計算した宮崎のコンクリートの温度分布(附図-I・4・18)を以て、3日間隔で規則正しくコンクリート打設が実施されるとき基礎岩盤直上のリフトの温度経歴を示すと、附図-Ⅲ・2・5 および Ⅲ・2・6 の通りになる。附図-Ⅲ・2・4 と比較すると、リフトが順次打設されるために、最下層のリフトは上層から熱が流入して温度が上がるとともに冷却の遅い様子が明らかである。このような温度経歴を呈するに、コンクリートのクリープを考慮に入れても、よほど後日にならないと大きな引張応力が現われることはない。ただし、最終安定温度に達したときの引張応力は先の例より大きくなる。リフト表面では、上部のコンクリートによって閉塞されることは非常に小さいであり、閉塞後は大きな圧縮応力が長期間持続される。A. T. Blinov の計算でも以上のような傾向が示されている。

いずれの場合でも、基礎岩盤直上のリフトでは若い材料においてほとんど引張応力が発生しない。したがって、1週間～10日間程放置しても、リフト表面に熱応力によってひび割れを生ずることはないはずである。もしひび割れが生ずるとすれば、表面の急激な温度低下、他の原因によるコンクリートの収縮、岩盤の凸凹ならぬに不良、養生の不良、コンクリートの欠陥などに原因するものと考えられる。岩盤に欠陥のある場合については後述する。しかしながら、このリフトを打設して放置しておく、附図-Ⅲ・2・2 とⅢ・2・4 とを比較して考察すればわかるように、コンクリートの生硬によっても異なるが、リフトの高さの中央部においては、0.75 m (2.5 ft) リフトのときは材料3日、1.5 m (5 ft) リフトのときは5～6日位より以後において引張応力が生ずると思われる。リフトの表面においては、上記のような原因によって微細なひび割れを発生し易いから、もしこのような微細なひび割れの存在するときに岩盤直上のリフトを長期間放置しておけば、比較的短時日において内部までひび割れが進行することになる。

リフトを逐次積み上げて行くときを考えると、若い材料において大きな引張応力を生ずることになり、冷却が進むにつれて老の場合よりも大きな引張応力を生ずることになるか

の、最終安定温度に達したときにはより大きいひび割れを生ずる危険性がある。低リフトを用いると若し材令において内部に引張応力を生じ易いが、これは上にリフトを積み上げることによって解消されるものである。したがって、低リフトを用いて後に生ずる危険のあるひび割れを防止することに努めるとともに、初期材令において不測のひび割れと進行せしめないように努めるべきである。現在では 0.75 m リフトに対して 2~4 日位の打設間隔の用いられるのが普通であり、上記の結果よりたゞに必要であると考えられる。これ以上打設間隔を伸ばしても最下層リフトの最高温度上昇を下げることには大きい効果がないものである。

注意すべきことは、一般に岩盤の熱伝導率はコンクリートより良好だということである。附図-I・4・1A に示した宮田山の例では、コンクリートと岩盤との温度伝導率が同一として計算したものである。実際には岩盤への熱移動がより大きいので、最下層リフトの温度低下はここに示した計算値より速いため、引張応力の発生時期は幾分速くなる。

(iii) 熱応力の計算方針

基礎岩盤は剛体ではなく、また温度変動によって幾分変形するので、上記の仮定の下で $\alpha = 0$ とすると誤差を生ずる。コンクリート材令が若いときにはこの誤差は小さいものがあるが、より正確に計算するにはつぎのような考え方を採用することになる。

基礎岩盤の温度変動によって生ずるコンクリートと岩盤との接合部における岩盤の変形量 δ の値との両方の効果を考慮して、拘束度 R を推定する。そうすると、岩盤上の低リフトにおける水平直応力 σ_x は (近似的に鉛直断面の平均温度と接合部の温度が等しいとすると) 、

$$\sigma_x = -\alpha E \{ T - (1-R)T \} \quad (2.2)$$

となる。ここに、 T はリフト鉛直断面の平均温度上昇である。コンクリート材令が若い場合は δ の値は大きいから、 δ の推定値が違っても拘束度 R に及ぼす影響は小さい。

(2.1) 式と (2.2) 式を比較すると、岩盤の変形を考慮した影響は $(1-R)T$ によって与えられる。 R が小さくなるにつれて、温度上昇期の水平直応力は引張応力が増加する傾向になる。先に示した応力値は $R=1$ のときであり、実際には $R < 1$ であるから、リフト上表面では先に示した値よりも幾分引張応力が大きくなる。一方、リフトの下面においては高さの 1/2 点で水和熱による温度上昇の大きい点では、初期の圧縮応力は小さくなり、冷却期には引張応力は小さくなる。基礎岩盤が軟弱な場合あるいは断層破砕帯などがあるときには δ がかなり大きい値となり、したがって R が小さくなる。そのために若い材令において上表面に引張応力を生ずる危険性がある。とくに岩盤の一部に弱点があると、その部分において引張応力を生ずるから注意が必要

要である。

水平直応力以外に特に注意しなければならないことは、リフト側面・最下端に於ける鉛直直応力である。この応力は、リフトが一様な温度変化をすることを考えると、最初の温度上昇時に圧縮応力であり、温度が低下するにつれて引張応力となりその値はかなり大きい。この引張応力によつて上流面の打設目が開口することは厳に避けるべきである。この応力につれてはずむにヤニ編ヤニ章以下に示した通りであり、冷却によつて生ずる引張応力を軽減しようとする、温度の上昇量を抑制しなければならない。

(3) 旧コンクリート上に打設したリフトの熱応力の経過

前と同様に、まずすでに打上っているコンクリートブロックの上に1リフトを打ち足した場合の熱応力状態を考慮することにする。

下部のブロックの硬化ならぬに冷却が進んでしまっているものとする。このときに新しくリフトを打上げると、岩盤上に打設した場合と同様の温度状態になる。ただし、コンクリートの熱伝導性は岩盤より悪いのが普通であり、同一の α のときでは岩盤より拘束度が小さい。このような関係で応力状態は基礎岩盤直上に打設したリフトの場合と類似のものとなる。

(1) 連続して打設するとき

一定の間隔(数日間とする)で逐次打設を続けているときの状態を考えてみよう。

前と同様に附図-I・4・18の例によつて、基礎岩盤上 6.0~7.5 mにあるリフトについて打設後3日ごとの温度差をとると附図-Ⅱ・2・7のようになる。この例は打設間隔3日という比較的速い速度で規則正しく打設した場合である。ブロック幅(岩盤との接続部の長さ)が 15 m とすると、ヤニ編ヤニ章で示したように、基礎接続幅の1/2 程度上部では基礎の拘束が生じないし、また図に示された温度差は基礎接続部において非常に小さいから、もし考えている 6.0~7.5 m 上部にあるリフトの熱応力を考えるとすれば、基礎岩盤の拘束の影響は考慮に入れなくてもよい。

まずこのリフトの温度差による問題のリフトに生ずる応力は、岩盤上のリフトと同様に無視してもよいことにある。下のコンクリートの温度差による影響を考慮してみると、材料2日頃までは、下のコンクリートの上面近くの温度勾配が大きいので、下のコンクリートの上面では温度変動を生じて下部の拘束が大きくて変形量は小さいものと考えてよい(ヤニ編ヤニ章およびヤニ章参照)。また材料2日程度では下のコンクリートの弾性係数に比較して考えているリフトの弾性係数はかなり小さい。すなわち、

R が 1 よりかなり小さい。したがって、岩盤上に打設したときと同様に、リフト下面において変形を古いなという仮定を用いてもよいであろう。このようなことから、材令 2 日頃までは基礎岩盤直上のリフトとかなり似た熱応力状態になるものと考えられる。この場合の熱応力を求めるには、(2.2)式を用い R は 1 に近い値とするべきである。

つぎに、材令 3 日以後における温度差を考えると、附図 - Ⅲ-2.7 の各段階において、下コンクリートは比較的直線的な緩やかな変化を起している。したがって、これらの場合には下コンクリートの上面部には応力が小さく、ほとんど自由に体積変化を起しているものと考えてよい(Ⅲ編 4.2 章および 4.5 章参照)。それゆえに、材令 2~3 日以後の温度変化に対しては、考慮しているリフトはほとんど拘束のない応力状態を呈するわけである。熱応力を計算するには、(2.3)式において近似的に $R=0$ とおけばよい。

Ⅲ編 4.3 においては岩石の水平直応力を材令 3 日までは (2.2)式において $R=0$ と仮定して計算したわけである。ここで考察したことによると材令 2 日までは R が 1 に近く、それ以後は零に近いと考えるべきであるから、コンクリート打設後材令 3 日までの間の R の平均は 0.5 であるとして、Ⅲ編 4.3 における数値を使用し (2.2)式により応力を求めてみると、

$$\sigma_x = -11.0 \times 10^{-6} \times 0.06 \times 10^6 \{ (2.0 - (1 - 0.5) \times 13.0) \} = 0.3 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

である。これは先に求めた数値よりさらに小さい値であって実測値との誤差は大きくなる。この原因は R のとりかた近似的であって誤差を多く含む以外に、応力計算の基準値が異なることによるものである。すなわち、実測値は材令 1 日を基準時刻にとっている。なお、実測値そのものの信頼性について疑問のあることはすでに述べ通りである。

実測値の解析に際しては材令 1 日を基準として、このときから応力を発生するものとして仮定した。そうすると考慮しているリフトならびにその下に存在するコンクリートの温度分布は図 - 2.3 (a) のような形であるため、材令 1~3 日の温度差は、材令 0~3 日の温度差とつたときと比べると、図 - 2.3 (b) のように上表面附近で温度上昇が小さく下面附近でやや大きいような結果が得られる。そのために (2.2)式における T と T_0 との差が大きくなるのみならず、 R の値が小さくなる。こうすると幾分実測値に近づく。上に述べた議論はそれぞれの段階において弾性体と仮定して議論を進めたわけであるが、材令が若いときにはクリープが大きいから、上述の R の値が正しいとしても、正確な応力計算をするにはクリープを考慮に入れなければならない。

実測値の信頼性には疑問のあること、測定位置のわずかな差によって応力が変わ

ることを考えると、測定値そのものが

が少し大き過ぎると思われる。

なぜなら、オI解(4.4)式、

すなわちここで示した(2.2)式

において $R=C$ としたときの計算値が実際に合うから正

しいと考えると、表面を力 h

8.8 kg/cm^2 という大きい値と

なり、さらに表面温度の変動

を考慮しなければならぬ割れが

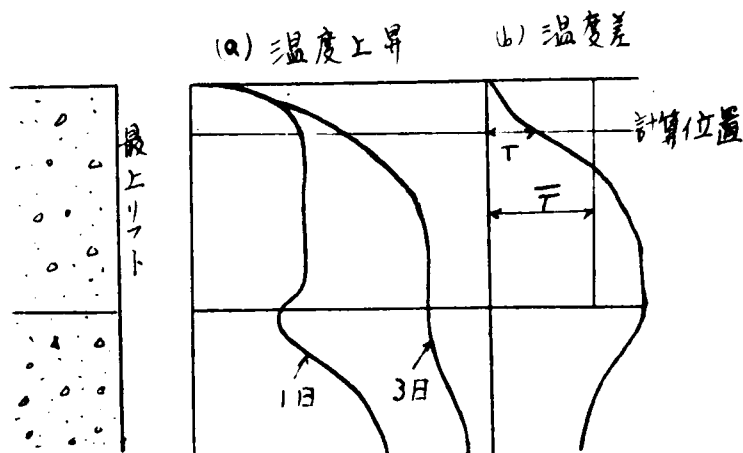
生ずるからである。 R の値と

正確に決定することは極めて困難であるので、この値が正しく求められなるときには、上記のような程で R の値を推定し、フリーアを考慮に入れて応力計算を行えば、かなり実際に近い応力が計算できるものと思われる。

(ii) 打設を中止するとき

規則で1に打設1を行つた後ある高さにおいて長期間打設を中断した場合を考へてみよう。このとき材料2〜3日以後の温度分布を考えると、表面から熱放散が継続ため、材料に応じて附図-Ⅱ・2.7の破線でお示したような温度分布となつてゐる(この曲線は正確に計算したものでない)。7.5mまで打設されたときにおいては $h/h_0=2$ であり、オI解において述べたように、この程まで高くなると基礎拘束の影響が及ばない。このような寸法のブロッツクについて、附図-Ⅱ・2.7の破線でお示したような温度変化をうけたときの応力状態を知つたため、附図-Ⅱ・5.3(a)あるいはⅡ・5.5に附図-Ⅱ・5.7を重ね合わせると附図-Ⅲ・2.8に示すような温度分布と応力状態が得られる。附図-Ⅲ・2.8はいずれも鉛直方向に二次曲線の温度分布を示すもので、(a)の場合には上下面において温度変化がなく内部における最大上昇は $1.5 T_0$ 、(b)の場合には上面で温度変化を生ぜず下面において T_0 だけ降下し、内部における最大上昇量は約 $1.0 T_0$ である。この場合の上面における水平引張応力は前者が $1.0 \times E T_0$ 、後者が $0.7 \times E T_0$ である。以上から、基礎岩盤の拘束がほとんどない程の高さのリフトにおいては、ブロッツク全体の温度変化の状態を考へるときには、上表面の温度が一定値を保っているときにおいても、内部が発熱によって温度が上昇したために(基礎岩盤附近において温度低下としても影響は小さい)、上表面

図-2.3



には引張応力が発生し、その値はかなり大きいことがわかる。この結論は、すでに述べたように、下部のコンクリートによる拘束が材料3日以後はほとんどないものと考慮してリフトの応力計算を実施してもよいという結果と一致するものである。

このようにして、コンクリート打設を中止すると上表面にひび割れの発生する危険性が増大する。その時期が向寒期であれば危険性がより大きい。なるべくひび割れを避けようとするのは温度上昇を抑制しなければならぬ。そのためには人工冷却を実施すればよいことはもちろんである。もし人工冷却を実施しないときには、打止めする以前の下部の教りフトは、高さを低くするとともにひび割れが発生し始める温度に於いて打設間隔を長くして、できるだけ蓄積した熱を放射させておく必要がある。下部のブローツによる拘束は基礎岩盤ほど大きくはないから、0.75 m リフトを採用するときには、1圓周以上放置してもよいのではないかと考えられる。ただし、この数字は一応の推測にすぎないこと、それだけの場合について詳細な検討を要する。

(4) 水平方向の温度変化の影響

また、温度変化と熱応力状態との関係は以上の通りであるが、つぎには水平方向の温度変化と熱応力状態との関係を考察してみよう。簡単のために、ダムが上下方向に自由に動き得るものと仮定すると、すでに R. W. Carlson⁵⁾ が示しているように、compensation line method によって鉛直直応力を計算することが出来る。最近では、この方法を楔形断面に適用してもよい近似の得られることが確かめられた。⁶⁾ しかしながら、ダムの高さと幅とは同程度の寸法であること、および底面において岩盤に拘束されているためにかなり応力状態が複雑になる。水平方向の温度変化が二次曲線および六次曲線等で示される場合については、附図-Ⅱ-5.8 およびⅡ-5.9 に示すように、鉛直直応力のみに水平直応力にもかなりの影響を及ぼすから詳細に考察する必要がある。

(i) 温度上昇をしているとき

附図-Ⅱ-5.8 およびⅡ-5.9 に附図-Ⅱ-5.3を重ね合わせて、内部の温度が上昇し表面は一定温度に保たれる例を示すと附図-Ⅲ-2.9の通りになる。附図-Ⅲ-2.9(a)は表面付近における温度勾配の大きい例である。このときは内部と表面との温度差によって、下部からの拘束をうけない鉛直側面の上端では、表面に大きい鉛直引張応力が現われるが、拘束部付近においては、内部の温度上昇によって生ずる圧縮応力が相殺されるために引張応力が現われない。附図-Ⅲ-2.9(a)によれば表面の温度勾配が緩やかであるために、表面に生ずる鉛直引張応力は小さい。ただし、温度変化による固定

の弯曲が拘束されるために、中央の鉛直断面は曲げ応力に似て水平直応力が現われている。このように水平方向の温度変化の状況によつては、フロッツの上表面中央部は無損で大きな引張応力を生ずることに注意しなければならない。

リフトを順次規則正しく打設しているときを考えると、リフト打設直後において下部のコンクリートによる拘束が大きいため打設したリフトの鉛直側面に生ずる引張応力は小さい。その後数日間の下部のコンクリートによる拘束が小さくなる期間を考えると、この期間では内部の温度上昇量はそれほど大きくなく、新しく打設したリフト内、奥において上りの自由表面に近い位置にあるから、この影響のみによる応力は小さい。しかし、型枠を外すと、そのために表面温度が急速に低下することを考慮しなければならない。このために、水平断面が弱まる打継目が表面にあり開口する危険がある。型枠を外したことに伴う応力は次節で述べる場合に類似しているので、ここでは省略する。注意を要するのは、しばらく打止めたコンクリート上に新しくリフトを打設する場合である。このとき若盤直上リフトと同様に温度低下が速やかに行なわれるときには、第Ⅱ編第5章および第6章において説明したように、水平打継目の表面における鉛直引張応力が大きくなり、打継目の開口する危険性が大きくなる。

(ii) 最終安定温度に達したとき

第Ⅱ編第4.4 (図-4.1 参照) において述べたように、最終安定温度に達したときにおける鉛直直応力は、表面において圧縮、内部において引張応力となる。図-4.1をさらに詳しく検討すると、考えているリフトの材令が若い間は、その上に置かれているコンクリート層が高くなるので、考えているリフト内の奥は端面より近距離にある。そのために温度変化に割には発生する鉛直応力が小さい。材令が若いときにはフリーズの大きさ以外にこのような因子も加わって、最高温度に達したときの応力 (第Ⅱ編, 図-4.1(c)) はかなり小さいものと考えよう。そうすると、法断面の場合とかパイプ冷却を実施する場合のように、速やかに最終安定温度に達したときには、内部の温度低下によりかなり大きい鉛直応力 (表面は圧縮、内部は引張) が生ずる。それから長時間経過後、あるいは徐々に冷却された場合にはクリープによつて幾分応力が減ずる。しかし、から打設を中止したリフトが、上表面を露出した状態で冷却されてしまうと、このリフトの奥にその奥の下部において、ほとんど鉛直直応力が生じないわけである。

基礎岩盤による拘束を考えると、前記の温度上昇期間における応力状態と全く逆になるのど鉛直応力は内部で引張、表面において圧縮となる。このように、最終安定温度に達したときの鉛直直応力の状態は、表面において圧縮応力を呈するという点で好ましいものである。

§ 2.3 水平断面内の熱応力状態

コンクリートと基礎岩盤 あるいは コンクリートとコンクリートとの間の拘束によつて、ブロックのブロックの鉛直断面を考えると複雑な熱応力を発生することは前節で述べた通りである。このときの水平直方向に与える拘束度合い、条件に応じて 0~1 の間で激しく変動することになるが、拘束度が零のときにはそれ以外に水平直方向が現われないと考えてはならない。なぜなら、リフトが上下から全く拘束されていなければ、水平断面内の温度変動によつて熱応力を発生するからである。すなわち、水平方向の内部拘束によつて熱応力が現われるのである。本節においては、全く拘束されていないリフトが水平断面内の温度変動によつて生ずる水平断面内の応力状態を考察することにする。本節の結果と前節の結果を重ね合わせると、鉛直ならびに水平方向の拘束をうけるブロック中の熱応力状態が知られるわけである。

(1) 熱応力状態の一般的傾向

打設したリフトは水和熱によつて温度が上がるが、上表面は露出してリフトの外に、外界の温度に近い。これに対してリフト内部の水平面を考えると、内部は水和熱の発生による温度が上昇するが、側表面は外界の温度に近い（型枠のないときにはほとんど気温に等しい。主要型枠がなければ、図解 § 3.7 に示すようにある程度気温に近い）。このように高さによつて水平断面内の温度分布が異なるので、簡単のためにリフト中の鉛直方向の平均温度によつて考えることにする。

全く自由な物体で仮定する限り、熱応力の経過は幾分単純である。リフト打設後、側面より温度が高くなるため、内部は圧縮、表面はかなり大きい引張応力が生ずる。その上、順次リフトを打設し続けると、コンクリートのクリープが大きくなり、このような温度分布が長期間継続するため、後日に内部が冷却されて最終安定温度に達したときに現われる応力と比較すると、後者の応力の方が前者の応力よりも大きい。したがって最終安定温度の状態においては内部では引張、表面では圧縮の水平応力が生ずることになる（図解、図-4.1 参照）。コンクリート打設を中止したときの最上リフトの状態を考えてみると、鉛直方向の平均温度の最大上昇量は比較的小さく、冷却される速度も速い。したがっていずれの段階においても、連続して上部にコンクリートが打設するときよりも応力が小さい。

水平断面内の温度、したがって応力に大きい影響を及ぼす因子は、コンクリートの断熱

温度上昇量と温度は等しい、熱伝導性の悪い型わくの有無である。人工冷却の効果は極めて大きい。この点については後述する。木型型わくを用いた方が、いかに発生する引張応力が大きくなることはすでに中井編 3.7 において述べたが、ここではコンクリートのクリープを考慮すると、型わくの有無によってどのような応力の経過になるかを考察を加える。

(2) 型わくを用いないときの熱応力の経過

(i) 仮定

熱応力を計算しようとするとき非常に多くの仮定を設けなければならぬ。このときに条件を単純化するので、求められた熱応力が真の値とある程度差が生ずるが、同一の仮定の上になつて、工法に対応する条件のみを変更したことによつて得られる結果を比較すれば、工法による応力差を知つて、その優劣を比較することは可能である。本節では、中井編 3.7 と同様につぎのような仮定をおく。

(a) 打設温度と気温は等しく、気温は変動しない。

(b) 幅 1.5 m で長さは無限に長い。したがつて熱応力は compensation line method によつて求められる。

(c) リフトの鉛直方向平均温度上昇は $T = T_m(1 - e^{-mt})$ によつて与えられる。

(d) $m = 0.012/h$, $a = 0.004 \text{ m}^2/h$ とする。

その他にコンクリートの弾性係数ならびにクリープを仮定する必要がある。これらの性質は、

(e) 弾性係数 E およびクリープ Q は Grand Coulee dam のコンクリートに等しいと仮定する。これらの値は 附図-Ⅱ-2.10 に示す通りである。⁷⁾ 単位荷重によるクリープ Q は、

$$Q(k, t-k) = F(k) \ln(1+t-k) \quad (2.3)$$

によつて表わされると仮定し、図には $F(k)$ の値を示したものである。ここに、 t は材令、 k は載荷時の材令である。

(f) 熱応力は材令 $t = 0.002$ (上記数値を代入すると $t = 1.17$ 日) より発生し始めるものと仮定する。すなわち述べたように、この材令までに下からの拘束によつて応力が生ずるとしても、下から上への拘束が大きいために引張応力が生ずることはないと考えよう。

(ii) 応力の計算

断面内の温度経歴はすでに中井編 3.7 (附図-Ⅱ-3.9 および Ⅱ-3.10 参照) に与えられてゐるから、この温度分布を用いて応力を計算する。この方法はつぎの通りである。

応力は compensation line method によつて計算できると仮定し、弾

性体と考へれば応力は $-\alpha E(T-\bar{T})$ によって計算できる。グリープが生ずることと考へると、応力に関係する $-\alpha(T-\bar{T})$ の値が材料 K から t までの間一定に保たれているとすると、材料 t における応力は、

$$\sigma = -\alpha E_s(T-\bar{T}) \quad (2.4)$$

によって求められる。ここに、 E_s は対流弾性係数であつて、

$$1/E_s = 1/E(K) + Q(K, t-K) \quad (2.5)$$

が成り立つ。この関係より、ヤエ編 54.3 において用いた step-by-step computation のように数値計算を実施する。先には計算方式を示さなければならないから、ここでその要領を説明することにする。

step-by-step computation を行うために、時刻 $\tau = at/l^2$ の場合とし、0.002, 0.004, 0.006, 0.008, 0.012, 0.018, 0.025, 0.035, 0.045, 0.055, 0.085, 0.115, ... とする。まず材料 $\tau = 0.002$ を基準とすると温度変化は附図-III-2.11 のようになる(附図-II-3.9(b)より得られる)。そうすると、各区間の始めに単位応力が作用したときの区間中央における E_s ならびに σ の値は表-2.1 に示すようになる。区間の中央における熱歪 $\epsilon = (\sigma/E)$ から既述の σ による σ を差引いて歪変化量を求め、これに E_s を掛けるとその区間における σ 変化が求められる。この σ 変化によつて以後の材料に現われる σ の大きさを求めるには、表-2.1 と σ 変化量とを掛けねばよい。表面 σ の経過の計算例は表-2.2 に示す通りになる。

附図-III-2.12 および III-2.13 には断面内の σ 分布ならびに代表点の σ 経過を示したものである。附図-III-2.13 には仮定1に数値を用いたときの材料 σ の値を示し、附図-II-3.9(b)を用いて、グリープを生じないと仮定して σ の値とその材料における E と掛けたもの、すなわち $\sigma = -\alpha E(t)(T-\bar{T})$ によつて求めた σ も示した。

III) 応力状態

ヤエ編 54.3 においては $\tau = 0$ から σ が生ずるものとしたが、ここで示したものと少し基準のとり方が異なるが、附図-II-3.9(a)と III-2.12 とを比較すると、グリープを考えた場合には表面 σ は小さくなるが、表面から少し内部においては表面とほとんど同じ位の大きさの引張 σ を生ずることがわかる。附図-III-2.13 によればその数値を比較することになる。

附図-III-2.13 によれば表面 σ が最大となる時刻は弾性仮定1とそれに類似して $\tau = 0.0015 \sim 0.0020$ の間であり、それ以後は比較的速やかに減じ、 $\tau = 0.10$ においてはほとんど消滅する。それ以後においては内部の冷却が進行につれて応力 σ

表-2.1 コンクリートの単位荷重による歪 (Grand Coulee ダム) ($10^{-6} \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^2$)

載荷時 材令(τ)	$1/E$ ($10^{-6} \text{ kg cm}^{-1}$)	E_s (10^6 kg cm^{-3})	材 令 (τ)											
			0.003	0.005	0.007	0.010	0.015	0.0215	0.030	0.040	0.050	0.070	0.100	
0.002	8.76	0.105	9.50	10.37	10.93	11.52	11.82	12.17	12.75	13.76	14.10	14.64	15.21	
0.004	8.05	0.114		8.73	9.54	10.26	10.99	11.60	12.14	12.59	12.94	13.45	13.99	
0.006	7.50	0.123			8.14	9.16	10.02	10.76	11.22	11.67	12.01	12.51	13.02	
0.008	7.05	0.124				8.05	9.15	9.87	10.44	10.90	11.23	11.72	12.22	
0.012	6.20	0.135					7.38	8.40	9.06	9.54	9.88	10.39	10.83	
0.018	5.25	0.156						6.40	7.40	7.97	8.33	8.82	9.27	
0.025	4.68	0.169							5.92	6.75	7.17	7.68	8.13	
0.035	4.29	0.186								5.36	6.07	6.68	7.15	
0.045	4.08	0.199									5.02	5.96	6.47	
0.055	3.96	0.185										5.40	6.04	
0.085	3.75	0.204											4.90	

表-2.2 表面応力の計算例 (型枠に用ゐるとき)

歪 (10 ⁻⁴ ΔT _m)																
材令 (°)																
区間中央 材令 (°)	区間中央 熱歪 (10 ⁻⁴ ΔT _m)	断面積 (cm ²)	歪変化 (mm)	応力変化 (10 ⁵ ΔT _m kg/cm ²)	応力 (mm)	0.003	0.005	0.007	0.010	0.015	0.0215	0.030	0.040	0.050	0.070	0.100
0.003	1.04	0	1.04	0.109	0.109	1.04	1.13	1.19	1.26	1.29	1.33	1.39	1.50	1.54	1.60	1.66
0.005	2.61	1.13	1.48	0.169	0.278		1.48	1.61	1.73	1.85	1.96	2.05	2.12	2.18	2.27	2.36
0.007	3.71	2.80	0.91	0.112	0.390			0.91	1.03	1.12	1.20	1.26	1.31	1.34	1.40	1.46
0.010	4.63	4.02	0.61	0.076	0.466				0.61	0.70	0.75	0.79	0.83	0.85	0.89	0.93
0.015	5.44	4.96	0.48	0.065	0.531					0.48	0.55	0.59	0.62	0.64	0.68	0.70
0.0215	5.58	5.79	-0.21	-0.033	0.498						-0.21	-0.24	-0.26	-0.27	-0.29	-0.31
0.030	5.42	5.84	-0.42	-0.071	0.427							-0.42	-0.48	-0.51	-0.55	-0.58
0.040	5.15	5.64	-0.49	-0.091	0.336								-0.49	-0.55	-0.61	-0.65
0.050	4.92	5.22	-0.30	-0.060	0.276									-0.30	-0.36	-0.39
0.070	4.37	5.03	-0.066	-0.122	0.164										-0.66	-0.74
0.100	3.75	4.44	-0.069	-0.141	0.023											-0.69

加えられる。しかし、表面から内部の長は長期間にわたって徐々に引張応力が増大する。材料は少し厚くなるけれども、表面からやや内部に入った箇所においても表面と同程度の引張応力が現われるから、もし表面の極く浅い部分にひび割れが入ると、これが内部に向かって進行する可能性が考えられる。ブランクの中心においては温度上昇とともに圧縮応力が徐々に増大し、 $\tau = 0.10$ 以後においては圧縮応力が減じ始める傾向を知ることが出来る。こうして最終安定温度に達すれば、すなわち第II編図-4.1で示したように、水平直応力が内部では引張、表面では圧縮となるものである。

(3) 型わくを用いるときの熱応力の経過

(i) 仮定

すべて先と同様の仮定に従う。型わくの影響についても、第II編図3.7で述べたように、コンクリート表面における熱伝達率 $\alpha = 2.67 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$ を用いることにする。

(ii) 応力計算

応力計算も全く同じ方式に従う。すなわち $\tau = 0.002$ を基準とする温度変化を、第II編図-2.14の通りである(第II編図-3.10より導かれる)。この温度変化は、step-by-step computation により応力を求めると第II編図-2.15および2.16の結果が得られる。常に型わくがあるときには、このような応力であり、型わくを外した直後は表面が外気温まで急冷されると考えると、そのときの表面温度が外気温よりも 75°F 高いとすれば、

$$\Delta T = \alpha E T_s$$

なる応力が生ずる。この応力は単時間の間に生ずるものであるから、弾性的に応力計算をしよう。そうすると、型わくを外したときに発生する表面応力は、第II編図-2.16の値で示したような大きい値となる。ただし、急冷されるとときには、表面のうける拘束は一軸方向ではなく二軸方向からうけることになるから、 $\nu < 1$ は

$$\sigma = \alpha E T_s / (1 - \nu)$$

とすべきである。この式を用いると Poisson 比が関係するから使用しなかつた。この式を用いた方が応力が大きくなることに注意する必要がある。

(iii) 応力状態

常に型わくを表面に置いておくと、型わくを使用しないときと類似した応力の経過を示すが、発生応力は前者の方が小さく、表面応力が最大値を示す時刻が遅れて $\tau = 0.02 \sim 0.03$ の間となる。しかしながら、型わくを外すと表面が急冷されるためには大きい応力

と生ずる。

(4) 型わくの熱応力に及ぼす影響

木製型わくが存置されている間は、水平直応力の大きさが型わくのないうちの場合より小さく、そのために表面が乾燥されなから、非常に好ましいものである。しかしながら型わくを外したときに表面が急冷され、乾燥も始まるから大きい引張応力を生ずることになる。PI図-Ⅱ・2・13とⅣ・2・16より種々の材料において型わくを外したときと型わくの無いとき（鋼製型わくを用いるとき）との表面応力を比較すると表-2・3 のような結果が得られる。ただし、 $\alpha = 1 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $T_m = 20^\circ\text{C}$ と計算したものである。

表-2・3 型わくを外したときと型わくを用いないときの応力比較 (kg/cm^2)

τ	0.003	0.005	0.007	0.010	0.015	0.0215	0.030
t (day)	1.76	2.93	4.10	5.86	8.78	12.59	17.57
型わくなし	2.2	5.6	7.8	9.3	10.6	10.0	8.5
型わく使用	2.5	7.0	9.3	12.3	15.1	16.2	15.2
比	1.14	1.25	1.19	1.32	1.42	1.62	1.79

1) 型わくを使用した場合の応力と使用しない場合の応力の比

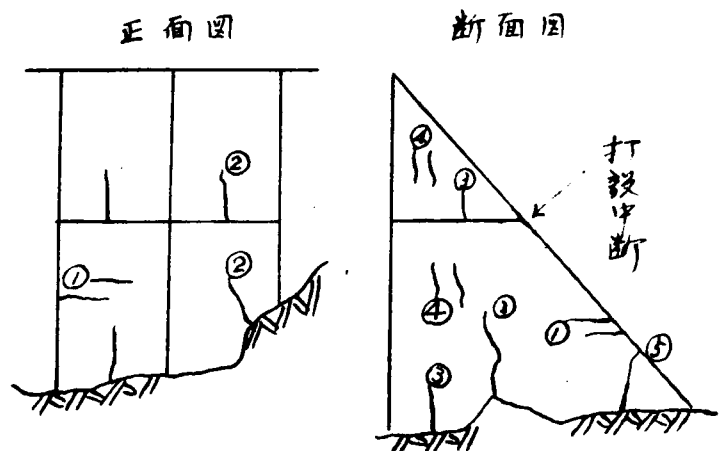
木製型わくを用いるとそれを外すときに大きい表面引張応力の生ずることがわかる。型わくを用いない（または鋼製型わくを使用する）ときとの応力比は材料が経過1ヶ月も小さくならない。通例は3〜5日間型わくが存置され、取外し加速するといひ割れが生じ易いとされている。いつ型わくを外すのが最も安全かということでは、コンクリートの引張強度と表面乾燥の影響を考慮しないと決定することができない。材料が若いときには表面の乾燥量が大きくなる。この例によると2週間以上型わくを存置すればよいことは間違いないが、それより早く外そうとすると、コンクリートの性質ならぬに温度状態を十分よく調査しなければならぬ。コンクリートの強度増進ならぬに表面乾燥の影響と合わせて考えると、型わくを1週間以上存置すれば割れ防止にかなり効果があるのではないかと考えられる。引張強度が表-1・12に示した河本氏のコンクリート強度であれば、ひび割れの発生する危険性は濃縮である。なお、表面で応力勾配の大きいときには、コンクリートが単純引張強度よりも大きい引張応力に耐えられるものである。リフトの平均温度の実際の経過は、その1例と第4章で示すように、ここで仮定したものと幾分異なることに注意が必要がある。

本型枠にて使用した材料の若い時期にこれを外そうとすると、表面にはコンクリートの引張応力と収縮応力とを生ずる可能性があるから、それぞれの場合にたいして十分よく検討しなければならない。このときに前述以外に注意すべき点はその通りである。すなわち、養生温度が低いとコンクリートの強度が小さいこと、外界の温度が変動する（第II編第3章参照）ということである。熱応力は発熱量に比例するわけであるが、発熱速度（ここでは m によって定まる）の及ぼす影響については、第II編第3.7節において弾性体について例示したように、ほとんど差がないものと考えよう。また型枠を外した後における応力の経過を研究し、もしもひび割れが発生したときにそれが内部まで侵入することはないか検討を要する。上下流面では富配合のコンクリートが用いられるので、本章に用いた条件が成立する。一般に上下流面では側表面よりもひび割れが発生し難いので応力状態の考察は省略する。側表面にkeyのあるときには、その凹んだ隅角からひび割れが発生しやすい。

§2.4 各種打設工法の検討

前章述べたように、水収縮の発生と冷却の過程においてかなり大きい引張応力が発生し、そのためにダムにひび割れが発生する危険性が多い。従来のコンクリートダムにおいては、いはいおこしたひび割れは図-2.4に示す通りである。水平ひび割れ①は打設直後の開口であり、初期における内外の温度差が主因である。この時期に上下のコンクリートによる拘束が大きいため引張応力が減じ、岩盤直上のリフトでは内部の温度上昇が小さいから、下部のリフトではこのひび割れが現われ難い。このひび割れは、上流面では漏水と揚圧力の増大をもたらし、下流面では耐久性を低下せしめるが、一般に表面部分のみに止まっています。ダム全体の安全性に直接的な影響を及ぼさない。これに

図-2.4



及に②および③の鉛直ひび割れは、その発生が初期の温度上昇時であることが多い。

が、 ϕ の冷却が速むに力して進行するものである。とくに③のような埋軸方向の ϕ の割れが起り易く、重カ ϕ ではこの ϕ の割れによって貯水圧の伝達状況が変更され、危険な応力状態となる。 ϕ の割れの進行には岩盤および下のコンクリートの拘束が主要原因となっているものである。ブロックの上部においてかなり打設間隔が速かになり、温度上昇量も大きくなることから、④のような鉛直 ϕ の割れを生ずる。この ϕ の割れも冷却はつれて内部に侵入することはないが、②および③と比較するとその可能性は小さい。⑤の ϕ の割れは急速な冷却と岩盤拘束によって生ずるものである。下流表面は鉛直面よりかなり傾斜しているが、中五編第8章において示したように、 ϕ が冷却されると、下流面、下部では引張応力の大きい部分が ϕ の長さにあたるため、この ϕ の割れの発生を助長する。

現実に現われる ϕ の割れは大部分は以上の通りであり、 ϕ の割れを避けることおよび工期を促進することを目的として各種の工法が採用されているので、以下には、それらの方法による ϕ の割れ防止効果について、概略の検討を加える。

(1) ブロックの分割

現行ではブロックの埋軸方向の長さは15mを標準としている。 ϕ の型では、 ϕ の型式によって非常に異なり、重カ ϕ ではその寸法は高さの0.8倍程度である。高重カ ϕ では非常に厚さが増えるため、埋軸に平行な縦継目を作り、いわゆるブロック方式として施工されることである。一般にはブロック寸法は埋軸方向に比べて、それに垂直方向の寸法が大きくなることも影響して、すでに述べたように図-2.4の③の ϕ の割れが生じ易い。ブロック方式では、縦継目においてできるだけ密着するように、keyを設け冷却後に十分にグROUTを実施する必要がある。

後述するように人工冷却を行なうならば、ブロックの形と ϕ の割れの状況を考慮するとき、ブロックの寸法は埋軸に垂直な方向に比べて平行な方向が小さいのであるから、埋軸方向には15mに限らずさらに大きいブロックを用いてもよい。たとえば、中五編第5章、第6章および第9章において示したように、リフトの寸法によって拘束力（すなわち基礎面に与える水平直応力）の大きさはほとんど変化せず、リフトの幅と高さの比が10を越えると上面に生ずる応力の大きさに著しい差がない。一方、水平面内の温度変動による応力を考えると、中五編第2章～第4章において述べたことよりあかる通り、表面に大きい引張応力を発生せしめるような温度条件に対しては、正方形に近いブロックでは縦横の寸法比が変わってもほとんど表面応力に影響しない。ただし、つぎの2点については注意が必要である。その第一は、一般に温度変化するときを考えると、高さの等しいとき

に幅が大きくなると、それに比例して大きい水平応力の生ずる領域が増すということである。

A. V. Billov⁸⁾ は、基礎に拘束される長いリフトがある距離にありてはひび割れを生ずると

を、収縮継目ではかなり長い間隔に設けてもひび割れの生じないことを指摘した。

また、R. E. Copeland⁹⁾ は、かなり高いブロックにおいては、収縮継目を設けて中央断面の平均応力が著しく減ずることを示している。その外は、基礎岩盤の不整の影響

を受け易いということである。岩盤の凸凹の大きい部分を避けてしまう機会には寸法が大き

いほど多くなる。それ以外に断層面という弱点に注意すると、その真がひび割れの起る

ところとあり、不同沈下が生ずる可能性も大きい。H. Preß¹⁰⁾ が述べているように、

軟かい岩盤では継目間隔を大きく目にしてもよいという考え方は、均質な場合とのみ

適用されるべきであって、岩盤に弱点があれば適宜その真で継目を設けることを

考慮する必要がある。

1 リフトのコンクリート量を主として人工冷却

却法とも関連するが、岩盤が均質なときには

は横継目の間隔を大きくすることについて、そ

れぞれのダムに依りて考察を進めるべきであ

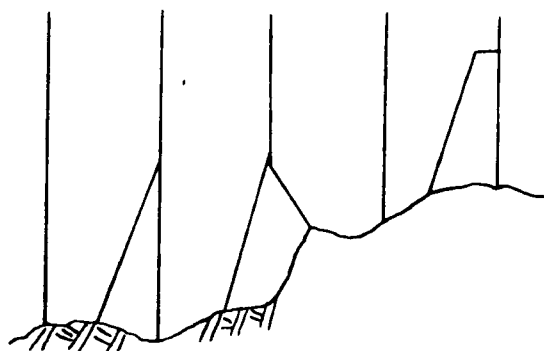
る。岩盤が不整な場合には、図-2.5の

ようにダム底部において斜めの継目¹¹⁾を設け

て、継目間隔を調整する方法についても

考察するべきであろう。

図-2.5



中空式重力ダムのハットは矩形でなくハ

角形またはそれに近い形である。このときとは第II編第4章において示した通り、側面と

発生する引張応力は矩形の場合より小さくなる。リフトが下の岩盤またはコンクリートが

らうける拘束についても、同じ幅と長さの矩形ブロックよりも大きくない。したがって、ハ

ットの寸法は矩形ブロックよりも無条件に大きくしてもよいかということ必ずしもそうではな

い。たが、ハットの上流面近くや、ときには幾分内部において、水圧によって水平引張

応力の現われることが多い^{12)~15)}ので、もしひび割れを生ずるとそれが発達する可能

性が多い。そのうえ、水の浸透経路が短いので、ひび割れにより漏水の危険性

が多いからである。このような次第であるから、重力ダムやアーチダムにおける矩形あ

いはほとんど矩形に近いブロックと同じように取り扱わなければならない。

(2) 打設速度

最も一般的に採用されている打設速度は、リフト高さ1.5 mで打設間隔4~5日、すなわち打設速度は0.3~0.4 m/dayである。岩盤付近においては0.75 m リフトが2~4日間隔で打設されるため速度はやや遅い。その目的とするところは、自然熱放散によって最高温度上昇を抑制し、(15)式で示したところからわかるように、最終安定温度に達したときの引張応力の軽減と、温度上昇時における表面引張応力の低下にある。人工冷却を実施すれば、温度上昇を小さくすることができ、幾分高いリフトを採用し、打設速度を速めることも可能である。わが国では、奥只見ダム(電力ダム)、上樺葉ダム(アーサダム)などにおいて高さ2 mのリフトが打設された。

リフトの能力が許せば同一の打設速度とする場合でも、リフトの高さを大きくして打設間隔を長くする方が経済的である。このようにすると、単に熱放散が速くなるのみならず、リフト内外の温度差が大きくなるため上面および側面においてひび割れが発生し易くなる。経験的にはあるが、最初に述べた程度の工法によって、特殊な事情のない限りは満足すべき結果が得られている。これまでに述べたところから考へて、基礎附近や打設中断のために大きい拘束を受ける箇所を除くと、リフト上面の養生ならびに側面における条件の改善(型わくの長期間存置、鋼製型わくの使用、散水養生など)によって、打設速度を増すためにリフトを高くすることが可能であると考えられる。

注目すべきことはカナダにおいては古くから高いリフトによってコンクリート打設が行われてきたことである。カナダでは1年の1/2は気温が0℃以下になるため地盤が凍るので、低いリフトを用い、型わくを早期に取り外すと表面の養生が面倒となる。このような特殊事情もあるが、温度ならびに応力状態について研究を行ない、経験も積み重ね、13~17 m(ときにはそれ以上)の高さのリフトを用いて満足すべき結果を得ている⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾。高リフトの使用は必ずしも好ましいものではないが、この例によると、低いリフトを使用すると材令の若いコンクリート表面を露出させなければならず、高リフトを用いると最高温度が大きくなるという欠点があり、赤土の欠陥をなくしたわけである。

さらに、打設速度(リフト高さと打設間隔)、コンクリートの発熱特性ならびに熱応力の関係については、チェコスロバキヤにおいて、Oulka ダム(電力ダム、高さ90 m)の建設に際して詳しい研究が行われた。⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾ この研究ではセメントの水和熱と打設方法は表-2.4のように選ばれた。これらの条件によって施工したときの温度状態を調べ、コンクリートのリラクゼーションを考慮に入れて熱応力が解析された。その結果

果得られた主要なものはつぎの通りである。

(a) 同一のコンクリートを用いたとき、リフト高さを変えて打設速度を一定としたときには、最高温度上昇量に大きな差はないが、リフトが高いほど熱応力の最大値はかなり大きくなる。ただし、引張応力は比較的差が少ない(表-2.5参照)。

(b) セメントの水和熱を小さくすると熱応力の減少に効果がある。水和熱 84 cal/g においてリフト高さ 2m 、間隔 5 日の工法が可能であれば、 65 cal/g のセメントを用いリフト高さ 4m として同一の打設速度を保つことができる。

(c) 温度状態に大差がないときにおいても、相隣りリフトの材令の差や水和熱の発生程度によって熱応力はかなり相違する。したがって、最高到達温度や温度降下のみによって熱応力を評価することはできない。

(d) 上下流表面で単位セメント量を増やすと、この位置における熱応力状態は他の場所と本質的な差を生ずる。

(e) 継ぎ目と設けても熱応力に大きな差が生じない。

この研究の結果はだいたい11において、これまでに著者が述べてきたことと一致する。ただし、連続的に打設を続けたときには、上下流表面の最大水平引張応力が材令 $30 \sim 40$ 日において現われているより 2.2 および 2.3 で述べたこととかなり異なっている。これはにしても、熱応力状態が非常に複雑であるから、単に温度状況のみを考察するに止めず、それぞれの場合にたいして、拘束条件ならぬコンクリートの性質をも加味して、十分詳細にこれを研究しなければならない。この場合にはいままで述べてきた一般的な事項が十分に役立っている。

表-2.4 打設法の分類

打設法	リフト高 m	打設間隔 day	水和熱 cal/g
a	2	5	84
b	3	7.5	84
c	4	10	84
d	4	10	65

表-2.5 打設法と温度下り合いにたがいの関係¹⁾

打設法	最高温度上昇 ¹⁾		平均最大応力 ²⁾	
	基礎リフト	高工の $\frac{1}{2}$	圧縮	引張
a	0.58	0.86	1.00	1.00
b	0.75	0.94	1.29	1.12
c	0.81	0.96	1.77	1.26
d	0.82	0.96	1.04	0.88

1) 断熱温度上昇に対する比

2) 打設法 a) に対する比

(3) 人工冷却

(1.5)式, (2.2)式あるいは表-2.5をみれば明らかのように, 水和熱による熱応力を小さくし, ひび割れを避けるようにするには, 最高到達温度または温度上昇量を抑制することに効果がある。コンクリート温度の上昇を減ずるために使用される人工冷却法としては, もっぱらプレ・クーリング法とパイプ・クーリング法が用いられている。

プレ・クーリング法は(1.5)式において t_p を下げるものである。 t_p が気温より低くなるから, コンクリート打設当初は大気から温められることになり, t_p の低下量より最高到達温度 t_p+t_r の低下量は小さくなる。多くの例によると t_p+t_r の低下量と t_p の低下量の比は0.5~0.6程度である。打設速度の速いほどこの比が大きくなることは容易に推測できることである。

パイプ・クーリング法は(1.5)式において t_r を低下させる方法である。通常直径1inの鋼管をリフトの下面に配し, これに冷水を通すから, t_r の低下量はパイプの周囲の冷却水の温度と通水量などによって変わるものである。この方法によれば, t_r を低下させた後の冷却(サード冷却)以外に, 収縮継目のグラウトを実施するため, 所定の期日までに最終安定温度(あるいはそれ以下)に下げることができ。

いずれの方法を採用すべきかは, 鋼管の型式と規模, 施工速度, 地質条件(気象, 冷水の有無など), 経済性などの要求から考えなければならぬ。プレ・クーリングによれば, 打設後直ぐは下のコンクリートは気温よりかなり温度が低いので, この間の熱応力状態はいままでに示したものとかなり異なるはずであるから, この応力状態がどの程度応力に影響するか研究が必要である。その例は附図-III-2.3に示した通りである。

(4) その他の工法

人工冷却法の1つとして, 最近 R.W. Carlson と D.P. Thayer²⁰⁾ は表面冷却法を提案した。コンクリート打設直後からブロックの側表面を冷却にかけると, 側面から60cm 程度内部までの部分は気温よりかなり低い温度で硬化する。20日間ほど冷却にかけると, この間の表面附近の引張応力は小さく, このときから外気に曝らすと表面温度が上昇して圧縮応力となる。この様子は附図-III-2.17 および III-2.18 によって明らかである。附図-III-2.18 に示した full relaxation temperature とは, 完全に拘束されていると考えたときに, 発生している応力を零にするために必要

な温度差(上昇と正とする)である。この方法によれば、水和熱の発生時にけるひび割れを防止することは可能かも知れないが、リフト内部の $t_p + t_r$ が低下しないから、ブロッック冷却時にけるひび割れの防止にはほとんど効果が無いのではなからうかと思われる。

ときどき用いられる方法に、ブロッック間には $1 \sim 2.5$ m 幅の冷却用の間隙を作っておき、側面からの熱放散をもはかつて速かに温度の低下をもたらすものである。すでに述べたことから明らかであるように、このような工法をとると側面からのひび割れを助長するから推奨すべき方法とはいえない。収縮継目を介して相隣るブロッックに高さ差が大きくなると、露出期間が長くなるのみならず、打継いだときに相接するコンクリートの性質ならぬに温度に差が大きくなるため望ましくない力を生ずる。そのため通常は相隣るリフトの高差は $6 \sim 12$ m に制限されているのである。

(5) 実測による検討

コンクリートダムのひび割れを防止するために、古くから各種の工法が考案されているが、完全にひび割れを生じなかつたダムはないようである。極く表面のみで止まっている微細なひび割れや塩析廊その他の開口部に発生して発達しないようなひび割れは、ときには問題とする必要はないが、近年でも、ときにはかなり重大な支障を及ぼすようなひび割れを生じたダムがある。わが国で報告されているものには、綾北ダム(アーチダム、河工組 54.4 参照)の他に大森リダム²¹⁾(中空式重力ダム)がある。これらの例を参照すると、通常採用されている工法によれば、熱応力によって重大なひび割れを発生する前に近い状態にあるものでないかと考えられる。したがって、コンクリートの品質、ダムの型式その他それぞれのダムに特有な条件がひび割れを助長するものであれば、不慮のひび割れを発生することになる。熱応力ならぬにひび割れの発生は各種の条件が非常に複雑に関係しているので、あるダムにおいて工法とか新しい材料なりが成功したといっても、それぞれの単独な事項がどのダムにおいても成功を収めるものでないことは十分注意する必要がある。

American Society of Civil Engineers においては、1959年にコンクリートダムの温度とひび割れの制御に関するシンポジウムが開かれ非常に多くの实例が報告された。North Fork ダム(アーチダム)では、夏期に打設した岩盤上 $0.2 H$ (H はブロッックの高さ)のリフトが $70^\circ F$ の温度降下によりひび割れを生じ、Voxon Rapid ダム(重力ダム)では $0.3 H$ の位置において $50^\circ F$ の温度降下によってひび割れを生じている²²⁾。TVA では $(1/50)$ 式によってひび割れ防止のための温度制御と

行なっている。そのために、基礎による拘束変と温度降下との積 $R(T_p + T_r - T_f)$ と有
効温度降下とを付け、この値を $20 \sim 30^\circ \text{F}$ とするように規制している。²³⁾ 1944年に
完成した Fontana ダム（重力ダム、高さ 141 m ）では、中層熱セメントを用いてこの方
針に従った打設工法を採用して成功を収めた。同じ TVA のダムでも それ以前に
造られた Hiwassee ダム（重力ダム、高さ 94 m 、参照 4.4 参照）では低熱セ
メントを用いてもかなりのひび割れを生じている。

U.S. Corps of Engineers では主として フォーリング法によって温度制御
を行ない、コンクリートに繊維細骨材を多くして連行空気量を増し、セメント量が過ぎる
だけ少なくなるようにしている。こうして 1950 年以後のダムでは単位セメント量は
 $125 \sim 140 \text{ kg/m}^3$ のものが多い。Detroit ダムのコンクリートならぬに打設法は
……^{24) \sim 26)} は多くの報告があるが、リフトの打上がりが規則的であり、隣りのブロッ
クより 40 ft 高くして冬期を過ぎたものについては表面を断熱して保護したため、ほと
んどひび割れを生じなかった。一方、Pine Flat ダムにおいては冬期に於いて側
面に微細なひび割れが少し認められ、1箇所からわずかな漏水が認められたのみ
であった。フォーリング法によってこのように満足すべき結果が得られている。

これに及して、U.S. Bureau of Reclamation においては、パイプフォーリング
方式を主として採用して良好な結果を得ている²⁸⁾。冷却を行なう場合は $T_p + T_r - T_f$ に
おいて 73 m 以上の長いブロックは作るべきではないとしている。また TVA と同様
に拘束変の増大する箇所ほど $T_p + T_r - T_f$ を小さくすべきだと考えている。パイプ
フォーリングを行なうと温度制御が実施し易いので、打設を長期間中断していたブ
ロックにリフトを新しく打ち足す場合には、新旧コンクリートの温度をなるべく近づ
けるために、むしろ旧コンクリートのパイプに温水を通すことにより加熱することが可
能である。注意すべきことは、一次冷却の速が大まきることによって引張応力の生
ずる可能性の起こることである。そこで、最大の低下速率は 1°F/day とし、2週間
以上は継続しないことにしている。

このように、拘束条件とコンクリートの性質とを考慮に入れて十分注意して温度制御を
行なえば、ダムの構造上重大な弱点となるようなひび割れは防止することが可能で
ある。

第 3 章 重力ダムの嵩上げに伴う熱応力

水の使用量の増大に応じて既設ダムを嵩上げする必要 (Grande Dixence ダム^{1)~3)} のように高いダムを段階的に建設することも含めて) が近年増してきたため、1958年に開催された第6回大ダム会議においては、大会課題 No. 20 として“既設ダムの嵩上げ”について、工期を何段階かに分けて新しいダムを嵩上げしながら建設する工法を含む”という問題が討議された。この問題について多数の論文が提出されたが、総括報告者が述べているように、新旧堤体の継目をいかにして密着せしめ、かつ異なるコンクリートの境界において応力の擾乱されることを防ぐかということが嵩上げ技術において重要な点である。嵩上げ工法としては、プレストレスを導入する方法、独立した新堤体を作っておいて適当な時期にこれと旧堤体と接合する方法、新堤体と直接旧堤体に密着させる方法など多くの方法が実施されている。ここでは最後に実施するに当たって、熱応力問題を検討した実例として、桜山ダムの嵩上げ問題を取り上げることにする。この方法は最も単純な工法であるが、新堤体の発熱、新旧堤体の性質の相違、コンクリートの付着力などの点に関して危険性が多いと考えられるので、慎重な研究を必要とするものである。

§3.1 研究対象とした桜山ダムの現状と嵩上げ計画

桜山ダムは富士製鉄株式会社大畑製鉄所の非常用工業用水の見水のために、昭和16年に着工されたが、昭和20年に第二次世界大戦による資材難のため、工事を中止したままになっていた。このダムは現在高さ約25mの重力ダムであり、これを最初の予定である高さ40mまで嵩上げを行うことになった。

(1) ダムの現状

桜山ダムの概要を示すと附図-Ⅲ-3.1のようであり、下流面は約1.1mの高さで7箇所に仕上がりがある。このダムは高炉セメントを用いた軟練りコンクリートで築かれ、シーストによって打設された。ダム地質はかなり温暖であり、現在、表面に風化の跡は見出されない。揚圧力係数は最大0.74、最小0.12、平均0.43でやや大きいので、ゲラウト下らばに排水孔の施工によって、揚圧力を軽減する計画である。

埋物をボーリングし、そのコアの比重を測定したところ、設計比重 2.30 に対して、実際には 2.35 という値が得られた。埋物において縦波の伝播速度から動弾性係数が決定された結果は $2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ であつた。しかし、コアの超音波伝播速度より弾性係数を求めると $4.32 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ という値が得られている。

基礎は比較的堅硬な黒雲母花崗岩であるが、左岸側は相当風化が進んでいる。弾性波の伝播速度は $3400 \sim 4400 \text{ m/sec}$ で比較的良好であつた。その他の慎重な調査が行なわれ、このダムは 15m 程度の嵩上げを実施しても不安はないと結論された。

昭和28年1月～34年8月までの気温観測の結果、年平均気温は 15°C であり、年別の温度変動は次式で表わされることがわかつた。

$$T = 11.0 \sin \frac{2(n-106)\pi}{365} + 15.0 \quad (^\circ\text{C})$$

ここに、 T は日平均気温、 n は1月1日からの経過日数である。一応、貯水池の水温は表-3.1 に示す通りであり、表面の温度は気温よりかなり高い。

表-3.1 月別水温 ($^\circ\text{C}$)

種別	年月	昭34. 10	11	12	昭35. 1	2	3	4	5
水温(1)		22.7	17.1	11.9	7.8	7.8	12.0	16.0	21.3
水温(2)		22.3	16.9	11.7	7.7	6.8	10.1	13.0	16.0
水温(3)		13.6	15.3	11.6	7.6	6.7	8.6	9.6	10.6

(註) 水温(1) : 満水面 (EL. +42.00)
 水温(2) : 満水面より7m下方
 水温(3) : 満水面より12m下方

(2) 嵩上げ方針と設計断面

桜山貯水池は富士製鉄広畑製鉄所の工場用水の非常補給用という重大な役目を負っているから、工事上の要請によってその水位の人為的低下は許されない。したがって、嵩上げの基本計画は、上流側に湛水したまま下流側に新しく嵩上げコンクリートを打設して直接堅着する工法が採用されることになつた。この断面は垣谷氏が導いた嵩上げダムの断面決定公式⁵⁾を用いて設計された。この断面は附図-Ⅲ-3.1に示す通りである。

嵩上げ工の埋物に生ずる応力は表-3.2 および表-3.3 に示す通りである。ただし、

表-3.2 嵩上げ後の応力成分 (t/m²)

断面	上流端	等分点 No. 1	等分点 No. 2	等分点 No. 3	打 継 目		下流端
					旧堤体	新堤体	

鉛 直 直 応 力 σ_y

I	-9.6	-11.0	-12.4	-13.8	—	—	15.1
II	-10.3	-14.4	-18.5	-22.7	—	—	-26.8
III	-9.5	-17.4	-22.8	-28.9	-21.8	-20.2	-34.9
IV	-7.4	-20.1	-32.8	-35.1	-33.0	-27.6	-42.6
V	-6.1	-22.8	-39.5	-41.0	-45.0	-35.1	-49.8
VI	-5.5	-24.0	-41.9	-43.9	-50.9	-38.8	-53.2
VII	-13.7	-26.7	-39.7	-52.7	—	—	-65.7

水 平 直 応 力 σ_x

I	-9.3	-9.6	-10.0	-10.3	—	—	-10.7
II	-17.4	-17.5	-17.7	-18.3	—	—	-18.9
III	-23.4	-22.8	-21.6	-23.1	-22.4	-21.0	-24.6
IV	-30.8	-30.5	-30.2	-27.8	-30.2	-25.5	-30.1
V	-38.0	-38.3	-38.6	-32.1	-38.7	-30.1	-35.1
VI	-41.5	-42.1	-42.7	-34.2	-42.9	-32.4	-37.5
VII	-49.5	-48.5	-47.5	-46.5	—	—	-45.4

剪 断 応 力 τ_{xy}

I	0	3.2	6.4	9.5	—	—	12.7
II	0.7	6.2	11.6	17.1	—	—	22.5
III	1.4	9.1	15.1	22.2	13.5	12.0	29.3
IV	2.4	12.8	23.3	27.1	23.5	18.5	35.8
V	3.2	16.4	29.6	31.6	33.9	24.7	41.8
VI	3.6	18.0	32.4	33.7	39.0	27.7	44.7
VII	3.6	16.5	29.4	42.3	—	—	55.2

表-3.3 嵩上げ後の主応力および主剪断応力 (t/m^2)

断面	応力	上流端	等分点 No. 1	等分点 No. 2	等分点 No. 3	打継目		下流端
						旧堤体	新堤体	
I	σ_1	-9.8	-13.5	-17.6	-21.7	—	—	-25.8
	σ_2	-4.1	-7.1	-11.7	-24	—	—	0
	τ	0.4	3.2	6.5	9.7	—	—	12.9
II	σ_1	-17.5	-22.5	-30.0	-37.8	—	—	-45.7
	σ_2	-10.2	-9.7	-6.7	-3.4	—	—	0
	τ	3.6	6.4	11.6	17.2	—	—	22.9
III	σ_1	-23.6	-29.6	-37.3	-48.4	-35.6	-32.7	-59.6
	σ_2	-9.3	-10.6	-7.2	-3.6	-8.6	-8.6	0
	τ	7.1	9.5	15.1	22.4	13.5	12.0	29.8
IV	σ_1	-31.0	-39.6	-54.9	-58.7	-55.2	-45.1	-72.7
	σ_2	-7.1	-11.0	-8.1	-4.1	-8.1	-8.1	0
	τ	11.9	14.3	23.4	27.3	23.5	18.5	36.3
V	σ_1	-38.3	-48.7	-68.6	-68.5	-75.9	-57.5	-84.9
	σ_2	-5.8	-12.4	-9.5	-4.7	-7.8	-7.8	0
	τ	16.2	18.1	29.6	31.9	34.0	24.8	42.5
VI	σ_1	-41.9	-53.2	-74.7	-73.1	-86.1	-63.6	-90.7
	σ_2	-5.2	-12.9	-9.9	-5.0	-7.7	-7.7	0
	τ	18.4	20.2	32.4	34.0	39.2	27.9	45.3
VII	σ_1	-49.9	-57.4	-73.3	-92.0	—	—	-111.1
	σ_2	-13.4	-17.8	-13.9	-7.2	—	—	0
	τ	18.3	19.8	29.7	42.4	—	—	55.6

注) σ_1 および σ_2 は主応力, τ は主剪断応力

水平断面内の剪断力は直線分布と仮定している。座標軸は附図—Ⅲ・3・1に示すようにとり、引張応力を正と記す。

ここで考慮なければならぬことは、旧埋体のコンクリートは十分時間が経過して安定した弾性係数を持っているのに対し、新埋体のコンクリートは貯水水位上昇時において幾分小さい弾性係数を示す可能性のあることである。この新旧埋体のコンクリートの弾性係数の相違を無視して等価なものであると仮定した場合、およびこの相違を考慮した場合との間に、果してどの程度の差異が生じるかについて解析を行なうこと⁶⁾。

旧埋体コンクリートの弾性係数を E_1 、新埋体のそれを E_2 とすると、 $E_2/E_1 = 1/2$ の場合について鉛直応力の大きさを解析して比較した。その結果 $E_2/E_1 = 1/2$ の場合に、新旧埋体打継目の旧埋体側において最大1.58倍になるにすぎず、 E_2/E_1 が小さくなると、上流面の圧縮応力は減少する傾向があるが、引張応力の生ずるまでには至らなかった。このような事実は五洄ダムにおける弾性実験結果⁷⁾においても示されており、コンクリートの弾性係数の差異が生じる影響は小さいものである。新コンクリートの品質管理と施工を慎重に行なえば、弾性係数の差による不安はないと考へてよい。

§3.2 温度および熱応力計算のための仮定

新たに打設したコンクリートには水和熱の発生と冷却の過程において著しい熱応力が生ずることについては述べた通りであるが、嵩上げダムにおいては、新埋体と旧埋体との相互拘束により、一体となった完成埋体は最終安定温度に達したときにおいても、複雑な熱応力状態を呈していることになる。乾燥による収縮や自己成長などの原因による体積変化の影響を無視し、ここでは上記のような温度変化による熱応力のみに着目することにする。新コンクリートの温度変化によって生ずる顕著な表面引張応力は、ダムの熱応力を論ずる際には極めて重要なものであるが、これは特に嵩上げダムに附随した事柄ではなく、すでに述べたことでもあるので省略することにする。

本節では特につぎの2点のみについて検討を加える。その第一は、最終安定温度に達したときの熱応力状態である。これは、適当な打設速度を求め、人工冷却の要、不要を判断することを目的としている。第二は、新旧埋体の打継目附近における新埋体の熱応力状態である。旧埋体の下流面が附図—Ⅲ・3・1に示されているように、約1.1mの高さのステップで階段状に嵩上げられているので、この部分にお

いて危険を生ぜしめる恐れのない工法を見出すことが目的であったものである。

使用するコンクリートの性質の中には試験されてないものが多いが、これらの性質は文献を参照して仮定することにした。セメントは高炉セメント（スラグ 40%）を用いるものとする。コンクリート リフトの高さは旧堤体のステッブとの間隔上 1.1 m とし、打設間隔は 5 日、10 日、20 日の 3 種類の場合を採り上げ、温かおよび熱応力の状態を検討することにした。下流面に旧堤体と密着させて新堤体を継ぎ足す工法を採用するときの熱応力状態の研究としては、すでに五泊ダムにおけるものがある⁹⁾ので、当ダムと五泊ダムとにおける熱応力状態を比較し易いように、なるべく五泊ダムと類似した仮定を用いて熱応力解析を行なうことにした。

(1) コンクリートの性質

使用セメントはスラグ 40% を含む高炉セメントであり、セメント製造者における試験結果を参照して、コンクリートの断熱温か上昇 θ のつきのように定める。

$$\theta = \frac{C W_m}{C_p} (1 - e^{-mt})$$

ここに W_m : セメントの単位重量当りの水初熱, C : 単位セメント量, c : コンクリートの比熱, p : コンクリートの密度, m : $0.02525/h = 0.606/day$, t : 材令。

この曲線は材令 9 日までの測定値に適合するように定めたものであるから、材令 7 日と 20 日を通る曲線によって表わした場合と比べると、 m の値がかなり大きいが、上記の m をそのまま採用することにした。

使用する骨材はダム地帯近くの揖保川および千種川より採取する。この骨材は大部分が花崗岩である。そこで、既往の資料¹⁰⁾を参照して、コンクリートの性質としてつぎの値を仮定する。

$$C = 190 \text{ kg/m}^3, \quad c = 0.220 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C},$$

$$p = 2.30 \text{ t/m}^3, \quad \lambda (\text{熱伝導率}) = 2.125 \text{ kcal/m} \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C},$$

$$a (\text{温か伝導率}) = 0.0042 \text{ m}^2/\text{h}, \quad \alpha (\text{熱膨張係数}) = 1.0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$$

単位セメント量は 190 kg/m^3 とした。上記の値を用いると、コンクリートの断熱温か上昇は、つぎのように最大 30°C となる。

$$\theta = 30 (1 - e^{-0.606t}), \quad (\theta: ^\circ\text{C}, t: \text{day}) \quad (3.1)$$

コンクリートの弾性係数 E_d は、セメント量 $C' = 416, 314, 260 \text{ kg/m}^3$ の 3 種のコンクリートについて、 $\phi 15 \times 30 \text{ cm}$ の供試体を用いて測定された。試験結果を P は図—

Ⅲ・3・2 に示す。静弾性係数 E_s の値が求められているので、

$$E_s = 0.75 E_d$$

と仮定して、 E_s の値と同図に示した。 $C' = 260 \text{ kg/cm}^2$ のコンクリートは、 $C = 190 \text{ kg/cm}^2$ のコンクリートと同一のスラグ-エンズに相当する。

附図-Ⅲ・3・2 によれば、単位体積重量 190 kg/cm^3 のコンクリート（供試体では $C' = 260 \text{ kg/cm}^2$ ）に対しては、材料強度は $E_s = 2.28 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ の値が得られている。以下熱応力の解析に当たっては、新旧埋片ともに、弾性係数を $2.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ と仮定して、新旧埋片の弾性係数が異なるための影響は別章に考へることにする。コンクリートは完全弾性体であり、任意の時刻におけるコンクリートの応力は、その時刻における歪が等しくても、その歪の増えらした履歴により異なる。そこでコンクリートの応力を求めようとするとき、コンクリートに生ずる歪（または歪の履歴）を知る必要がある。そのためには、材料とともに変化するコンクリートの弾性係数をあらかじめグリープ（またはリラクセーション）を試験によって求めておく必要がある（第2章参照）。このようなことを考慮に入れた解析するのは非常に複雑であるから、ここでは、上記のように、 $E_s = 2.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ と仮定して、弾性体と考える計算にしている。Poisson比は 0.2 と仮定する。

(2) 施工条件

熱応力解析に關する事項として、施工上考慮するものはつぎの通りである。

- (a) リフト高さ
- (b) コンクリートの打設間隔
- (c) コンクリートの打設温度
- (d) 人工冷却法
- (e) 型わくの種類および存置期間
- (f) 旧埋片への熱伝導

この中で (d) の冷却法については、本研究の結果必要性が生じた場合には、その方法について慎重に検討しなければならない問題である。また、(e) については、本型わくが熱の伝導性差の要のために、かなりの影響を及ぼすことには述べた通りである。しかし、打設後のわずかな期間を考へずに、熱放散の機構をうまく仮定すれば、新埋片の表面に近い部分に多少の誤差を及ぼすだけで、近似的に熱放散量を計算できる。その仮定はつぎの通りである。

ありリフトよりの熱放散は、そのリフトの上に新しいコンクリートが打設される場合は、下部のコンクリートと多少の熱の授受を行なうがリフト上表面より大気中に放散される。上に新しいコンクリートが打設された後は、鉛直方向にはほぼ断熱状態に近く、新埋体の下流側より大気中に、また上流側より旧埋体に向つて熱の移動が行なわれると仮定する。型わくの存置期間が長ければ、この水平方向の熱移動に大きな影響を及ぼすが、型わくの存置期間はコンクリートの打設間隔と大差ないから、實際上大きな影響はない。

リフト高さを施工上いかにするかということ是非常に重大な問題である。一般の仕様によれば、 $1.5 \sim 0.75 \text{ m}$ であるが、すでに述べたように、旧埋体下流側のステップに合わせてリフト高さを 1.1 m とする。

リフト上表面の露出日数からコンクリートの温度上昇に及ぼす影響はかなり大きい。しかしながら、断熱温度上昇曲線と参照すると、早期に大部分の発熱が行なわれるから、露出日数をある程度以上増しても熱放散効果は少ないと思われる。リフト上表面とあり長く露出しておくと、第2章で述べたように、リフトの上面から下面に通る鉛直に割れが発達し易い。たとえば、アメリカの Friant ダムにおいては露出日数が $2 \sim 1$ か日頃よりリフトの表面を横切るような割れの発生が認められたことがある。打設間隔が長くなる場合には、新しいリフトは下のリフトによつてかなり大きい拘束を受けるから、あまり露出日数を長く与えることも疑問である。しかし、ここでは後述するように旧埋体と新埋体との間の拘束作用の関係を考慮しなければならぬから、打設間隔を $5, 10, 20$ 日と1た場合について比較検討することにした。

多数のダムの実績（たとえば第I編の4.3参照）を調べると、打設温度は気温にほぼ等しいといえる。1たかつて、温度および熱応力の解析には年間の平均を考へ、打設温度は年平均気温に等しい 15°C と仮定した。

(3) 最終安定温度

後にダムが最終安定温度に達したときの熱応力状態と解析する必要上、ダムの最終安定温度を求めることにする。このために使用した仮定はつぎの通りである。

- (a) 貯水池は常に満水されている。
- (b) 水面の年平均温度は年平均気温に等しい 15°C である。
- (c) 水深 60 m の所では水温は常に 4°C に安定している。
- (d) 水面と水深 60 m の間では年平均水温が直線的に変化している。

(e) 上流面の水に接している部分の温度は年平均気温に等しい。

(f) 下流表面の温度は、 α 1種の仮定では年平均気温より 4°C 高く 19°C 、 α 2種の仮定では年平均気温に等しく 15°C とする。

(g) ダムの上流面と下流面との間では直線的に温度が変化する。

下流表面は日光の直射をうけて表面温度が上昇する。直射日光の影響はダム地質の気象条件、地形、ならびに下流表面の方位によつて著しく異なるものである。第2編第4.4に述べた日射の影響を参照し、桜山ダムは北面に面していることを考慮に入れると、下流表面の年平均温度は気温よりも約 4°C 高いものと考えられる。これを α 1種の仮定と受け付けることにする。 α 2種としては、下流表面の温度が気温に等しいと仮定した。実際には α 1種の場合に近いと考えられるが、後述の熱たけ計算をするときには、 α 2種の仮定の方が危険なたけを生ずると思われること、玉泊ダムの例に一致させるために、この場合には α 2種の仮定を採用することにした。貯水池の表面水温も、実際にはこの仮定1つよりもやや高いものである(表-3.1参照)。

このような仮定のもとで、旧埋体および完成ダムの最終安定温度を求めると、 α 1種の場合については附図-Ⅲ.3.3のようになる。

5.3.3 温度状態

(1) 水和熱放射量

すでに述べたことから、新埋体のコンクリートの水和熱放射量を求めるには、つぎのような仮定をおく。

(a) 熱流は鉛直方向のみに起り、打設1mリフトの上表面からのみ熱が放射される。

(b) コンクリート打設温度若しくは表面温度は年平均気温 15°C に等しい。

このような仮定を用いると、すでに得られている結果¹⁾を用いて簡単にリフトの平均温度を求めることができる。以下には、まず打設間隔を種々変えた場合について、熱放射量とそれによるリフトの温度低下量を求めた結果を示す。

打設リフトの表面からの熱放射量を求めるのに図-3.1の3つの状態を考へ、あつたものの場合の熱放射量 q_i と、それによるリフトの平均温度降下 T_i を求め、これらを合成してリフトの平均温度降下 ΣT_i とする。これらの計算では年平均温度を基準とし、それよりの温度変化量について解析を行なう。

(i) 放散熱量 q_3 ならぬにそれによる温度降下量 T_3

q_3 は 0°C のコンクリートの上に 0°C で打設されたリフトが発熱していないとき、そのリフト上面より放散される熱量である。文献(8)に与えられた図表を利用するため、まず $D/\sqrt{4at}$ を求める。この値を用いて、打設後 t 日の熱放散量による最上リフトの平均温度降下 T_3 が計算できる。

図-3.1

(a)		(b)		(c)	
Q	0°C	空気	0°C	Q	0°C
	$\uparrow q_3$	新打設リフト	$\uparrow q_2$		$\uparrow q_1$
	0°C		T_0		θ
	T_0	旧リフト	0°C		0°C

(温度は年平均温度を基準とする)

(ii) 放散熱量 q_2 ならぬにそれによる温度降下量 T_2

q_2 は 0°C のコンクリートの上に 0°C で打設されたリフトが発熱していないとき、そのリフト上面より放散される熱量である。この場合は、 $T_0 = 0$ であるから、

$$q_2 = T_2 = 0$$

である。

(iii) 放散熱量 q_1 ならぬにそれによる温度降下量 T_1

q_1 はコンクリートの温度が T_0 のときに、その上に 0°C で打設されたリフトが発熱していないとき、そのリフトの上面より放散される熱量である。これを計算するためには、下のコンクリートの温度 T_0 を与える必要があるので、つぎのように仮定する。

$$T_0 = \text{断熱温度上昇} - T_3 - T_2$$

打設後ある日数を経過したときの放散熱量を計算するためには、まず先に求められた T_3 および T_2 を用いて下のコンクリートの温度を求め、つぎに文献(8)の Fig. 26 より $D/\sqrt{4at}$ の値に対する $I/\frac{D}{2a}$ の値を求め、これより q_1 およびそれによる温度降下量 T_1 を計算する。

(iv) 放散熱量による最上リフトの平均温度降下

T_1, T_2 および T_3 を加えると、最上リフトの上面からの放散熱量による最上リフトの平均温度降下 ΣT_i が求められる。その結果は表-3.4に示す。

この結果をみると、リフト打設後同一経過日数のときには、打設間隔の短い方が下のコンクリートの温度が高いため、放散熱量は幾分大きいことがわかる。コンク

リートは熱伝導性が良好でないから、下のコンクリートの保有する熱が新打設リフトの上面より放射される量は、打設後の数日間では非常に小さい。リフト高さが大きくなり、コンクリート自身の発熱割合が初期において大きいので、通常の1.5mリフトの場合に比べて、熱放射は極めて効果的に行われる。たとえば、打設間隔5日のおきにおいても、すでに全発熱量の1/2以上の熱が放射

表-3.4 上表面からの熱放射による最上リフトの平均温度低下量 ΣT_i (°C)

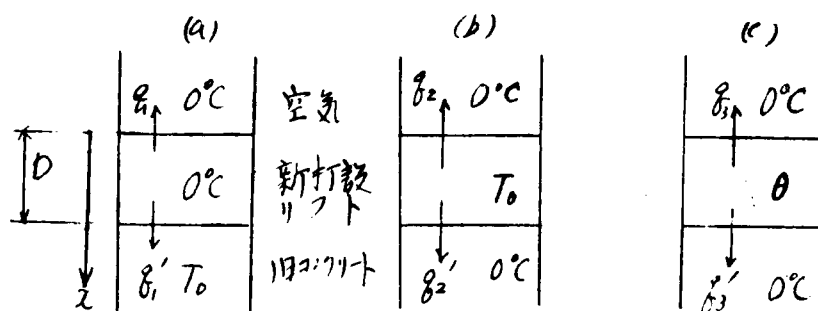
新コンクリート 枚数(day)	打 設 間 隔		
	5	10	20
1	3.32	3.32	3.31
3	11.23	10.98	10.83
5	17.02	16.32	15.91
7		20.06	19.43
10		23.52	22.53
14			25.14
20			28.01

され、打設間隔を10日とすると約80%が放射されてしまう。そのために、10日以上打設間隔を長くしても、熱放射に対する効果は少ない。

(2) 最上リフトの平均温度

水和熱の発生するコンクリートと順次打設12行つたときの温度分布を解析するのは、E. Schmidt⁽¹²⁾, A. D. Ross と T. W. Bray⁽¹³⁾, R. W. Carlson⁽¹⁴⁾ あるいは R. E. Glover⁽¹⁵⁾ などがすでに発表した方法によって解析することができる。最上リフトの平均温度は、これらの方法によって得られた温度分布の平均値として求めることができるけれども、ここではすでに熱放射量が求められているので、先に得られた結果と文献(8)を用いて、直接平均温度を計算することにした。

図-3.2



(温度は年平均気温を基準とする)

すでに図-3.2における g_1, g_2 および g_3 が求められているので、新しいリフトの平均温度を計算するためには、同図における新しいリフトから下のコンクリートに流出する熱量 g'_1, g'_2 および g'_3 が得られればよい。そのために、まず図-3.2の(a), (b) および (c) のおりの断面について、 $x=D$ なる面における温度勾配を求め、これから下のコンクリートに流出する熱量 g'_1, g'_2 および g'_3 を決定する。

(i) 下部のコンクリートへの熱放散量

表-3.5 I' の値

t (day)	I'
0.5	0
1	0.000 46
2	0.013 88
3	0.232 83
4	0.887 60
5	2.077 95
6	3.938 53
7	6.261 36
8	9.010 06
9	12.199 01
10	16.071 01
11	19.393 28
12	23.378 16
13	27.378 24
14	31.680 29
15	35.924 46
16	40.372 92
17	44.939 49
18	49.477 00
19	54.092 03
20	58.671 96

文献(8)を利用すると、 g'_1 は次のようになる。

$$g'_1 = -(\lambda T_0 / \sqrt{\pi}) (\sqrt{t/a} + I'), \quad (3.2)$$

$$I' = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4at}} \exp\left(-\frac{D^2}{at}\right) dt, \quad (3.3)$$

$$g'_2 = -(\lambda T_0 / \sqrt{\pi}) (2I - \sqrt{t/a} - I'), \quad (3.4)$$

$$I = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4at}} \exp\left(-\frac{D^2}{4at}\right) dt \quad (3.5)$$

断熱温度上昇割合は (3.1) 式より、

$$d\theta = m\theta_m(1 - e^{-mt}) \quad (3.6a)$$

$$\theta_m = 30^\circ\text{C}, \quad m = 0.606/\text{day} \quad (3.6b)$$

にまつて与えられるから、(3.4)式において T_0 の代りに $t - \tau$ を代入し、 $\tau = 0$ から t まで積分すると g'_3 が求められる。その結果は、

$$g'_3 = -\frac{\lambda \theta_m m}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ 2I(t-\tau) - \sqrt{\frac{t-\tau}{a}} - I'(t-\tau) \right\} e^{-m\tau} d\tau \quad (3.7)$$

以上の式における I の値はすでに文献(8)の Fig. 26 に示されているが、 I' の値は示されていないので、表-3.5 に記載しておく。

(3.7) 式を用いて g'_3 を求めるには τ を 1 日間隔に区切って被積分函数の値を求め、各区間中では被積分函数は一定値と見做すことを考え、梯形公式を用いて数値積分する。 g'_3 が求まると、この流出熱量による平均温度降下 $T'_3 = g'_3 / c_p D$ を計算することになる。

き。

一方、 q_2' を求めようとするとき、ここでは $T_0=0$ としているから、(3.4)式より

$$q_2' = T_2' = 0$$

である。なお、 $T_0 \neq 0$ のときには、 $\sqrt{\pi} q_2' / \lambda T_0$ の値は q_3' を求める計算の途中において得られることを附記しておく。

(3.2)式を用いて、打設後のある時刻(ここでは、1, 3, 5, 7, 10, 14, 20日と17)までの流出熱量 q_1' を求めるためには、まず下のコンクリートの温度 T_0 を知る必要がある。この温度は近似めと、

$$(打設温度) + (断熱温度上昇) - (打設リフト表面よりの熱放射による温度降下 $T_2 + T_3$) - (年平均気温)$$

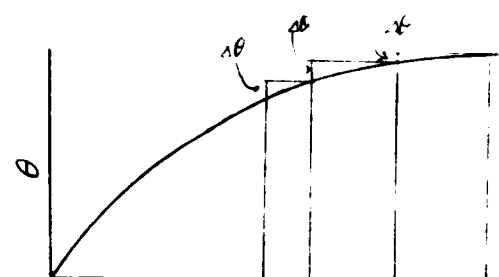
で表わせるものと仮定する。そうすると、新しくコンクリートを打設する直前における最上リフトの温度は表-3.6に示す値となる。この近似値 T_0 を用いて q_1' の計算を行なう。

表-3.6 旧コンクリートの温度(°C)

断熱温度上昇量	旧コンクリートの温度	$T_0 = \text{旧コンクリート温度} - 15.0$
28.55	28.55	13.55
29.93	24.65	9.65
30.00	21.75	6.75

まず、打設間隔5日の場合について、新リフト打設後1, 3, 5日の q_1' がその水による温度降下 T_1' を計算する。このときには、新リフト打設後において、なおかなりの断熱温度上昇があるから、その影響を計算に入れる。そのために近似めにコンクリートが10日以後には断熱温度上昇がなものと仮定する。それ10日による熱流量 q_1' と温度変化 $\Delta T_1'$ を計算する。つまり、 $T_0 = 13.55^\circ\text{C}$ (表-3.6参照)によって生ずる熱流量と温度降下を計算し、上に求め

図-3.3



旧コンクリート積令 5 6 8 10 day
新リフトの積令 0 1 3 5 day

表-3.7 下面よりの熱放射による最上リフトの平均温度降下量 $\Sigma T_i'$ (°C)

新コンクリート 打設日(day)	打 設 間 隔		
	5	10	20
1	-0.70	-0.01	0.41
3	1.17	2.36	3.18
5	1.41	3.09	4.16
7		2.80	4.09
10		1.75	3.34
14			2.01
20			-0.26

表-3.8 最上リフトのコンクリートの平均温度 T (°C)

打設 間隔 (day)	新コンクリート 打設日 (day)	θ	$T-15.0$	T
5	1	13.64	11.02	26.02
	3	25.13	12.73	27.73
	5	28.55	10.12	25.12
10	1	13.64	10.33	25.33
	3	25.13	11.79	26.79
	5	28.55	9.14	24.14
	7	29.57	6.71	21.71
	10	29.93	4.66	19.66
20	1	13.64	9.92	24.92
	3	25.13	11.12	26.12
	5	28.55	8.48	23.48
	7	29.57	6.05	21.05
	10	29.93	4.06	19.06
	14	29.99	2.84	17.84
	20	30.00	2.25	17.25

た補正値 $\Delta \theta'$ あるいは $\Delta T_i'$ を加えると θ' あるいは T_i' が得られる。打設10日以後には水相熱を発生しないものと仮定するから、打設間隔10日以上のものである場合は、 $\Delta \theta'$ と $\Delta T_i'$ の計算を行なう必要がない。

以上に得られたそれぞれの温度降下量 T_i' を加え合わせると、下のコンクリートへの熱放射による最上リフトの平均温度降下 $\Sigma T_i'$ が求められる。その結果は表-3.7の通りである。 T_i' あるいは T_i' を計算するとともに、 $\Sigma T_i' = 0$ と仮定したわけであるが、この表によると、打設間隔の長いときには誤差の大きいことがわかる。

(ii) 最上リフトの平均温度

コンクリート打設後の最上リフトの平均温度 T は次式によって計算することができる。

$$T = 15.0 + \theta - \Sigma T_i - \Sigma T_i' \text{ (°C)}$$

ここに、15.0°C は打設温度である。計算結果は表-3.8に示す通りである。

この表によれば、いずれの打設間隔によっても打設後3日以内に最上リフトは最高温度に達し、その温度は打設間隔5日と10日の場合

比較すると 0.94°C の差にすぎない。しかしながら、上面からの熱放射による温度低下 ΣT_i は、打設間隔 10 日位までは、打設間隔によって著しく変わるから、この程度まで打設間隔を長くすることは、埋内に残留する熱量を少くし、この熱が放射される時に生ずる熱応力を減少する目的には効果が大きい。このことはすでに先にも述べた通りである。いま、新リフトを打設するとき下のコンクリートの温度を調べてみると、たとえば打設間隔 5 日と 20 日の場合では 25.12°C と 17.25°C というように約 8°C の差がある。

(3) 材令 28 日における温度分布と最終温度降下

次節において熱応力の解析を行なう必要上、コンクリート材令 28 日における温度分布を求めておく。そのためには、1つのリフトが新しいリフトによって上部を閉塞された後は、鉛直方向には熱移動がないと仮定するが、この仮定は幾分誤差を生ずる。その誤差の 1 例は表-3.7 における $\Sigma T_i'$ が零でないことである。 $\Sigma T_i'$ の値は打設間隔とリフト打設後の日数によって変わるが、打設後の日数が大きくなると、 $\Sigma T_i'$ の値は小さくなる傾向にある。したがって、材令 28 日を考えると、 $\Sigma T_i' = 0$ と仮定した誤差は小さいものと考えこよいであろう。なお、新リフト打設時には埋内の温度は年平均気温に等しくなく、また一様な温度ではなっていない。したがって、ここには旧埋内の温度は年平均気温に等しく、一様であり、かつ水平には無限に長いものと仮定することにした。

(i) 温度分布の計算

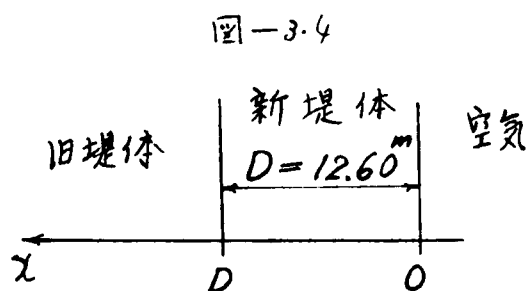
以上のように考えると、材令 28 日における水平方向の温度分布はつぎのようになる。この状態を要約するとこにより求めることができる。

(a) 閉塞時における新埋内の温度が気温より T_0 高いとき、材令 28 日における温度を求める。

(b) 閉塞時における温度は 0°C で、それ以後発熱するとき、材令 28 日における温度を求める。

(c) (a) と (b) で求められた温度に年平均気温を加える。

図-3.4 において、旧埋内は無限に大きいものと仮定すると、文献(8)の (28) 式より、新埋内の初期温度が T_0 であると



きの温度分布は次式によつて与えられる。

$$T = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right) + \frac{T_0}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{D-x}{\sqrt{4at}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{D+x}{\sqrt{4at}}\right) \right\} \quad (3.8)$$

打設されたリフトは、上かつきリフトによつて閉塞された後においても水和熱の発生がある。この水和熱の発生による温度分布を求めるに際しては、コンクリートの断熱温度上昇は材令10日以後において小さいので、この時期以後は発熱による温度上昇を無視する。したがつて、打設間隔5日の場合のみを計算すればよいことになる。さて、温度分布の計算は、前と同様に、断熱温度上昇曲線より $d\theta$ を計算し、(3.8)式において T_0 の代りに $d\theta$ を代入して時間で積分すればよいが、ここでは先に実施1の方法と同様に、段階的な温度上昇におきかえて計算する。

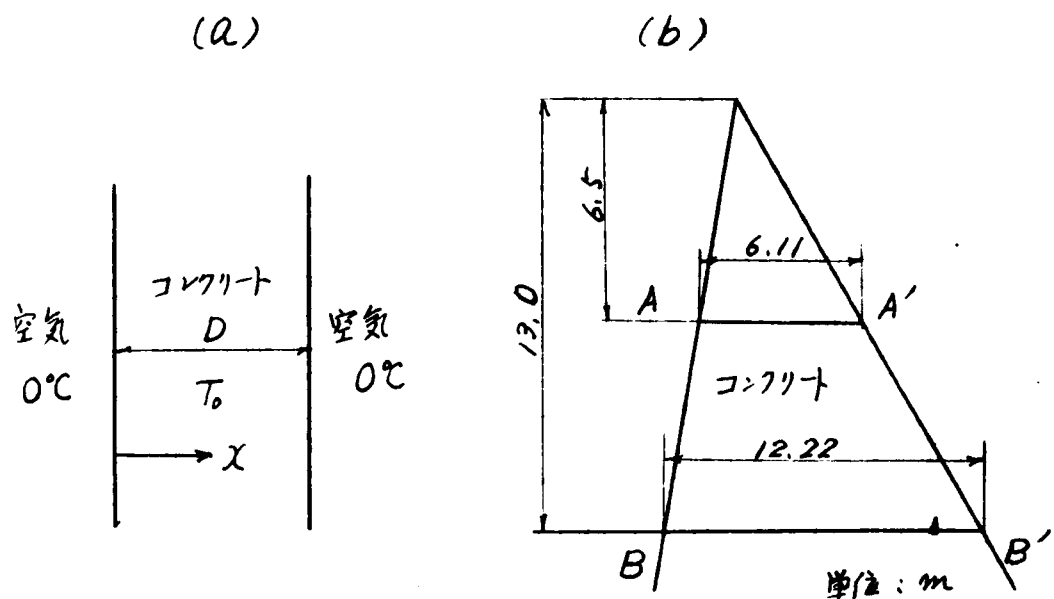
→ 旧埋付天端標高より上部では、新埋付の両側面が外気に露出している。したがつて、初期温度が気温より T_0 だけ高るとき、材令28日における温度分布はつぎのようによつて計算することができる。

図-3.5(a)の場合を考慮して、

$$T = T_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ 2 - \operatorname{erf}\left(\frac{n-1+(x/D)}{\sqrt{4at}/D}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{n-1-(x/D)}{\sqrt{4at}/D}\right) \right\} \right] \quad (3.9)$$

断熱力を計算するときの必要な位置として、図-3.5(b)に示した $A-A'$ および $B-B'$ 断面と選ぶ。(3.9)式の計算を行ななくても、文献(8)のFig. 4を利用すればよい。

図-3.5



(ii) 最終安定温度に達したときの温度降下量

以上に求めた結果を加え合わせると、材令28日における温度上昇量が求められ、この値に 15°C を加えると、材令28日におけるガムの温度が求められる。この温度から最終安定温度（第2種の仮定、すなわち下流面に 15°C と1と）と差引くと、温度降下量が得られる。次節において差分法により熱応力を求める必要上、橋梁の最終安定温度降下量を求めると附図-Ⅲ・3・4に示すような結果となる。

3.4 最終安定温度に達したときの熱応力状態

新旧埋坪は複雑な温度経歴を示すのみならず、新埋坪はコンクリート打設の第一とき著しい温度変化を生ずるので、コンクリートの弾性係数と温度経歴とを考慮に入れなければ厳密な熱応力の解析を行なうことができない。したがって、過去に実施された解析と同じ仮定を用いて、本ダムにおける熱応力状態の特徴と研究することとする。

このためには、主部ダムで用いられる仮定と同様につきのような仮定を採用する。すなわち、新コンクリートは材令28日まで弾性係数が卓越し、この間では変位が起らないと仮定せず、これ以後においては完全弾性係数として振舞うものと仮定する。第2章の例にある、は Fontana ダムの測定値⁽¹⁶⁾ などを参照しても、両者の値は近似的に成立すると考えられる。得られる結果は引張応力が大きくなることから、安全側の仮定である。このような仮定を設けると、すでに示した附図-Ⅲ・3・4の温度降下量を用いて熱応力解析を行なうことができる。この計算には差分法を用いることにした。この場合の最終安定温度としては、第1種の仮定のように下流面に年平均気温よりも高くなるべきであろうが、そうすると高上げダムの内部では温度降下量が増大し、下流面では温度が上昇する。このような仮定では発生応力が好条件になりすぎることも考えられるので、最終安定温度としては第2種の仮定を用いることにした。なお、複雑になることを避けるために、新旧コンクリートならびに基礎岩盤の弾性係数は同一で仮定し、弾性係数の異なるための影響は別に考えることにする。

以上のような熱応力解析は、基礎の影響が及ばないような部分では、compensation line method によって近似的に計算することからできる⁽¹⁷⁾。そこで compensation line method による結果と差分法による結果とを比較した。さらに、新旧埋坪のコンクリートの弾性係数が異なることに応力状態がどのように変わるかを調べるために、単純な温度変化を仮定し、新埋坪と旧埋坪の弾性係数比が

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000

(1) 新旧媒体の弾性係数が同一のとき

(1) 差分法による計算

方程式 (3.10) において述べたように、温度上昇を T とするとき、平面歪状態では Airy の応力関数 Φ の満足すべき微分方程式はつぎの通りである。

$$\nabla^4 \Phi = -\frac{\alpha E}{1-\nu} T^2 T \quad (3.10)$$

Φ が定まると、応力成分は、

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (3.11)$$

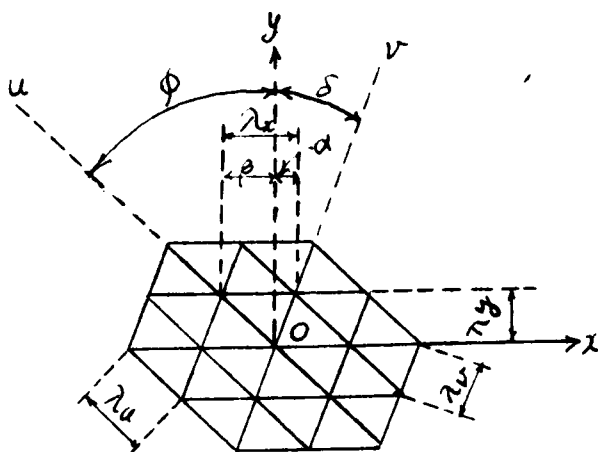
によって与えられる。さて、すべての境界において荷重が作用せず、自由境界である場合には、境界上では、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad \Phi = 0 \quad (3.12)$$

の条件が成立する。ここに、 n は境界における法線方向である。

図 3.6 の形にならべく適合し、上下流面の境界条件を合理的に導入するため、図 3.6 のような三角形格子⁽⁸⁾を考へる。この格子の一部をとり出した図 3.6 において、つぎのよう記号を用いる。

図-3.6



$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \lambda_x, \\ \sin \phi &= \beta / \lambda_u, \\ \cos \phi &= \lambda_y / \lambda_u, \\ \tan \phi &= \beta / \lambda_y, \\ \sin \delta &= \alpha / \lambda_v, \\ \cos \delta &= \lambda_y / \lambda_v, \\ \tan \delta &= \alpha / \lambda_y \end{aligned}$$

さらに、

$$A = \alpha / \lambda_x, \quad B = \beta / \lambda_x, \quad C = (\lambda_y / \lambda_x)^2 - AB \quad (3.13)$$

とあるとき、一般に函数 $F(x, y)$ の x および y に関する微分係数はつぎのよう表わすことができる。

$$\lambda_y^4 (\nabla^4 F)_0 = 2F_0(2+A^2+B^2+3C^2+4C) - 2(F_p+F_s)(2A+2AC-BC) - 2(F_g+F_t)(2B+2BC-AC) - 2(F_r+F_w)(2C+2C^2-AB) + (F_a+F_g)A^2 + (F_c+F_j)B^2 + (F_e+F_m)C^2 + 2(F_b+F_h)AB + 2(F_d+F_k)BC + 2(F_f+F_n)AC, \quad (3.14)$$

$$\lambda_y^2 (\nabla^2 F)_0 = A(F_p+F_s) + B(F_g+F_t) - 2F_0 + C(F_w-2F_0+F_r), \quad (3.15)$$

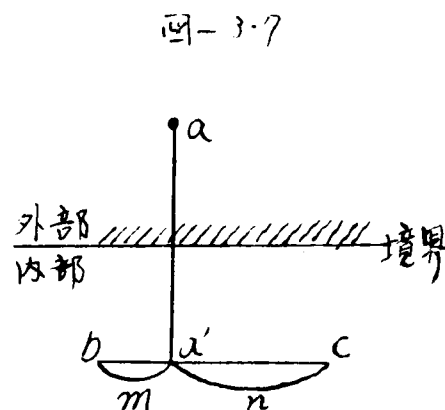
$$\lambda_y^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_0 = (C+AB)(F_w-2F_0+F_r),$$

$$\lambda_y^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_0 = A(F_p+F_s) + B(F_g+F_t) - 4B(F_w+F_r) - 2(A+B-4B)F_0, \quad (3.16)$$

$$2\lambda_y \lambda_y \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_0 = (F_g+F_t) - (F_p+F_s) + (B-A)(F_w-2F_0+F_r)$$

基礎岩盤におおむね、鉛直下向き、および左右に2列に並ぶ格子点を想定し、この境界線に
おいて応力が消滅する条件を用いることにした。このときとすべき境界において、境界条
件は (3.12) 式であるから、図-3.7に示すように、
境界外の格子点 a における Φ の値は、境界に隣
接する点と対称な点 a' における Φ の値と同じと
して与えてある。 a' における Φ の値は、境界内
の相隣る格子点 b および c における Φ の値を
距離 による比例配分した値とする。すなわち、
 Φ_a は次式によって与えられるものとする。

$$\Phi_a = \Phi_{a'} = \Phi_b + \frac{m}{m+n}(\Phi_c - \Phi_b)$$



(3.16) 式は逐次 (3.13) および (3.14) 式によって表わさる。このときとすべき格子点の集合
法による二+四元一次方程式が得られる。

図-3.4 における数値はつぎの通りである。

$$\lambda_x = 6.11 m, \quad \lambda_y = 6.50 m, \quad \lambda_y/\lambda_x = 1.06383,$$

$$\tan \delta = 0.1, \quad \sin \delta = 0.09961, \quad \cos \delta = 0.99562,$$

$$\tan \phi = 0.84, \quad \sin \phi = 0.64319, \quad \cos \phi = 0.76567,$$

$$\alpha = \lambda_y \cdot \tan \delta = 0.106383 \lambda_x, \quad \beta = \lambda_y \cdot \tan \phi = 0.393617 \lambda_x$$

したがって、(3.13) 式の値は下記のようになる。

$$A = \alpha/\lambda_x = 0.106383, \quad B = \beta/\lambda_x = 0.393617, \quad C = (\lambda_y/\lambda_x)^2 - AB = 1.036397$$

上記の数値と附図-Ⅲ・3・4 が示した (図では温度降下と正としている) を用いて、た
か力要素重を求めた結果を附図-Ⅲ・3・6 に示す。たか力函数通かみかみと、たか力成分を求
めることが出来る。その結果は附図-Ⅲ・3・7 ~ Ⅲ・3・9 の通りである。ただし、

$$\alpha = 1.0 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}, E = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2, \nu = 0.2$$

と仮定した。

これらの結果によると、いずれの場合においても表面は引張たかの残存することはない(打設間隔5日ときには上流表面にはほんのわずかの引張たかのみみられる)。しかしながら、内部に於いてはかなり大きい引張たかが見られる。たとえば、打設間隔を5日とすると、 0.5 t/m^2 程度の引張たかを生じ、新旧埋付けの打設目附近においても約 40 t/m^2 の引張たかが、鉛直方向にも水平方向にも生ずる。これらの引張たかかなり大きいものであるが、弾性係数が $2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ 程度であるコンクリートに対する引張強度および打設目の強度より倍々小さいものであり、さらに打設目ではそれ以上が敷かれることを考えると、十分注意に施工すれば、必ずしも打設間隔5日とするのも不可能はないと考えられる。

また、これらに於いては、解利に使用に於ける単純な仮定が成立するものでない、これらの仮定よりほかに危険な条件が起る可能性があるかどうかよく考えてみなければならぬ。たとえば、コンクリートは年周を通じて打設するから、それぞれのコンクリートの打設温度は年平均気温とかけ離れたものとなる。しかしながら、この結果のみより判断すれば、夏期においては打設間隔を延ばし、リフト表面の養生について十分注意すれば、人工冷却の必要はないように考えられる。

(ii) Compensation line method による計算

例として打設間隔10日の場合について、EL. 33.0 m (断面Ⅳ-Ⅳ) における鉛直直たかを考えよことにする。この断面の温度変位量とそれに対する compensation line を画くと附図-Ⅲ・3・10 のようになる。図に示した温度差に $-\alpha E / (1-\nu)$ を掛ける。平面歪状態における鉛直直たかが求められる。その結果は表-3・9 の通りである。

表-3・9 断面Ⅳ-Ⅳの鉛直直たかの比較 (t/m^2)

位 置	A	B	C	D	E
Comp. line method	-3	-20	25	30	-130
差 分 法	-22	-14	26	33	-69

これをすでに求めた差分法による結果と比較すると、ここで述べたような近似計算によってもかなり高い一致の得られることがわかる。ここで求めた結果の方が下流面への力が著しく大きいのは compensation line method では下流面の傾斜を考慮していないこと、差分法では下流表面付近の激しい応力変化が求められなかったことによるものである。ダム下部において基礎拘束の影響を大きく受けている部分を除外すれば、このような近似計算法によつて、熱応力状態の一般的な傾向を知ることが出来る。

(2) 新旧堤体の弾性係数の差が及ぼす影響

新旧堤体の間に弾性係数の差があるとき、熱応力状態がどのような変化を生ずるか調べるために、温度変化の種類としては、新堤体が一様に温度降下するものと仮定して解析することにした。前述のような複雑な温度降下を仮定するよりも、弾性係数の差が応力状態にどのような影響を及ぼすかということについての知識は、このような単純な温度変化のときの方が明確になる。まず、計算法を示すが、この計算法は compensation line method と同様に平面保持の仮定を基礎とするものである。

(1) 計算法

応力成分は図-3.8 のように定め、図-3.9 に示すように新旧堤体の下流面勾配はともに等しく m である場合を考える。新堤体のみに一様な温度降下 $-T$ を生ずるものと仮定する。11 単位幅の堤体を考える、任意の水平断面 AB で切断すると、新堤体は自由に収縮するものと仮定すると、図-3.9 の破線に示したように収縮する。このときの収縮は $-dT$ であるから、収縮した新堤体をもとの水平断面 CB の高さまで伸ばし、かつ C, C' をもとの CC' と一致させるためには、 CC' 方向に与えらる下流面に平行な一様な引張応力

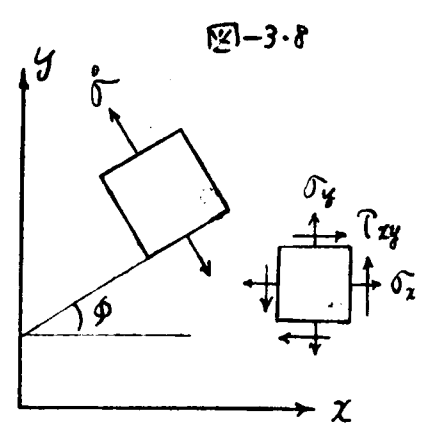


図-3.8

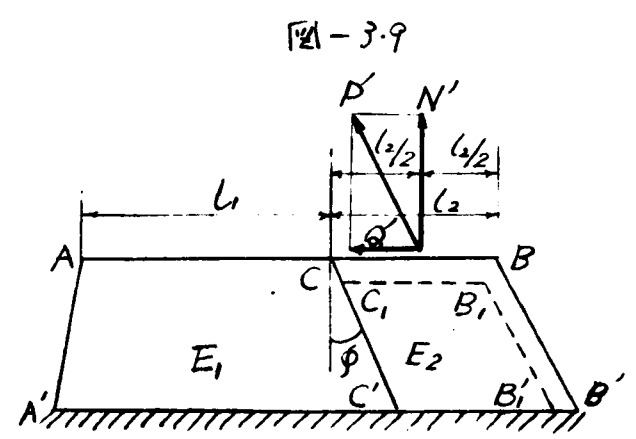


図-3.9

$$\sigma = \alpha E_2 T \quad (3.17)$$

を加える必要がある。するとこのとき新埋作の直交応力成分はつぎの通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \sigma \cos^2 \phi = (1/(1+m^2)) \alpha E_2 T, \\ \sigma_x &= \sigma \sin^2 \phi = (m^2/(1+m^2)) \alpha E_2 T, \\ \tau_{xy} &= -\sigma \sin \phi \cos \phi = -(m/(1+m^2)) \alpha E_2 T \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

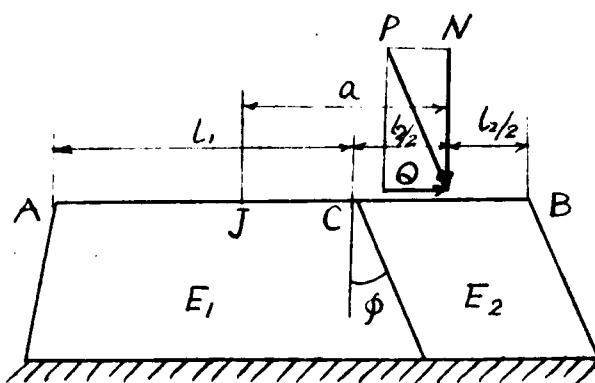
このような状態にすることは、CB面を重心に作用する力が必要である(図-3.9参照)。

$$\left. \begin{aligned} \text{鉛直力: } N' &= \sigma_x l_2 = \alpha E_2 T l_2 \cos^2 \phi = (1/(1+m^2)) \alpha E_2 T l_2, \\ \text{剪断力: } Q' &= \tau_{xy} l_2 = \alpha E_2 T l_2 \sin \phi \cos \phi = (m/(1+m^2)) \alpha E_2 T l_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

このような力を加えると、新埋作はもとの形になり、断面ABも直線となり新旧埋作は一致される。しかし実際の砂んでは新埋作に温度変化が生じたのみで力は作用していないのであるから、仮想的に加えた(3.19)式の力を逆に加えて砂んに作用する合力を零にする必要がある。すなわち、水平断面ABにおいて図-3.10に示すような方向に、

$$\left. \begin{aligned} \text{鉛直力: } N &= (1/(1+m^2)) \alpha E_2 T l_2, \\ \text{剪断力: } Q &= (m/(1+m^2)) \alpha E_2 T l_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

図-3.10



の荷重を作用させる必要がある。このとき断面ABの中立軸をJとし、Nの作用点の偏心量を a とすると、中立軸に作用するモーメントは

$$M = aN \quad (3.21)$$

このような力によって生じた新旧埋作の応力をそれぞれ σ_2 および σ_1 とすると、これらの応力は安定計算のときに用いた断面諸数値を用いて計算することから

きる。新埋作に生ずる応力は(3.18)式に示される応力 σ と σ_2 とを加えればよい。そうすると真の応力は、

$$\text{新埋作に対しては, } \sigma_2 = \sigma_2^* + \sigma \quad (3.22)$$

$$\text{旧埋作に対しては, } \sigma_1 = \sigma_1^* \quad (3.23)$$

以上は平面応力状態として考えた結果である。砂んは各ブロックは埋作方向には変位しないとして仮定すると平面歪状態として考えなければならぬ。平面歪状態における応力は平面

応力状態における応力に、

$$1/(1-\nu)$$

を掛けるとにより得られる。これらのすべての応力は新堤体の温度降下量 $-T$ に比例するから、以下には温度降下量 1°C の場合を計算する。弾性係数としては、 $E_1 = E_2 = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ のとき、 $E_1 = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, $E_2 = (4/3) \times 10^6 \text{ t/m}^2$ のとき、および $E_1 = 3 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, $E_2 = 2 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ のときを考慮することにある。なお、新旧堤体の下流面勾配はほとんど等しいので計算に際しては、 m として新堤体下流面勾配をとり、 $m = \tan \phi = 0.840$ とする。

(ii) 応力状態

最初から平面応力状態にあるとすると、

$$N = (1/(1-\nu))(1/(1+m^2)) \alpha E_2 T l_2 = 0.7325 \alpha E_2 T l_2$$

である。この鉛直力のみによって生ずる応力を計算することにある。この結果は表-3.10 に示す通りである。添字 α および β はそれぞれ新旧堤体を表わし、添字 u および d はそれぞれ上流面および下流面を意味するものとする。断面の記号は附図-Ⅱ.3.1 に対応させてある。

表-3.10 弾性係数の相違による鉛直直応力の変化 (t/m^2)

E (t/m^2)	断面	σ_{1u}	σ_{1d}	σ_{2u}	σ_{2d}
$E_1 = E_2$ $= 2 \times 10^6$	Ⅲ	1.56	-6.64	8.01	-4.73
	Ⅳ	3.73	-7.36	7.29	-3.60
	Ⅴ	4.57	-7.87	6.78	-2.17
	Ⅵ	4.76	-8.03	6.62	-1.42
$E_1 = 2 \times 10^6$ $E_2 = (4/3) \times 10^6$	Ⅲ	2.31	-6.19	5.68	-3.16
	Ⅳ	3.93	-7.00	5.10	-2.07
	Ⅴ	4.50	-7.39	4.85	-1.28
	Ⅵ	4.69	-7.51	4.76	-0.34
$E_1 = 3 \times 10^6$ $E_2 = 2 \times 10^6$	Ⅲ	3.46	-9.28	8.47	-4.73
	Ⅳ	5.90	-10.50	7.65	-3.10
	Ⅴ	6.75	-11.08	7.27	-1.28
	Ⅵ	7.03	-11.26	7.14	-0.52

この近似計算は図Ⅱ.3.1のような温度降下を仮定すると、旧堤体上流側には自然的に引張応

力を生ずる。このような状態は C. C. Zienkiewicz¹⁹⁾ が差分法によって得た結果と一致している。E₂ が 3/2 倍に減るれば、ダム上部では引張応力が増大するけれども、断面 V-V' 以下では逆に引張応力がわずかに減ずる。一方 E₁ の値が 3/2 倍になれば、新旧埋件上流側に生ずる引張応力は幾分増加する。これらの引張応力のみならず旧埋件および新埋件の下流側に生ずる圧縮応力とももちろん弾性係数が変わればそれに伴って変動する。しかしながら、一方の埋件の弾性係数が変わっても、ここで示した程度の弾性係数の変化であれば、他方の埋件応力に及ぼす影響が小さい。弾性係数の変わった方の埋件には、ほぼ弾性係数の変動割合に比例した応力変動を生ずる。すなわち、弾性係数が 3/2 倍になれば、応力も近似的に 3/2 倍になる。したがって、コンクリートの弾性係数と強度とが比例するならば、弾性係数が異なってもダムの安全性には著しい影響を及ぼさないと考えよう。このような応力変動の傾向は、氷川ダムにおいて述べたところと一致するものである。

以上のようなことから、前節で行った計算は、新旧埋件コンクリートが弾性係数 $2 \times 10^6 \text{ t/cm}^2$ を持つ品質のものであると考えるときの残存熱応力であって、もし旧埋件および新埋件の弾性係数が異なれば、どれだけの弾性係数の異なるといふ割合に依りて応力も変化すると考えよう。したがって前にも述べたように、残存熱応力のみから考えると一応打設間隔を 5 日と 12 日とよく考えられる。

§ 3.5 新旧埋件打継目近傍の熱応力状態

本ダムにおける蓄上げ工法を用いるときには、水和熱による温度変動によって生ずる熱応力のために、つぎのような特殊な英が問題となる。

(a) 新旧埋件の打継目が離れずダムの一体化が確保されるかどうか。

(b) 旧埋件下流側が階段状になつてゐるときに、新しく打設するリフトの上面とどのような高さの所にすべきか、また、旧埋件下流面の形に変更を加える必要があるかどうか。

これらの英を検討するためには、材料の性質および強度分布の時間的な変動を考慮しなければならぬ。ここでは旧埋件（場合によっては新埋件の下部コンクリートも）は剛体であり、新しく打設したリフトのコンクリートが完全弾性体であると仮定し、最上リフトのみが一様な温度降下をしたときの応力状態を研究し、発生応力の程度から以上の問題に対し検討を加えることにする。かかる場合の理論的解析はかなり困難であるので、以下に述べるように先弾性実験によって応力解析を行なつた。

(1) 光弾性実験

弾性係数 E は Epoxy 樹脂、剛性 μ には鋼を用い、附図-Ⅲ・3・11 に示すような模型を作った。これらの模型における Epoxy 樹脂と鋼との接触部に接着力、すなわち第2章で述べた光弾性実験法による Epoxy 樹脂に生ずる熱応力を求めた。すなわち、新しく打設したリフトが種々な状態で旧埋込物および下のコンクリートによって完全に拘束されているとき、新リフトが一様な温度変化をうけたときの熱応力状態を求めたわけである。

模型 A においては鉛直打継目における応力状態の基礎的な要素を調べることを目的としている。模型 B においては打設したリフトが旧埋込物の水平部に乗り上げたとき、模型 C においては旧埋込物の角に丸味を付けたときの応力状態を調べることを目的としている。以下には、温度降下量を正としたときの応力状態を示すことにする。

(2) 模型 A の応力状態

底辺のみならず一つの鉛直側辺 AB が固定された場合である。附図-Ⅲ・3・12 は $h/l = 1/2$ の場合における応力状態である。実験によればこの箇所隅角 B あるいは C における応力の大きさに大差はない。しかしながら、AB 辺の水平引張応力は $0.5 \times E T$ を下ることになり、この鉛直打継目の離れる可能性が増大する。これは鉛直打継目の附着強度は水平打継目のそれよりも小さい²⁰⁾から施工上十分の注意が必要である。ただ、この AB 面における剪断応力は水平な底面 AD に比べて幾分か小さいことは好都合である。 h/l の値が $1/2$ よりも大きくなっても、AB 面における応力には大きな差はない。

そこで打設したリフトの温度がほぼ最大になる場合 3 日を基準とし、このときからの温度降下によって生ずる打継目の水平引張応力を求めてみる。第2章で述べたことから明らか通り、この仮定は安全側の応力を与えるものである。

表-3.8 より温度降下 T を求め、図-3.2 より期間中の平均弾性係数を推定し、まず温度降下による応力 $\alpha E T$ を求めると表-3.11 に示す通りになる。さらに附図-Ⅲ・3.12 より打継目鉛直面に作用する水平直応力の平均値は $0.7 \alpha E T$ と仮定し、クリープを考慮に入れて、載荷弾性係数 E_s は表-3.11 の弾性係数の

打設 3 日 ~ 5 日 において	0.7 倍
打設 3 日 ~ 10 日 において	0.6 倍
打設 3 日 ~ 20 日 において	0.5 倍

表-3.11 鉛直打継面に作用する水平直応力

打設間隔 (day)	コンクリート 枚令 (day)	温度降下 $T (^{\circ}\text{C})$	平均弾性 係数 $E (10^4 \text{ kg/cm}^2)$	αET (t/m)	水平直応力 (t/m^2)
5	5	2.61	2.0	52	25
10	5	2.65	2.0	53	26
	10	7.13	2.3	164	69
20	5	2.64	2.0	53	26
	10	7.06	2.3	162	68
	20	8.87	2.6	230	81

であると考えるときには、打継目の鉛直面に作用する応力は表-3.11 に示したような値になる。正確に応力を計算するには step-by-step computation によればよいが、そのためにはクーラーに関する性質を知っておかなければならない。

(3) 模型Bの応力状態

附図-Ⅱ-3.11(b) に示すように、旧埋込みの階段状水平部分に築上げた高さ h_2 が1段の高さ h_1 の $1/2$, $1/3$, $1/6$ および0倍である場合について実験を行なった。上表面における水平直応力の大きさは附図-Ⅲ-3.13 に示す通りである。この場合には附図-Ⅲ-3.13 に示すB, D点の外にB'点およびA'点においても大きい応力集中が生ずる。このように大きい応力の生ずる箇所が増加するので望ましくない。 h_2/h_1 が小さくときには附図-Ⅲ-3.13 に示されているように、B'付近にかなり大きい引張応力が生じ、しかもA'においても大きい引張応力が生じているから、A'B'なる面において亀裂割れの発生が危険性が極めて大きくなる。

(4) 模型Cの応力状態

この場合には旧埋込みの凸角に、1段の高さの0.2倍の半径をも丸味をつけるときの影響を調べた。附図-Ⅲ-3.11(c) に示すように、この丸味の部分に築き上げるコンクリートの高さ h_3 が1段の高さ h_1 の $1/5$, $2/5$, $3/5$ であるときについて、上表面の水平引張応力を示したものが附図-Ⅲ-3.14 にある。 h_3/h_1 が大きいときには局部的な応力集中を幾分減らすことはできる。しかしながら、 h_3/h_1 が大きいときには上表面に応力の大きい部分が広い面積にわたって、しかも丸味部分の接着部（すなわち新リフ

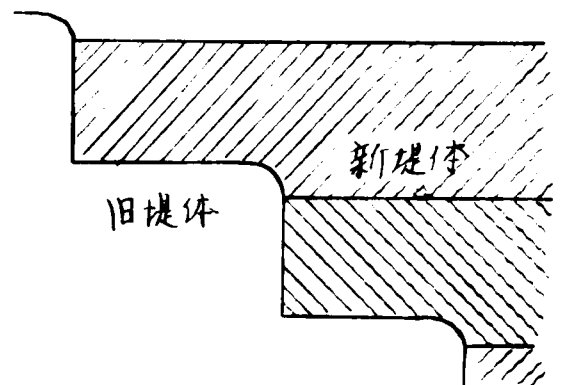
トの下面) においても大きい引張応力を生ずるので、模型 B の場合と同様にひび割れが発生し易い。したがって丸味の部分に打設リフトを乗り上げるときには、むしろその乗り上げ部分の高さを低くした方が好ましいと考えられる。

しかしながら、乗り上げる部分を高くすると局部応力は丸味のないとき (模型 A および B の B 点) に比べて小さくなるので、もし局部応力が問題となるときには、幾分丸味の高いところまで打設リフトを打上げることと考えられる。

(5) リフトの配置に関する考察

(3) において示したように、旧コンクリートの水平部分におかれる厚さは大きいほど好ましく、旧堤体¹⁾に(4)で示したような丸味をつけた場合、丸味の部分にまでコンクリートを上げてても大きな効果は期待できないものと思われる。一方、このような丸味のあるとき、丸味の部分が打設リフトの底面に現われるようにすれば、この丸味によって応力集中が緩和される。したがって、附図-Ⅲ-3-13 において、断面 A'B' においてひび割れが発生し易いことを述べたが、この危険性が少なくなる。以上のようなことを考えると、図-3-11 に示したようにリフトを配置するのがよいと思われる。

図-3-11



なお、表-3-11 によれば、リフトの打設間隔とあまり長くとると、打設したリフトの温度低下が速くなるので、鉛直打設目における水平引張応力が大きくなる。この計算は極めて近似解であるが、すでに第2章で述べた傾向に一致するものであり、ある程度正しい傾向をとらえているものと考えてよい。したがって、打設間隔をむやみに長くとることは得策ではない。

§3.6 応力状態に関する考察

若上げ後において新旧堤体が一併として作用し、熱応力について考えたいものとする。この点では安全であることは安定計算の結果明らかである。そこでつぎに最終安定温度に達したときの熱応力が加わった場合を考えてみよう。このためには、最も熱応力の大きい打設間隔5日の場合のみをとり上げることとする。最終安定温度に達したときには、

全般的にダム表面に圧縮応力、ダムの内部下流寄りには引張応力が現われる。このような状態は王泊ダムにおける解析結果と著しく異なる。

さて、最大引張応力は 100 t/m^2 程度であり、引張応力の現われるダムの内部下流寄りの位置では、水圧、自重、その他荷重によつて生ずる応力は圧縮応力であるから、このような引張応力は消滅するが、すつと小さい値になる。また趾部における熱応力は 10 t/m^2 の引張応力であるが、これも他の荷重によつて消滅する。下流面における熱応力はかなり大きい圧縮応力となつてゐるが、これに他の荷重による応力を加えても 200 t/m^2 を越えない。一方、ダム底面における剪断応力を調べた全般にわたつて小さい。

新埋体の弾性係数が旧埋体のそれよりかなり小さい場合を考へても、水圧による応力ならぬ熱応力状態がダムの安全性に重大な影響を及ぼすことはない。以上のことを考へると、著上げダムは新旧埋体の打継目が完全に付着してゐて、ダムの一体化が保持されるならば、安全性に不安を抱くことはないであらう。

したがつて、打継目の付着強度と応力状態については慎重な検討を必要とする。新旧埋体打継目の熱応力は鉛直方向にも水平方向にも約 40 t/m^2 の引張応力となる。剪断応力は 15 t/m^2 以下である。この程度の応力のときには、水平打継目はもちろん鉛直打継目においても、継目が離れると考へなくてもよい。なお、水位が上昇してゐないときでも、鉛直方向に自重によつて圧縮応力の加へることは好都合である。上流面に水圧が作用すれば、打継目には上記の熱応力と逆符号の応力が作用するので問題はなからぬ。図-3-5で示したように、打取けた最上リフトが冷却するとき、鉛直打継目において大きい引張応力が生ずる。最終安定温度に達したときに、このような応力がどれくらい残留してゐるか明らかでないけれども、相当大きい引張応力が残留することと予想する必要があるであらう。そのため、ダムの水位が上昇するまでに、あるいは最終安定温度に達するまでに、引張応力によつて打継目が離れる危険性がある。これを避けるためには、コンクリートの最高温度を下げるのが最も有効である。打継目が離れないためには極めて慎重な施工を行ふ必要がある。ただし、打継面が傾斜した直線であるときと比較すると、このように階段状になつてゐるときには、鉛直面は離れ易いとしても、水平面の離れることはないであらうから、極限の状態を考へるときには、互いの階段状の打継目の方が安全であると考えられる。

リフトの置き方については、すでに示したように図-3-11のような方針に従ふのがよいと考えられる。なお、このように旧埋体の水平部に乗り上がる高さが大きくなると、鉛直打継面に作用する水平直応力の平均値は、乗り上げ高さの小さい場合に比べて減少

するものである。

打設間隔をむやみに長くすることは避けるべきだといつたが、打設間隔の短いときには、下の新堤体の材令が若く弾性係数が小さいため、附図-III・3・13のグラフに大きい応力集中を生ずることに注意が必要がある。

使用予定のコンクリート（これは初期の発熱量が大きい）の性質を決定して、その温度状況も研究したところ、リフトの高さを1.1mとするため、熱放射量はかなり大きく、打設間隔を5日と12リフト閉塞まで、断熱温度上昇30°Cのうち17°Cは放射されることが明らかになった。通常の重力ダムであれば、このような打設間隔を採用してもいいが、嵩上げに対しては多くの未知要素があり、これらの中の一部は前述の応力解析で明らかになったけれども、残されている問題は多い。これらの未知要素の大部分は温度変化に付随した問題であり、特に新旧堤体の継目における確実な付着力を保持しようとする、放射熱量のみならず、リフトの最高温度を低くすることが必要である。

したがって、温度規制の要否はむしろ材令3日頃に生ずるリフトの最高温度を低くすることが第1であり、第2はリフト閉塞までの間にむび割れを生じない程度にならるべく多量の熱放射を行なわせることである。このためには別種のセメントを使用することについて検討することも有意義であろう。

また最終安定温度に達したときの応力状態のみより考之れば、標準の施工条件によって工事が行なわれる場合には、打設間隔5日と12も人工冷却を行なう必要はないと考之られる。しかしながら、堤体の状況、打設条件などが標準状態以外にあるときは研究していないから、考之得る悪条件の場合について、それがどのような影響を及ぼすか推測する必要がある。なお、新堤体が一様に収縮（硬化、自己成長などによって）する場合を考之ると、このときの応力状態は、表-3・10に示すように、上流面に引張応力を与えるものとなる。

第 4 章

アーチダムの熱応力状態

いままでに述べたところは、主として水和熱の発生ならぬに冷却の過程における熱応力状態であつて、外界の温度変動による熱応力についてはほとんど考察を加えてゐなかつた。外界の温度変動条件を人為的に制御はできず（もちろん、ダムの表面を保護すれば不可能ではない）、温度変動条件が与えられ、それにより生ずる熱応力はダムの型式と寸法によつて決まるものである。

外界の温度変動で主要なものは気温の日変動と年変動である。第Ⅱ編第Ⅱ章および第Ⅲ章を参照すると、前者による熱応力はほとんど表面のみで限られ、ダムの型式や寸法による影響は小さい。これに對して、後者の温度変動は、ダムの型式や寸法に応じてかなり異なつた熱応力を与える。アーチダムでは年温度変動がかなりの影響を与えると考えられ、設計荷重もこの温度変動かと入れられてゐるので、本章においては、完成したアーチダムの年週期温度変動による熱応力状態を考察する。週期的な温度変動による熱応力を取り扱うときには、コンクリートを近似的に弾性体と仮定するに過ぎない。そうすると重ね合わせの法則が用ゐられるから、温度の日変動および年変動による熱応力をも重ね合わせて考えるときには、その応力と他の荷重による応力とを加へ合わせればよい。

アーチダムの年週期温度変動による熱応力状態の特徴を知るために、以下に第Ⅱ編第Ⅱ章第2.4に於いて述べた天ヶ瀬ダムについて、周辺継目のあるとき（単純支持）とないとき（弾性支持）について応力解析を行なつた。この場合に、熱応力のみにあらず水圧による応力状態も調べた。¹⁾

応力解析法としてはクラウン片持梁法を用いた。周辺を単純支持されたアーチダムに對して、クラウン片持梁法を用いて解析することは通常行なわれてゐるので、その解析法の不脱略をも示すことにする。

§ 4.1 周辺継目

(1) 周辺継目の挙動

基礎岩盤の変形を合理的に計算する方法の確立されてゐた時代には、アーチダムの挙動は周辺の支持条件で固定支持と仮定した場合と単純支持と仮定した場合

との中間にあるべきものであると考えられていた。基礎岩盤が弾性体であると仮定すると、基礎岩盤の弾性変形を比較的容易に計算する方法が F. Vegt^{2) 3)} によつて見出されたので、現在、アーチダムの設計に際しては、もっぱら基礎の弾性変形を考へて解析が行なわれている。しかしながら、最近行なわれているように、ダムと埋体とにサドルを造り、サドルと埋体との間に周辺継目を設ける工法が用いられると、再び昔の問題が再燃して来る。

周辺継目をどのような力学的仮定のもとに取り扱うかということに關しては多くの問題がある。現在のわが国における設計計算方針では、周辺継目を設けた場合でも、埋体はサドルに密着しているものと仮定して応力計算を行なっている。しかしこの仮定は大いに疑問の存在するものである。なぜなら、C. Semenza^{4) 5)} の述べているところによると、周辺継目はほとんど滑ることになり、この支持点ではヒンジとしての回転作用があるものと考へる方が実情に近いからである。そこでこれまでの計算方針とは全く逆の極端、すなわち周辺継目は自由に回転することから、この断面においてモーメントは伝達されないという仮定を採用した場合についても考へてみる必要のあるであらう。このような観点から天ヶ瀬ダムの一、二次計画を例にとつて、ダムの挙動の相違を比較検討することにした。

基礎岩盤が弾性変形を許す以上、ダムの周辺がヒンジで支えられ、この仮定をたゞそこにおいて、支束の弾性変位を考慮に入れなければならぬ。支束の弾性変位を考慮に入れると非常に計算が面倒になることと、支束が回転可能であると仮定すれば支束移動の応力及び影響は比較的小さいと考へられることから、支束は移動しないすなわち単純支持であると仮定することにした。

(2) 周辺継目の利便

周辺継目を設けることは、複雑な形をした継目を造らなければならないことであるから、それだけ施工が面倒となるが、反面には、一般的にいつても利便があると思へる。

(a) アバウトメントと流側に生ずる引張応力によりひび割れの発生する可能性が低くなり、これによる漏水、ダムの異常応力の発生が避けられる。

(b) 岩盤と埋体との間にサドルを設け、埋体は岩盤から独立させることが可能である。したがつて、谷の形にかかわらずダムの形を選ぶことができ、岩盤の不均一性の影響を軽減することができる。

(c) サドルの部分にダム本体とは別個に、それより数日〜数ヶ月先に施工することか
 ができるので、コンクリート打設を非常に合理的に実施できる場合がある。

(d) 熱応力問題 について考えみると、支束が回転できるために、それだけ固定さ
 れている場合にくらべて岩盤からの拘束が小さくなるから、同一の温度変動によって発生す
 る熱応力は小さくなると思われる。

熱応力問題のみを考之れば、周辺継目を設けた方が応力の減少ともなり得るで
 有利であるが、周辺継目の利害を判定しようとすると、他の荷重による応力も含め
 て考之なければならぬ。そこで以下には、表-2.4 (5.2.4 参照) に挙げた荷
 重によって生ずる応力も計算した。

5.4.2 周辺継目を持つ場合の解析法

アーチダムの周辺が弾性支持されているという条件(岩盤に接着されている場合)にお
 いて、クラウン片持梁法によって解析することは左から行われておりから、その解析
 法を示さぬ。単純支持されているという条件(周辺継目を持つ場合)を採州するに、解析
 法は幾分変更を要しなければならないから、ここでは、アーチダムが単純支持された場
 合の解析法のみを記述することにする。

(1) 基本関係式

クラウン片持梁は底面にヒンジがあり、水平アーチによってそれぞれの高さにおいて弾
 性支持されている。また底面の支持条件がヒンジの代りに固定であるものとする。クラ
 ウン片持梁は図-4.1 のような構造となる。このと
 き、真 $1, 2, \dots, i, \dots, n$ においてアーチ素片を考之、
 それぞれの真の位置は底面より z_i の距離にあ
 るものとする。真 i に加わる荷重強度を $p_{0,i}$ 、片持
 梁が分担する荷重強度を p_i で表わすものとする。
 p_i は未知数である。底面において、すべての荷
 重を片持梁が受け持つと仮定する。

底面で固定された片持梁の真 j における
 単位荷重(通例にならって三角形分布の荷重とする)
 によって生ずる真 i の撓みを $c\delta_{ij}$ とすると、 $p_0, p_1,$
 \dots, p_n による片持梁の真 i の撓み $c, p\Delta_i$ は、

図-4.1

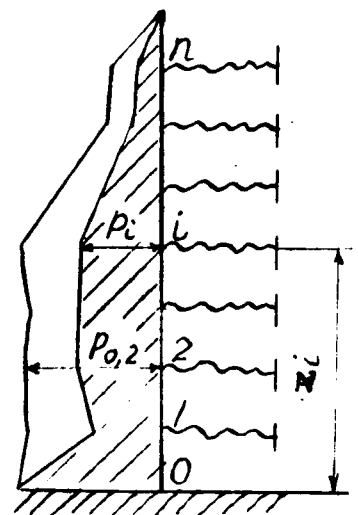
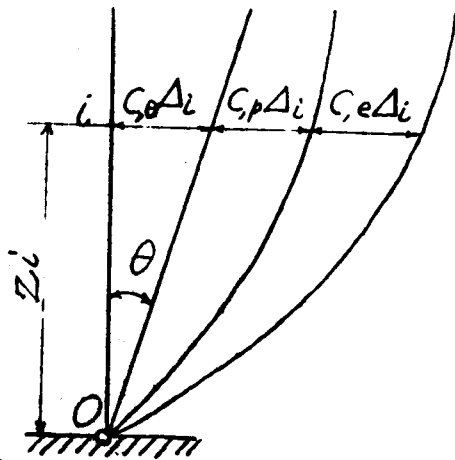


図-4.2

$$c_p \Delta_i = \sum_{j=0}^n c_{\delta ij} p_j \quad (4.1)$$



片持梁の底面は固定されていると考えているから、

$$c_{\delta 0j} = 0$$

である。

実際の片持梁は底面がヒンジであるから、
点Oにおいて撓み角を生ずる。この撓み角は未知であり、 θ で表わすことにすると、 θ によつて生ずる点iにおける撓み $c_{\delta 0} \Delta_i$ は、図-4.2 に示すように、

$$c_{\delta 0} \Delta_i = \theta \cdot z_i \quad (4.2)$$

初期荷重による撓みがある場合には、これを $c_e \Delta_i$ で表わす。しかるときには、
底面がヒンジであるクラウン片持梁の点iにおける撓み $c \Delta_i$ は、

$$c \Delta_i = c_p \Delta_i + c_{\delta 0} \Delta_i + c_e \Delta_i \quad (4.3)$$

アーチ素片iに半径方向の単位等分布荷重が作用したときのクラウンにおける撓みを $A \delta_i$ で表わす。アーチ素片iに加わる荷重は $p_{0,i} - p_i$ である。したがって、この荷重が作用したときのアーチ素片iのクラウンにおける撓み $A_p \Delta_i$ は、

$$A_p \Delta_i = A \delta_i (p_{0,i} - p_i) \quad (4.4)$$

と表わすことができる。初期荷重によるアーチクラウンの撓みを $A_e \Delta_i$ で表わすと、アーチ素片iのクラウンにおける撓み $A \Delta_i$ は、

$$A \Delta_i = A_p \Delta_i + A_e \Delta_i \quad (4.5)$$

クラウンにおいて、片持梁素片とアーチ素片との撓みが一致すべきであるという条件より次式が得られる。

$$\begin{aligned} c \Delta_i &= A \Delta_i, \\ \therefore c_p \Delta_i + c_{\delta 0} \Delta_i + c_e \Delta_i &= A_p \Delta_i + A_e \Delta_i, \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} (4.6)$$

この式に含まれる未知数は p_1, p_2, \dots, p_n および θ の $n+1$ 個であるが、(4.6)式は n 個の条件式を与えるにすぎない。さらに1個の条件式は、底面がヒンジであるから、片持梁に加わる荷重の点Oにおけるモーメントが零でなければならないという条件より得られる。この条件式はつぎのように書ける。

$$\sum_{j=0}^n c m_{oj} \cdot p_j + c_e M_0 = 0 \quad (4.7)$$

ここに、 $c m_{oj}$ は負 j における片持梁の単位荷重による負 O におけるモーメント、 $c_e M_0$ は初期荷重による負 O におけるモーメントである。

(4.6) および (4.7) 式を解けば、 p_i および O の値が得られる。これらの値を用いれば、通常のクランク片持梁法と同様にして、撓みと応力の計算を行なうことができる。片持梁の撓みを計算するときには、その支負 O における撓み角によって生ずる撓み $c_b \Delta_i$ の存在していることに注意する必要がある。

(2) 片持梁素片の撓み

近時の $P-4$ ガムは二重曲面構造となり、片持梁素片がかなり大きい曲率を持つてゐる。かかるときには、 $P-4$ の断面を $P-4$ と示したように、片持梁素片の撓みおよび断面力を計算するときには、片持梁軸線の曲率を考慮に入れる必要がある。しかしながら、ここでは簡単のために、通常にならうて、片持梁の軸線は直線にしてかつ鉛直であるものと仮定する。

(i) 荷重による片持梁の撓み

断面で固定された片持梁の負 i において、単位荷重が加わったときの撓みは、

$$c_p \Delta_i = - \int_0^{z_i} \int_0^{z_i} \frac{M}{EI} dz dz + \int_0^{z_i} K \frac{Q}{AG} dz$$

なる式によって求めることができる。ここに、撓みは下流向きを正、曲げモーメントは下流面に引張応力を生ぜしめるものを正、剪断力 Q は正の撓みを生じしめるものを正とする。 E は剪断弾性係数、 K は剪断力の分布状態に因る補正係数であり、1.25 とする。この式の計算はつぎのような形の数値積分によって実施する。⁶⁾

$$c_p \Delta_i = - \sum \frac{\Delta z}{2} \left\{ \sum \frac{\Delta z}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) \right\} + \sum \frac{\Delta z}{2} \left(K \frac{Q}{AG} \right)$$

(ii) 断面が一様な温度上昇を受けたときの片持梁の撓み

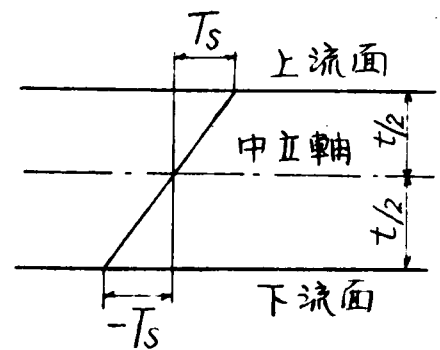
上記のように片持梁の軸線が鉛直直線であると仮定すると、水平断面中で一様な温度変化を受けたとき、片持梁には半径方向の撓みは現れない。

(iii) 断面中で一様な温度勾配が生じたときの片持梁の撓み

ガムの上流面と下流面との間に温度差のある場合がある。このために断面に回転が生じ、片持梁に半径方向の撓みが生じられる。断面中の温度分布は複雑であるのみ

ならず時期と位置によって千差万別であるが、複雑な温度分布のときの片持梁の接みと同じ接みを持つような直線的温度分布を考へることが出来る。この温度分布は compensation line によって与えられるものである。1つ加つて、断面中の直線的 T 温度変化を生ずるときのみを考へることにする。図-4.3 に示すように、断面の中立軸が厚さの中央にあり、上流面で T_s 、下流面で $-T_s$ の温度上昇を生じ、この間は直線的に温度が変化すると仮定する。断面中の平均温度は零である。このような仮定は、矩形断面であれば成立するが、側面が半径方向をなす片持梁では厳密には成立しない。

図-4.3



このような温度変化をうけたときの片持梁の接みにおける接み $c, T \Delta_i$ は次式によって与えられる。

$$c, T \Delta_i = \int_0^{z_i} \int_0^{z_i} \frac{2\alpha T_s}{t} dz dz$$

ここに、 t は断面の厚さである。前と同様に、この式をつぎの形の数値積分に変えて計算する。

$$c, T \Delta_i = \sum \frac{\Delta z}{2} \left\{ \sum \frac{\Delta z}{2} \left(\frac{2\alpha T_s}{t} \right) \right\}$$

(3) アーチ素片の接みと断面力

アーチは等厚に、軸線は円弧とする。アーチの支えはヒンジであり、かつ支えは移動しないとする。クラウンにおける接みと断面力は以下に示すような式によって与えられる。式中の記号は図-4.4 に示す通り

である。

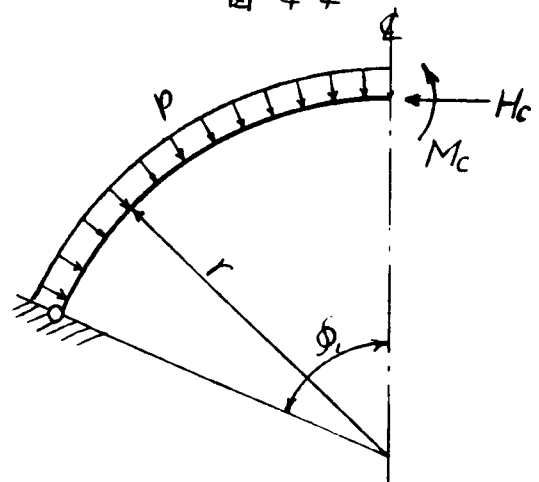
(i) 半径方向等分布荷重による接みと断面力

アーチ軸線上に加わる半径方向等分布荷重を p とすると、クラウンにおける断面力は、

$$pr - H_c = \frac{2b^2 \sin \phi_1}{Br^2} pr,$$

$$M_c = r(pr - H_c)(1 - \cos \phi_1)$$

図-4.4



$$R^2 = I/A \quad (A \text{ 是斷面積})$$

クラウン、撓み Δ は、

(ii) 一樣の温度上昇に於ける接合と断面力

ア-4 に一樣な温度上昇 T が生じたときを考へると、つぎのやうな結果が得られる。

$$M_c = -H_c r (1 - \cos \phi_1)$$

(iii) 断面中、一様な温度勾配による撓みと断面力

片持梁の場合と同様に、図-4.3 に示したような温度変化が起る場合を考へる。

1943-1-18

$$M_c = -H_c r (1 - \cos \phi_1),$$

$$\times \left[(1 + \cos \phi_1) \left\{ 2 \phi_1 \cos \phi_1 + \frac{k^2}{f^2} (1 - K \frac{E}{G}) \sin \phi_1 \right\} - (\sin \phi_1 + \frac{3}{2} \sin 2\phi_1) \right]$$

§4.3 応力計算の例

ア-4 ダムの応力状態としては、第I編において天ヶ瀬ダムに於て詳しく示しているから、こゝでも天ヶ瀬ダムを例として応力計算を行なうことにする。その第一次計画はすでに附図-I・2・12 に示している通りであり、設計条件は第I編表-2.4 に、ア-4素片の

寸法と塩分降下量は図編表-2.5に示されている。以下には通常のクラウン片持梁法、すなわちアーチガムの周辺が弾性支持であると考へたときの結果（これは建設省天分種ガム工事事務所で行なわれたものである）と単純支持であると考へたときの結果を比較して示す。クラウン片持梁法による計算方式については、前節ならびにオI編において述べた以上に説明の必要はないものと思う。したがって本解析に使用した特殊な仮定のみについて記して置く。

(1) 仮定

ガムの自重は片持梁のみによつて支持されるものと仮定することにし、クラウン片持梁については側面が半径方向になつてゐる影響を考へて入れた。しかしながら、片持梁軸線の変曲は無視した。弾性支持されたアーチについては、アバウトメントが鉛直面ではなく傾斜にあるものとして変位を計算した。

選入のアーチ素片の標高は、オI編表2.4にならつて、EL. 73.60.45から30mの幅である。ただし後述の型式ⅢHのガムでは、EL. 73m以下は、EL. 79.5mとした。ガム天端には越流部を設けること、およびEL. 73m以上においては収縮縫目にグラウトを施しなさいとの応付状態を調べるために、EL. 73m以上においてはアーチが用いられる場合を主として取り扱った。弾性支持の条件を用いたときには、片持梁にクラウツが入らなさいと考へたとき（型式ⅠF）および片持梁の底面を厚さの1/3だけ上流面にクラウツが入ると考へたとき（型式ⅡF）の両方について計算されている。単純支持の条件を用いたときには、上述のようにEL. 73m以上はアーチ作用がないと仮定したとき（型式ⅠH）と、EL. 79.5mよりアーチ作用があると仮定したとき（型式ⅢH）について計算を行つた。ただし、型式ⅢHではEL. 75m以上天端までは厚さが一律に5mであるものとした。したがつて型式ⅢHのガムは、その他の型式のものと比較して、ガム上部が幾分厚くなつてゐる。

ガムの上流面と下流面との間の温度差による水平方向の温度勾配については、採用すべき標準が示されていないので、断面の位置に関せず、上流面が 3°C 高く、下流面が 3°C 低い場合を考へたこととした。すなわち、図-4.3において、 $T_s = 3^{\circ}\text{C}$ とした。この値は貯水池が湛水されてゐるとき、冬期に起るであろうと推定したものである。夏期ではこの逆に $T_s = -3^{\circ}\text{C}$ と仮定する。オI編で示したように、ガム下流表面温度は気温に比して気温より数℃高く、上流表面は貯水池水温に等しくその変動は気温変動より小さい。このようにことから、上流面と下流面との温度差による熱応力を考へるときは、上流面と下流面に最大 $\pm 6^{\circ}\text{C}$ の温度差をせい、その間は直線的に温度が変化するものと仮定した。

(2) フラウン片持梁法による応力計算

以上のように仮定すると、未知数は4個の分組荷重と1個の撓み角であり、撓みの一致条件(4.6)式と片持梁断面のモーメントの釣合条件(4.7)式は五元一次の連立方程式になる。これを解いて未知数が定まると、5.4.2に示した式によって撓みおよび断面力を求めることができる。

以下に示す、型式ⅢHのダムを例にとり、未知数を決定するための方程式を求めよう。ただし、 p_i は分組荷重であり、 p_1 をEL. 30.0 mにおける値とし、添字の番号順に下へ上の標高に上って行くものとする。

(i) 水圧、堆泥圧 および水平地震荷重の作用するとき

EL. 30.0 m に対して:

$$40.3022p_1 + 86.2384p_2 + 135.987p_3 + 96.6381p_4 + 15000000\theta + 1169.76 = 242.234(67.2811 - p_1)$$

EL. 45.0 m に対して:

$$109.487p_1 + 282.800p_2 + 530.075p_3 + 405.967p_4 + 30000000\theta + 2378.99 = 583.953(46.0277 - p_2)$$

EL. 60.0 m に対して:

$$174.132p_1 + 521.175p_2 + 1157.33p_3 + 929.923p_4 + 45000000\theta + 3731.16 = 1170.57(25.3823 - p_3)$$

EL. 75.5 m に対して:

$$257.470p_1 + 834.304p_2 + 2138.48p_3 + 2004.04p_4 + 64500000\theta + 5663.72 = -2638.31p_4$$

モーメントの釣合に対して:

$$318.400p_1 + 542.272p_2 + 810.639p_3 + 565.500p_4 = -8294.55$$

(ii) 一律の温度降下を与えるとき

$$42.3022p_1 + 86.2384p_2 + 135.987p_3 + 96.6381p_4 + 15000000\theta = 2623.63 - 242.234p_1$$

$$109.487p_1 + 282.800p_2 + 530.075p_3 + 405.967p_4 + 30000000\theta = 4339.30 - 583.953p_2$$

$$174.132p_1 + 521.175p_2 + 1157.33p_3 + 929.923p_4 + 45000000\theta = 6798.67 - 1170.57p_3$$

$$257.470p_1 + 834.304p_2 + 2138.48p_3 + 2004.04p_4 + 64500000\theta = 11498.0 - 2638.31p_4$$

$$318.400p_1 + 542.272p_2 + 810.639p_3 + 565.500p_4 = 0$$

(iii) 温度勾配を12 $T_S = 1^\circ\text{C}$ を与えるとき

つぎに示す式は $T_S = 1^\circ\text{C}$ のときのものである。 $T_S = 3^\circ\text{C}$ のときには等数値を3倍する必要がある。

要加数:

$$42.3022p_1 + 86.2384p_2 + 135.987p_3 + 96.6381p_4 + 15000000\theta + 166.755 = 1085.14 - 242.234p_1$$

$$109.487p_1 + 282.800p_2 + 530.075p_3 + 405.967p_4 + 30000000\theta + 693.517 = 2932.92 - 583.953p_2$$

$$174.132 p_1 + 521.175 p_2 + 1157.33 p_3 + 229.923 p_4 + 4500000 \theta + 1652.63 = -826.82 - 1170.57 p_3$$

$$259.670 p_1 + 834.304 p_2 + 2138.48 p_3 + 2074.05 p_4 + 6450000 \theta + 3816.89 = 11511.4 - 2638.31 p_4$$

$$318.400 p_1 + 542.272 p_2 + 810.639 p_3 + 565.500 p_4 = 0$$

(iv) 計算結果

種々の条件における分担荷重, 接みおよび応力を一括して表-4.1 ~ 4.4 に示す。

§4.4 応力状態の考察

(1) 自重による応力状態

同じかヒンジであると考えれば, 少しでも鉛直線より傾斜した片持梁は, それ単独では自重を支えることができない。したがって, 自重は片持梁が単独で受け持つという仮定は成立しないことになる。ここでは底面にヒンジがあるときの片持梁の自重による応力は, 基礎が固定されている片持梁における値を採用することにした。したがって, 型式IFとIHとは, 自重による応力は同一の値となる。表-4.1に自重による片持梁の応力を示す。

片持梁の自重の支持法については, 本文で行なったような考え方は一つの簡単な仮定にすぎないので, より合理的な仮定が得られれば変更すべきである。たとえば, 自重は三次元構造のダムによって支持されるものと仮定すると, 片持梁底面にヒンジがあるときにおいても構造上の不合理はなくなる。

(2) 外力による応力状態

表-4.1 自重を受ける場合

ダム 型式	標高	クラウン片持梁応力 (kg/cm ²)	
		上 流	下 流
IF	73	-0.43	-3.15
	60	7.17	-14.66
	45	12.54	-24.54
	30	11.57	-27.38
	15	5.67	-22.58
IIF	73	-0.43	-3.15
	60	7.17	-14.66
	45	12.54	-24.54
	30	11.57	-27.38
	15	2.92	-27.82
IIF	79.5	+0.59	-0.59
	60	7.70	-15.39
	45	13.03	-25.23
	30	11.42	-27.86
	15	5.88	-22.88

表-4.2 水圧、堆泥圧および地震力を受ける場合

ダム 型式	標高 (m)	片持梁 分担荷重 (ton/m ²)	ア-4 分担荷重 (ton/m ²)	撓み (mm)	クラウン片持梁力 (kg/cm ²)		ア-4 応力 (kg/cm ²)			
					上流	下流	クラウン		アバウトメント	
							上流	下流	上流	下流
IF	73	-4.64	14.64	52.53	1.15	-1.33	-40.60	-28.34	-26.13	-43.02
	60	1.92	23.47	41.25	0.29	-2.94	-40.04	-23.92	-22.31	-42.10
	45	7.33	38.70	28.71	1.67	-7.30	-44.24	-21.33	-17.87	-48.79
	30	10.96	56.27	16.94	5.17	-14.02	-42.25	-12.40	-10.47	-46.45
	15	87.92	0	6.45	19.80	-30.70				
II	73	-5.78	15.77	56.60	1.15	-1.33	-43.75	-30.54	-28.16	-46.35
	60	-0.09	25.48	44.78	-0.72	-1.90	-43.47	-25.97	-24.22	-45.71
	45	3.72	42.30	31.39	-2.35	-3.93	-48.37	-23.31	-19.53	-53.33
	30	7.04	60.18	18.12	-1.43	-6.95	-45.18	-13.26	-11.20	-49.68
	15	87.92	0	5.74	21.20	-35.91				
IH	73	-11.35	21.34	47.55	1.15	-1.33	-54.92	-46.22	-50.60	-50.60
	60	-7.50	32.89	38.50	-4.68	2.16	-51.61	-39.10	-45.36	-45.36
	45	-1.26	47.30	27.62	-14.61	9.13	-49.80	-32.47	-41.13	-41.13
	30	5.71	61.52	14.90	-18.50	11.34	-44.26	-19.32	-31.84	-31.84
	15	87.92	0	0	-3.63	-3.63				
IIIH	79.5	-13.47	13.47	35.55	0	0	-38.89	-33.02	-35.93	-35.93
	60	-2.97	28.35	33.19	-17.27	15.07	-44.50	-33.71	-39.11	-39.11
	45	2.56	43.67	25.38	-23.44	18.31	-45.77	-29.83	-37.80	-37.80
	30	8.42	58.81	14.25	-22.35	15.27	-42.31	-18.47	-30.44	-30.44
	15	87.92	0	0	-3.63	-3.63				

表-4.3 一様な温度降下を受ける場合

ダム 型式	標高 (m)	片持梁 分担荷重 (ton/m ²)	ア-4 分担荷重 (ton/m ²)	撓み (mm)	ク라운片持梁応力 (kg/cm ²)		ア-4 応力 (kg/cm ²)			
							ク라운		アバットメント	
					上流	下流	上流	下流	上流	下流
ⅡF	73	1.05	-1.05	12.39	0	0	0.95	4.18	4.76	0.31
	60	0.42	-0.42	9.38	0.58	-0.60	-1.32	2.73	3.14	-1.85
	45	0.69	-0.69	6.02	1.29	-1.35	-1.68	3.41	4.18	-2.70
	30	0.22	-0.22	2.90	2.10	-2.25	-1.30	4.65	4.88	-1.96
	15	0	0	0.38	6.56	-7.28				
ⅢH	79.5	0.54	-0.54	9.87	0	0	0.17	2.77	1.46	1.46
	60	-0.29	0.29	7.14	0.40	-0.41	-1.95	1.23	-0.38	-0.38
	45	-0.71	0.71	4.83	0.14	-0.15	-2.59	1.52	-0.57	-0.57
	30	0.99	-0.99	2.38	-0.20	0.22	-2.06	3.58	0.65	0.65
	15	0	0	0	0	0				

表-4.4 一様な温度勾配を生ずる場合

ダム 型式	標高 (m)	片持梁 分担荷重 (ton/m ²)	ア-4 分担荷重 (ton/m ²)	撓み (mm)	ク라운片持梁応力 (kg/cm ²)		ア-4 応力 (kg/cm ²)			
							ク라운		アバットメント	
					上流	下流	上流	下流	上流	下流
ⅢH	79.5	1.97	-1.97	29.33	0	0	1.82	8.84	5.30	5.30
	60	0.72	-0.72	16.76	2.32	-2.38	-2.76	4.78	0.91	0.91
	45	-1.16	1.16	12.47	3.01	-3.13	-4.95	3.28	-0.91	-0.91
	30	-3.11	3.11	4.01	1.91	-2.05	-5.68	3.08	-1.43	-1.43
	15	0	0	0	0	0				

また両端ヒンジのアーチと弾性支持のアーチについて、特徴を比較にみることにする。
 このために、単位荷重となるが半径方向に 1 t/m^2 の荷重が作用したとき、高さ 1 m のアーチ素片に於ける断面力と撓みの大きさを比較に表-4.5 に示した。2 ヒンジアーチの場合には、クラウンの曲げモーメントは非常に小さく (EL. 73 m において 4.9 %, EL. 30 m において 2.6 %), 軸推力はほとんど差がない (EL. 73 m において 101 %, EL. 30 m において 106 %)。また 2 ヒンジアーチではアバットメントにおいて曲げモーメントは生じない。したがって同じ荷重が作用するときには、2 ヒンジアーチの方が応力状態は良好である。一方、撓みの大きさは、EL. 73 m において 62 %, EL. 30 m において 80 % というように小さくなる。クラウンの撓みを考慮するとき、2 ヒンジアーチの方が剛性が高い。このようにしてはすでに W. Cain が求めた値¹⁾ によって明らかである。W. Cain は完全固定のアーチと 2 ヒンジアーチについて比較した結果、 ϕ/r が小さく中心角 2ϕ が大きければ、クラウンの撓みは 2 ヒンジアーチの方が小さくなることを示した。天て瀬ダムにおける実際の寸法と条件を用い比較を行なったが、この程度の寸法では、支点をヒンジと仮定した方がクラウンの撓みが小さくなる。という。

クラウン片持梁の底面がヒンジであると考えれば、先端にモーメントを伝達することはできず、片持梁の剛性値が小さくなる。そのうえアーチの剛性が高いから、アーチ素片の分担荷重が大きくなることは明らかである。

表-4.5 単位荷重 (1 t/m^2) によるアーチ素片の断面力と撓み

断面位置		ク ラ ウ ン				アバットメント			
標 高 (m)		73	60	45	30	73	60	45	30
曲げモーメント ¹⁾ ($\text{t} \cdot \text{m}$)	F ²⁾	21.46	40.37	56.48	72.11	-29.56	-49.59	-76.20	-86.92
	H ³⁾	10.44	22.38	34.98	55.11	0	0	0	0
軸推力 ¹⁾ (t)	F	130.60	114.98	90.63	62.02	131.00	115.28	92.13	64.59
	H	131.39	115.85	93.03	66.01	131.47	115.86	93.03	66.10
撓み ⁴⁾ (mm)	F	3.59	1.76	0.47	0.30	0.47	0.26	0.07	0.04
	H	2.29	1.71	0.58	0.24	0	0	0	0

- (注) 1) 断面力は高さ 1 m のアーチについての値
 2) 周辺が弾性支持されたアーチとしての計算値
 3) 周辺がヒンジで支持されたアーチとしての計算値
 4) アバットメントの撓みは対称軸に平行な方向の値

表-4.2に示すように、水圧その他の半径方向等分布荷重が作用した場合について、Ⅱa型式IFとIHと比較すると、アーチの分担荷重はIHの方が大きくなっている。これについてIHの方がアーチ軸力は大きいから、クラウンにおける曲げモーメントはむしろ小さい。その結果として、クラウンの応力は上流面、下流面ともに圧縮応力が増加することになっている。参考のために、クラウンに1mmの接みを生じたと仮定してアーチの断面力を計算すると表-4.6に示すようになる。上記のような曲げモーメントと軸推力の増減の割合は、この表を用いれば簡単に求めることができる。

IHの場合ではクラウン片持梁の応力は、高さの中央付近において、上流面に大きい圧縮応力が現われ、IFの場合と逆の応力状態になっている。表-4.1に示したように、自重によってクラウン片持梁の中央部上流面に引張応力が生ずるときには、これを打消すために圧縮応力の現われることが望ましい。

型式Ⅱ下では、クラウン片持梁の上面上流側に厚さの1/3の部分にひび割れが入り、アーチには全くひび割れが入らないと仮定した。この場合の結果はIFとIHの中間の数値を示しているが、ほとんどIFに近い値である。もともと片持梁の分担する荷重が小さいから、片持梁の剛性に変化を生じても、アーチの剛性に変化が起らないければ、おたかりの荷重分担量の割合に極端な変動は現われない。

型式ⅢHにおいては、EL. 79.5 mにおいてもアーチ作用を確保するものとして計算した（ただしEL. 75 m以上は厚さ5 mとした）。このように、さらに上のアーチまでアーチ作用があるものと仮定すると、上部アーチの分担荷重が著しく減ずる。

表-4.6 クラウンに1mmの接みを生じたときのアーチ素片の断面力

断面位置		クラウン				アバットメント			
標高 (m)		73	60	45	30	73	60	45	30
曲げモーメント ¹⁾ (t·m)	F ²⁾	5.98	23.0	76.1	239.6	-8.24	-28.2	-102.7	-288.8
	H ³⁾	4.69	19.1	59.9	227.7	0	0	0	0
軸推力 (t)	F	36.4	65.1	122.1	206.0	36.5	65.6	124.2	214.6
	H	59.0	98.9	159.3	272.8	59.0	98.9	159.3	273.1

- (注) 1) 断面力は高さ1mのアーチについて値
 2) 周辺が弾性支持されたアーチとしての計算値
 3) 周辺がヒンジで支持されたアーチとしての計算値

(3) 熱応力状態

各標高において一様に温度降下（温度降下量は表-2.5参照）をすることを考えたときの、独立したアーチの断面力と撓みを計算した結果を表-4.7に挙げた。2 ヒンジアーチの場合には、断面力ならぬに撓みがともに小さい。とくに軸推力の減少が著しい。撓みの減少割合は半径方向等分布荷重が作用したときの減少割合割合とほとんど等しい。

水平方向に一様な温度降下とした場合について、クラウン片持梁法によって解析した結果は表-4.3に示す通りである。一般に発生応力は小さい。アーチ素片が単独に温度降下したときの応力状態と著しく異なっている。弾性支持と仮定すればすべての標高において軸推力は引張力であるが、単純支持と仮定すると、高さの中央部のアーチでは軸推力は圧縮力となっている。この表によると、後者の方が発生する圧縮応力は大きくなるが、引張応力は著しく減ずることがわかる。

すべての断面において、上流面は $+3^{\circ}\text{C}$ 、下流面に -3°C の温度変化を生じ、この場合は線形的に変化すると考えたときの計算結果（表-4.4）はかなり大きな応力を生じている。温度も $\pm 3^{\circ}\text{C}$ と仮定すれば、一様な温度変化の場合よりも大きな応力を生じた。したがってこのような計算を行う場合には、上、下流面の間の温度差の推定には慎重な考慮を払わなければならない。

表-4.7 一様な温度降下によるアーチ素片の断面力と撓み

断面位置		クラウン					アバットメント				
標高 (m)		79.5	73	60	45	30	79.5	73	60	45	30
曲げモーメント ¹⁾ (t·m)	F ²⁾		105.22	225.30	525.57	964.06		-144.90	-313.53	-708.47	-1119.21
	H ³⁾	54.63		180.29	366.83	821.12					
軸推力 ⁴⁾ (t)	F		-4.86	-11.51	-30.32	-79.98		-2.72	-6.44	-16.39	-46.24
	H	-1.07		-3.65	-9.01	-31.52	-0.65		-2.04	-4.87	-18.22
撓み ⁴⁾ (mm)	F		16.11	10.11	6.53	3.55		0.03	0.04	0.04	0.08
	H	11.50		6.80	4.34	2.62					

- (注) 1) 断面力は高さ 1m のアーチ幅での値
 2) 周辺が弾性支持されたアーチとしての計算値
 3) 周辺がヒンジで支持されたアーチとしての計算値
 4) アバットメントの撓みは対称軸に平行な方向の値

(4) 設計荷重による応力状態

以上の結果を用いて、温度勾配の影響は除外し、通常仮定されているように、自重、水圧、温度降下その他の荷重がすべて作用したとき（地震荷重を除く）の応力状態をⅡF（ダムが岩盤に弾性支持され、クラウン片持梁に15m比割れが入ると考えたとき）とⅢH（ダムが単純支持され、EL. 75m以上は厚さ5mと考えたとき）について示したものが附図-Ⅳ・4-1である。この図において括弧のない数字はⅡFのとき、括弧中の数字はⅢHのときの応力である。すでに述べたことより明らかなように、単純支持と仮定したときの方がアーチ軸推力は大きく、クラウンの曲げモーメントは小さい。アーチ応力はクラウンの上流面においては大差ないが、下流面ではヒンジの方がかなり大きくなる。アバットメントにおけるアーチ応力は、支束がヒンジと仮定する場合に曲げモーメントが消滅するので、弾性支持の場合と著しく異なることになる。クラウン片持梁の応力はヒンジと仮定した方が著しく良好な状態になる。このようにして、単純支持されているアーチダムにおいては、引張応力の現われる危険性が著しく減ずる。

天然型アーチダムについて、同じく弾性支持である場合と単純支持である場合とについて比較したところから、アーチ応力には極端な差が現われなかった。後者の仮定を用いたときには、水圧その他の荷重が作用すればアーチの軸推力が大きくなる。これに熱応力を加え合わせると、単純支持と仮定した方がクラウン上流面のアーチ応力はやや増大する。しかしながら片持梁の応力状態は良好となり、引張応力の生ずる危険性は減ずる。

附I編で示した半径方向の積み調整による解析ならびに石膏模型実験の結果によると、ここで示した結果と幾分差が現われているが、周辺継目の有無による応力状態の差はかなり微妙なものであるから、周辺継目を設けるか否かは、それぞれのダムにおいて詳細に検討を要する事項であろう。上記の計算によると、上流面と下流面とにおいて温度差を生ずることを考えると、断面中において一様に温度が変動する場合よりも大きな応力を生ずる。一級に、周辺継目を設ければ、引張応力を生ずる可能性が減じ、熱応力を軽減できることに注目すべきであろう。

第 5 章 結 論

熱応力がダムに与える影響は、まず第一にひび割れを生ずることである。ひび割れはコンクリート打設後間もなく生ずることもあるが、長期間経過にダムが冷却されて行くときに始めに現われることもある。そして熱応力(各種の体積変化による応力も含めて)のみによつてひび割れを生ずることもあるが、他の荷重による応力と重ね合わされた結果によることもある。ひび割れの大きさについても大小さまざまであり、ダムの安全性に及ぼす影響についても差が大きい。そのうち、引張応力の圧縮応力とを問わず、完成後のダムに対して、他の荷重による応力と熱応力とが重なったものである。その結果、ダムの応力状態を改善することもあるが、逆に悪化することもある。ただし、周期的な温度変動は常にダムに正負の応力を与えるものである。したがつて、この場合には必ず悪影響も及ぼすものである。

実際のコンクリートダムに現われる熱応力状態は極めて複雑である。その原因はコンクリートの性質、温度状態ならぬと拘束状態の複雑性によるものである。これらに關係する因子としてはセメントと骨材の性質ならぬにコンクリートの配合、打設工法、気象、岩盤の状況、ダムの寸法と型式などがあり、いずれもそれぞれ別のダムに応じて一定ではない。したがつて、いかなる打設工法を採用すればひび割れを防止することができ、残留する熱応力の値がいくらであるか、また外界の温度変動によつてどの程度の応力を生ずるかといふことを明確に数値で表わすことができない。本編においては、具体的に説明するため、熱応力の数値を示した箇所があるが、どのダムにおいてもこれらの値と大差ない熱応力が現われると考へてはならない。このような場合には、重大な熱応力を与える原因が明らかになり、条件が変われば熱応力がどの程度に変化するかということか判明すれば、現在までに得られている多くの経験と比較し、設計ならぬに施工法を検討するに役立つことである。この種の考察は本編でも少し触れてはいるが、第I編ならぬに第II編に得られている結果と利用することかできる。

ダムに発生する熱応力は、水和熱の発生ならぬにその放散に起因するものと、外界の温度変動に起因するものとに分けるのが便利である。本編では、まず前者に対する熱応力状態とひび割れ発生の可能性について検討を加へ、ダムの著上げに際する熱応力の事例によつて問題になり得る点とその対策を研究した。最後に、完成したダムに対する気温度変動の影響は第4章ダムの対して最も著しいものであるから、第4章の事例について年周期の

度変動をうけた場合の応力状態と研究した。これらの研究から得られた結果を以下に要約する。

§5.1 コンクリートの性質とダム地質の気象条件

ダムにおいては特に重要なものはダムにひび割れを発生せしめないということである。そのためには使用するコンクリートとダム地質の環境条件に応じた施工法を採用しなければならないが、前二者の及ぼす影響について考えるところの通りである。

(a) ダム用コンクリートの諸性質については数多くの研究が行われているが、ひび割れが発生するかどうかという条件を正確に求めようとすると未知のものが非常に多い。その主要なものは、材料の若いコンクリートの性質が明確でないこと、問題を考えるのに必要な性質を一貫して研究されたものが少ないこと、ひび割れの発生条件が確立されていないこと、温度からひび応力の正確な解析が困難なこと、非常に多数の因子から判断することなどである。

(b) コンクリートがひび割れを生じ易い状態では、 α と断熱温度上昇とすると、引張強度と $\alpha E \theta$ 、あるいは伸縮能力と $\alpha \theta$ との大小関係、ならぬに塑性性質によって決定される。

(c) あるダムにおいて良好な成果の得られたセメントや混和剤が他のダムにおいて必ずしも成功するとは限らない。ダム地質の気象、骨材の性質などから判断する。

(d) コンクリートの性質はセメントと配合によつてのみ決定されるものでなく、骨材の種類によつて変わる。ひび割れは石灰質の骨材を用いたものに多く、硫酸質の骨材を用いたものは少ない。

(e) セメントは養生に困難を伴わないかより低熱系のものを用い、コンクリートの断熱温度上昇量を小さくするべきである。断熱温度上昇を減ずればひび割れ防止に著しい効果があり、打設速乾の増進、人工冷却の不要化などの利便をもたらすことがある。

(f) ポゾランを使用すればコンクリートが苛性となり、コンクリートの品質も改良されることが多い。

(g) 使用経験の浅いセメントおよび混和剤の使用については十分な性質を調べる必要があり、フライッシュを混合したり、高炉セメントを使用したりしたコンクリートについては、すべての場合について優れた成績が得られるとはいえない。気象条件の悪い地質では特に慎重な検討を要する。

(h) コンクリート表面を水で湿りに養生することは初期のひび割れ防止に効果大きい。高温でかつ乾燥地では、特に表面の養生が大切である。型わくを長期間使用しておくことも効果がある。

(i) 打設ならぬ養生の温度によつてコンクリートの性質が異なるので、寒暖の差が大

さい地質では季節によつてコンクリート（とくにセメント）の品質を変更することについて検討を加えるべきである。

(j) 硬化収縮，自己成長，乾燥収縮，plastic shrinkage など各種の体積変化による影響を無視してはならない。

§ 5.2 ダムのフロウクに生ずる熱応力とひび割れ防止工法

ダムの施工の際には，その工法（フロウクの分割寸法，打設連打，冷却法など）を決めることは工期に関連した重要な問題である。ここでは，コンクリート打設中における熱応力の基本的な状態を示し，各種の工法と熱応力ならびにひび割れとの関係について要略を示すことにする。

(a) フロウクの厚さと幅の比は通常 $1/10$ 以下であるから，もしフロウクが一様な温度変動をうける場合には，フロウク中央附近の鉛直断面に生ずる水平直応力は高さにかかわらずほぼ同じである。その値は $-R \cdot \alpha E T_0$ である。

(b) 基礎岩盤上に打設したリフトは，温度上昇時に拘束が大きくて引張応力が生ずる。リフト上面ならぬ側面においても，基礎岩盤が健全であれば，その拘束をうけて引張応力が発生し得るものである。

(c) 岩盤上のリフトを高くすると，最初に現われる圧縮応力が大きくなるとともに，圧縮応力の現われる期間が長く経続し，その後現われる引張応力の進展も徐々であるが，引張応力の最大値が大きくなる虞が望ましくない。

(d) 岩盤上のリフトの上につぎのリフトを打ち足す長期間放置すると，速やかに冷却されるため水平引張応力が急速に発生する。この引張応力はリフトの厚さの中央部で最大値を示すから，リフトを鉛直に貫ぬく重大なひび割れが発生し易い。これを避けるには，リフトの冷却が進行するまでにつぎのリフトを打設する必要がある。

(e) 岩盤に突出部のあるとき，軟弱部のあるとき，表面温度が急遽低下するときなどにおいては，露出した表面上にひび割れの入る可能性がある。

(f) 長期間放置した旧コンクリート上に新しくリフトを打設するとき，岩盤上のリフトと同様の熱応力状態となる。

(g) 数日の間隔をおいて規則正しく打設して行くと，下のコンクリートからうける拘束の大きいのは，リフト打設後ほんのわずかの期間（材料 2～3 日と考えられる）である。したがって，この間にはリフトにほとんど引張応力が生じない。それ以後においては，下のコン

リフトから与える拘束は小さく、上にリフトが打ち足されればそれによる拘束も小さい。したがって、打設後2〜3日以後は、近似的に、リフトはそれ自身の温度変動にたいして水平に自由に動き得るものと考えることができる。この主眼は、リフトの上面ならぬに側面に幾分大きい引張応力が現われる。上面の引張応力は表面の浅い部分のみには止まるものである。

(h) 上にリフトが打ち足されると、一般的に下のリフトは圧縮応力を受ける。特に下のリフトの上面はかなり大きい圧縮応力を受けるので、(g)で述べた上面の引張応力は減ずる。

(i) 規則正しくリフトを打設するとき、同一の打設速度において、リフト高さを大きくした方が引張応力は大きくなる。

(j) 打設を中断すると、急速な温度低下によって龜裂を生ずる危険がある。この龜裂を防止するには、打設を中断する前の数リフトは高さを小さくすれば効果がある。

(k) 水平打継目が側面において開口する危険性がある。

(l) 側面に生ずる引張応力は、鋼製型枠を用いれば小さいが、木製型枠を用いると大きい。この応力の大きさを評価するにはコンクリートのクリープを考慮する必要がある。また、この応力はリフトの温度上昇に比例すると考えられる。したがって、打設速度を速くすると龜裂の危険性が大きくなる。

(m) 木製型枠でも2週間以上使用すれば龜裂の危険はないが、それ以下で取り外すときには、型枠存置期間について慎重な検討が必要である。

(n) 最終安定温度に達したときを考えると、鉛直応力ならぬに水平応力は、内部において引張応力となるが、表面は圧縮応力となるので、龜裂が生じないかぎりには望ましい応力状態である。

(o) 矩形ブロッコと同じ最小寸法のダイヤモンドハットでは、矩形ブロッコより熱応力は小さい。しかし、もし龜裂を生じたとすれば、水の浸透経路の短いことと、水圧によって水平引張応力を生ずることに注意する必要がある。

(p) コンクリートの温度上昇ならぬに降下時における龜裂を防止するには規則正しく打設が必要であり、最高到達温度を抑制すると効果が大きい。ブルクーリング法とパイプクーリング法のいずれでも優れた成績が収められている。

(q) 表面冷却法では、内部のコンクリートが冷却される時に生ずる龜裂を防止する効果がない。

(r) 不均質な骨盤がある場合には凸凹のある骨盤上にコンクリートを打設するときには、ブロッコの分割寸法を慎重に研究する必要がある。危険な位置がブロッコの中央部にある。

と主筋は斜めの継目を中央部に作るのが良いと考えられる。

(14) フローラの埋軸方向の長さを大きくすることが可能であると考えられる。人工冷却を行えば、フローラ寸法等々に打設速度を増すことができる。

(15) ひび割れ防止に必要な温度規制とそれを実現すべき工法の既略を予め決めることができる。そこに指定された工法に従い、規則的にコンクリート打設を行えば、ほとんどひび割れをまじないダムを作ることができる。

(16) ここで全く考えていない温度変化は気温変動と日射の影響である。表面温度の急激な低下は表面にひび割れを発生しやすい。

§ 5.3 ダムの嵩上げ工法

この嵩上げに用いられる工法の中で、プレストレスを導入する方法と、新埋件と旧埋件とを独立に作った後において両者の一体化を伴う工法は、理論的に比較的簡便であるが、諸外国においてはこの工法によってダムの嵩上げ工事が行われ、実際に成功を収めている。

これに反し、新埋件を旧埋件に直接密着させて嵩上げを実施する方法は、簡単な考察の結果から、先に述べた二つの工法よりも不利であると考られているものである。わが国においては、王泊ダムで極めて慎重な工法を採用することにより、この方法によって嵩上げに成功した。しかしながら、応力解析の困難な複雑な問題が多数存在し、未解決の問題が多い。桜山ダムの嵩上げ工法を検討するに際して、この方法を採用したときに生ずる熱応力状態を研究し、その結果得られた一般的な結論はつぎの通りである。

(a) 最も不安なのは、新埋件と旧埋件の打継目が、新埋件の温度低下時に離れる可能性が大きいということである。したがって、打継目ができただけよく密着するように努力しなければならない。

(b) 打継目が離れる原因の第1は、最上のリフトのみが温度低下したとき、下部の新埋件または岩盤によって拘束されているために、打継目に引張応力が生ずることである。したがって、この引張応力を減ずる最も有効な方法はコンクリートの最高温度を抑制することであり、つまりは規則正しくコンクリート打設を行ない、リフト上面を長期間露出させておくことである。

(c) 打継目の離れる原因の第2は、最終安定温度まで冷却したときに、打継目に引張応力の生ずることである。こうして単独で打継目を離すほど大きいものは

ない。この応力を減ずるには、やはり最高到達温度を低くすればよい。なお、他の荷重による応力は打継目において圧縮応力であることが普通である。

(d) 温度上昇を抑制するには人工冷却が最も効果的であるが、リフト高さを小さくすることも有効である。

(e) 新旧埋体の打継目が完全に密着されているとすると、最終安定温度に達したときの熱応力状態はそれほど危険なものではない。拱脚ダムの例では、ほとんど上流面に引張応力が現われない。

(f) 新埋体の弾性係数が旧埋体より小さいと、旧埋体の熱応力は小さくなるが、水圧による応力は大きくなる。水圧による応力は、新旧埋体の弾性係数比によつては必ずしも影響されないから、新埋体の弾性係数が小さいときにおいてもほとんど危険はない。

(g) 基礎岩盤の拘束の影響を考慮しないときにおいては、拱脚型の断面に対しても、平面保持の仮定（すなわち compensation line method）を用いて熱応力の近似値を求めることができる。

§ 5.4 年周期温度変動をうけるアーチダムの熱応力

完成したダムが周期的な温度変動をうけたときの熱応力状態はすでに第 4 章 4.4 に於いて述べた通りである。熱応力を小さくするためには、ダムのうける外部からの拘束を小さくすればよいわけであるから、アーチダムに周辺継目を設けて岩盤からダムを切り離した構造とすればよいと考えられる。そこで、周辺継目を設けたときの支持条件を単純支持と仮定し、これと岩盤に接着されているという条件の場合とを、天丁型ダムについて比較した。この場合に、熱応力のみならず他の荷重による応力状態も検討した。これらの研究から明らかになった事項はつぎの通りである。

(a) 近年の比較的若いアーチダムでは、周辺継目（支持条件を単純支持と仮定）を設けた方が岩盤に接着されているよりもアーチの分担荷重が大きくなる。これは基礎岩盤が軟弱なとき、あるいは片持梁にたわみ割れが生ずるときに現われる傾向と同一である。クラウシの値は周辺継目のある方が小さい。

(b) 比較的若いアーチダムでは、周辺継目を持つ方が熱応力状態は良好となる。特に一様な温度低下を起しても軸力の減少するものが少ない。引張応力は激減するが、圧縮応力は少し増大することがある。水圧による応力状態も場所毎に均一化されて良

好となるが、アーチ素片の負担荷重が大きくなるので、アーチの圧縮応力が増大することがある。

(c) 天ヶ瀬アーチダムについて、すべての設計荷重の加わったときの応力状態を検討すると、周辺縫目を設けた場合には、アーチクラウンにおいて軸力が大きく曲げモーメントが小さい。その結果、クラウン上流面のアーチ応力は岩盤に接合されている場合よりも少し大きくなる。クラウン下流面のアーチ応力は圧縮応力が増大するので、この奥で引張応力が現われる不安は減ずる。また、クラウン支持梁の応力状態は良好となる。このように、周辺縫目を設ければ全般的に曲げ応力が小さく改善された応力状態となるが、クラウン上流面におけるアーチ応力が増加する傾向にある。周辺縫目を設けたときの応力状態の方が望ましいものがあるかはかなり微妙なものであるので、それぞれのダムについて検討する必要がある。

(d) アーチダムの上下流面の間に温度差の生ずることを考慮すると、大きな応力を生ずるものであることに注意する必要がある。実際の気象条件を考慮すると、さらに気温の日変化、降雨、降雪、日射などの影響を考慮しなければならない。これらによって生ずる熱応力は大きくアーチダムに限ったものではない。

結 言

コンクリートダム設計ならびに施工の合理化をほかり、その安全性を正しく認識しようとする、まずダムに作用する荷重と発生する応力状態を正確に把握する必要がある。コンクリートダムの構造上の特徴を考えると、大部分の型式のものが非常に massive であること、周辺のかなりの部分が岩盤に接していること、施工は固目ならぬに収縮係数を多量に持つていること、熱応力が大きいことなどである。そして、これの製造される状況を考えて、ダム地質の気象条件、岩盤の状態とその改良法、コンクリートの性質とその打設法などはそれぞれのダムに於いて異なるべきものである。これらの因子はすべてダムの応力解析を非常に困難ならしめるものであり、一方では、地震作用や透流水の及ぼす影響など荷重の推定が困難な要素もある。ダム工学の発展のためには、これらの諸問題をすべて解明する必要がある、古くから幾多の研究者がこの方面に貢献し、それとともにダム工学が進歩して来た。

最近における構造形式の発展としては、中空式重力ダム、落いアーチダム、その成果が認められる。一方では、コンクリートダムの規模が大きくなるにつれて、工期を短縮することが望まれるようになって来るにつれて、解決を要する問題も非常に多くなっていく。コンクリートの品質改良問題はもちろんのこと、荷重のセリ、基礎岩盤の状態とその改良法の及ぼす影響、応力状態、安全性などについてより正確な知識を得ることなどすべての問題が含まれている。これらの中で比較的系統的な研究が実施されていなくて、近年において実情の把握が要望されている問題としては、ダムに発生する熱応力とそれの及ぼす影響に関するものである。この問題は、古くからコンクリートダムに生ずるひび割れの防止対策のために研究されてきたのであるが、従来の研究はほとんどが温度状態の解析に終って、熱応力にまで考察を進めていなかった。熱応力状態を研究する場合でも、非常に単純な条件を仮定して熱応力状態を推測するに止まるものが大部分であった。そこで、著者はコンクリートダムに生ずる熱応力状態を解明し、それがダムに及ぼす影響を明らかにすることに意を注いだ。

本論文はその成果をまとめたものであるが、元来コンクリートダムに現われる熱応力状態は極めて多数の因子によって支配されるものであり、非常に複雑な様相を呈するものである。その因子は、コンクリートの性質、環境条件、施工条件ならぬにダムの

型式と寸法は大別される。そこで、これらの因子がガムの熱応力にどのような影響を及ぼすものであるかということとを一般的に考察し、あるガムか他のガムと条件が異なるときに、熱応力ならびにそれが安全性に及ぼす効果にどの程度の差を生ずるものであるかを明らかにすることに努めた。さらに、熱応力状態の特徴を明らかにするために、いくつかの代表的な条件の下における熱応力の大きさを求めるとともに、コンクリートの養生便ならびに他の荷重による応力とを合わせ考へて、ひび割れの発生、ガムの安全性に及ぼす影響などを検討した。以上の研究成果をもとにして、ガム建設に際して採用すべき工法について著者の見解を示した。

これらの研究内容は3編に分けて述べ、主要な結論はすでに各編の最後に示した。そこで、これらの結論を總括し、コンクリートガムに現われる熱応力の特徴、それの及ぼす影響ならびに今後の研究を要する問題点を述べると以下の通りである。

水和熱の発生とそれの放散過程において生ずる熱応力は、コンクリートガムにひび割れを発生する主因であるから好ましくない。しかしながら、そのために残留する熱応力は、一般的には完成後のガムに対して有利な応力状態を呈す。この応力の大きさは他の荷重による応力と同じ位の大きさに達することもあるが、設計に際しては全く考慮されておらず、はたして、ひび割れを生じないようにガムを造ることかば、完成したガムは設計以上に安全な状態にあるものと考へてよい。熱応力のみならず、各種の原因によって生ずるは積変化のために発生する応力についても無視することができない。

しかしながら、外界の周期的な温度変動によって生ずる熱応力は、正負の値を繰返すものであるから、必ずガムに影響を及ぼすものである。日周期のような短周期の温度変動によつては、コンクリートの表面附近のみに熱応力を生ずるものであるから、その値は大きくても、ガムの安全性に重大な影響を及ぼさない、ガムの型式や寸法によつて応力の大きさが変わることは少ない。これに反して、年周期のような長周期の温度変動は、ガム全体にわたつて熱応力を生ぜしめるので、それによる応力が日周期変動によるものよりも小さいときでも、ガムに及ぼす影響は大きい。この応力状態は、また、ガムの型式と寸法によつてかなり変わるものであり、応力の大きさを減ずるには、外部からガムに及ぼす拘束を小さくすればよい。

現行の設計基準において考へられいる熱応力は、アーチガムその他において、完成後の年周期気温変動によつて生ずるガムの温度変動の平均値によるもののみである。それ以外の温度変動による熱応力が大きいことが明らかになつたから、これらの温度変動による応力も設計に際して考慮に入れる必要がある。

水和熱の発生に伴う熱応力の大きさは、主としてコンクリートの性質、環境条件、打設工法などによって変化する。これらの及ぼす影響は非常に複雑であり、それらの間にもよってこれらの条件が異なるから、他のダムにおける例を参照するときには、十分注意に条件の差とそれの及ぼす影響を考察しなければならぬ。特に検討すべき要点を挙げるとつぎの通りである。コンクリートについては、セメント、混和剤ならびに骨材の種類；環境条件については、最低温度・最高温度ならびに季節の状況；打設工法については、温度規制の条件、ブローラの寸法とリフトの高さ、冷却法、型枠の種類とその存置期間、養生法などである。一般には、低熱系セメントを用いること、規則正しいコンクリート打設を行なうこと、人工冷却を実施することなどはひび割れの防止に大きい効果がある。なお、ダムの嵩上げ問題で明らかにしたように、特殊な条件や工法を用いるときには十分注意が必要である。

水和熱の発生と放散過程に生ずる熱応力を研究しようとするに、コンクリート打設直後の温度の経過を調べ、それによって発生する熱応力の大きさを時間とともにたどる必要がある。このためには、若し材料におけるコンクリートの性質を十分研究しなければならぬ。そのうち、ひび割れの発生するか否かというコンクリートの破損する極限状態の研究をするには、極限附近におけるコンクリートの性質を調べ、それに合致した応力解析法とひび割れ発生条件を確立する必要がある。

コンクリートダムにおける熱応力問題は、関連する因子が非常に多いので、本論文では熱応力問題のすべての実を日月明らかにすることができなかった。上記のような実を研究する必要があるのはもちろんのこと、各種の条件のもとにおける熱応力状態とそれがダムに及ぼす影響について、さらに多くの基礎的な研究を積み重ねてこれを明らかにし、最も合理的なダムの構造型式と施工法を見出す努力を続けなければならぬ。そのためには、第II編において明らかにした熱応力状態に関する基本的な関係の役立つことは多いであろう。なお、このときの応力解析に用いた変分原理にもとづく近似解析法ならびに弾性実験法は各方面にあたって広く利用することになる。

ダムはただ単に安全なものをつくるばかりではない。すべての構造物がそうであるように、十分安全であるとともに経済的であるべきである。本論文では、これらの実を考察する考察は全く省略しているが、これは重要な研究課題をなすものである。

最後に、本研究に対し懇切な御指導と御助言を賜わった京都大学教授 丹羽博士、ならびに終始御指導を得た石原、小西、横尾、成岡の各博士に厚く

感謝の意を表す。

参 考 文 献

第 I 編

第 1 章

- 1) 国際大ダム会議日本国内委員会: ダム設計基準, 昭和32年制定
- 2) U. S. Bureau of Reclamation: Reclamation Manual, Treatise on Dams, Chap. 4
Basic Considerations (1951)
- 3) C. N. Zangar: Hydrodynamic Pressure on Dams Due to Horizontal Earthquake
Effects, Bureau of Reclamation Engineering Monograph No. 11 (1952)
- 4) 畑野正: 重力堰堤に作用する地震力の影響 (其の3), 土木学会論文
集, ㍶5号, p. 83 (1950)
- 5) 小坪 清真: 不規則な地震力におよぶ動水圧, 土木学会論文集, ㍶47号, p. 32 (1951)
- 6) 文献 4)
- 7) 小坪 清真: 重力ダムの耐震性について, 土木学会論文集, ㍶55号, p. 48 (1958)
- 8) 村 幸雄 訳 (W. P. Creager, J. D. Justin and J. Hinds 著): コンクリ
ートダム, p. 34, 丸善 (1955)
- 9) 小坪 清真: アーチダムに働く地震時動水圧, 土木学会論文集, ㍶44号, p. 28 (1951)
- 10) 小坪 清真: アーチダムに働く動水圧の模型実験, 土木学会論文集,
㍶46号, p. 30 (1951)
- 11) 東京電力アーチダム委員会: アーチダム実験報告 (1955)
- 12) The Arch Dam Committee, Tokyo Electric Power Company, Inc.: Experimental
Researches of Arch Dam, Cinquième Congrès des Grands Barrages, C. 12 (Vol. 4,
p. 840), (1955)
- 13) 丹羽 義次, 畑中元弘, 森 忠次: アーチダムの振動時における応力状態
について, 京大工学研究所彙報, ㍶7輯 (1955)

- 14) 畑野 正, 高橋 忠, 堤 一: 堰原重力ダムの振動実験と考察,
土木学会論文集, 第59号, p. 8 (1958)
- 15) Y. Niwa, M. Hatanaka and S. Samukawa: Researches on Vibration Characteristics of Hollow Gravity Dams, Tech. Reports of the Engineering Research Institute, Kyoto Univ., Vol. 8, No. 6 (Report No. 46), (1958)
- 16) 文献 15)
- 17) 電研土木部構造係: 井川ホローグラビティダム模型振動実験報告, 電力技術研究所報, Vol. 6, No. 4/5, p. 12 (1956)
- 18) S. Leliavsky: Uplift in Gravity Dams, p. 1, Constable & Co. Ltd. (1958)
- 19) K. Terzaghi: Discussion of the paper "Stability of Straight Concrete Gravity Dams," Trans. ASCE, Vol. 99, p. 1107 (1934)
- 20) K. Terzaghi: Simple Tests Determine Hydrostatic Uplift, E. N. R., Vol. 116, p. 872 (1936)
- 21) L. F. Harza: The Significance of Pore Pressure in Hydraulic Structures, Trans. ASCE, Vol. 114, p. 212 (1949)
- 22) D. C. Henny: Stability of Straight Concrete Gravity Dams, Trans. ASCE, Vol. 99, p. 1041 (1934)
- 23) 文献 18)
- 24) I. E. Houk: Uplift Pressures in Masonry Dams, Civil Engineering, Vol. 2, p. 578 (1932)
- 25) W. P. Creager: Discussion of the paper "High Dams: A Symposium," Trans. ASCE, Vol. 95, p. 137 (1931)
- 26) W. P. Creager: Discussion of the paper "Stability of Straight Concrete Gravity Dams," Trans. ASCE, Vol. 99, p. 1066 (1934)
- 27) E. Ishii: On the Effect of Internal Temperature and Deformation of a Gravity Dam, First Congress on Large Dams, Question No. 1-a, R. 11 (1933)
- 28) T. V. A.: Measurements of the Structural Behavior of Norris and Hiwassee Dams, T. V. A. Technical Monograph No. 67 (1950)

第 2 章

- 1) W. Cain: Stresses in Masonry Dams, Trans. ASCE, Vol. 64, p. 208 (1909)
- 2) 新井 義輔: 重力堰堤の内部応力算定に関する一方法, 土木学会誌, 21巻, p. 677 (1935)
- 3) 石原 藤次郎, 小西 一郎: 重力堰堤の応力計算について, 土木学会誌, 22巻, p. 267 (1936)
- 4) 丹羽 義次: 堆砂圧による重力堰堤の内部応力について, 土木学会論文集, 26号, p. 44 (1951)
- 5) 丹羽 義次: 堰体内部応力に対する地震時動水圧の影響, 建設工学, 2巻, p. 14 (1949)
- 6) B. F. Jakobsen: Stress in Gravity Dams by Principle of least Work, Trans. ASCE, Vol. 96, p. 484 (1932)
- 7) F. Vogt: 文献 6) の Discussion, p. 548
- 8) I. K. Silverman: Approximate Stress Functions for Triangular Wedge, Jour. Applied Mechanics, Vol. 22, p. 123 (1955)
- 9) J. H. A. Brahtz: The Stress Function and Photoelasticity Applied to Dams, Trans. ASCE, Vol. 101, p. 1256 (1936)
- 10) 石原 藤次郎, 丹羽 義次: 堰堤の体及び基礎の接触線附近の応力分布について, 土木学会誌, 昭和22.23年度論文集, p. 136 (1949)
- 11) E. Kohl: Beitrag zur Lösung des ebenen Spannungsproblems, Z. A. M. M., Bd. 10, S. 141 (1930)
- 12) Y. Niwa: A Fundamental Research on the Method of Calculation of Internal Stresses in Dams, Tech. Reports of the Engineering Research Institute, Kyoto Univ., Vol. 2, No. 5 (1952)
- 13) H. M. Westergaard: Computation of Stresses in Bridge Slab Due to Wheel Loads, Public Road, Vol. 11, p. 1 (1930)
- 14) U. S. Bureau of Reclamation: Stress Studies for Boulder Dam, Boulder Canyon Project Final Reports, Part V, Bull. 4. p. 119 (1939)
- 15) D. McHenry: A Lattice Analogy for the Solution of Stress Problems,

- Institute of Civil Engineers, Vol. 21, p.59 (1943)
- 16) U. S. Bureau of Reclamation: Reclamation Manual, Treatise on Dams, Chap. 9 Gravity Dams, Part II, p. 93 (1950)
- 17) P. Lardy: L'influence de l'élasticité du sol sur l'état de contraintes et de déformations des barrages-poids, Bulletin du Centre d'Études, Univ. de Liège, Tome 6, n. 311 (1953)
- 18) O. C. Zienkiewicz: The Stress-Distribution in Gravity Dams, Jour. Institution of Civil Engineers, Vol. 27, p. 224 (1947)
- 19) 文献 16) の Part II, p. 11
- 20) O. Pfafstetter: Trial Load Analysis of Stress in Dams, Proc. ASCE, Vol. 81, Separate No. 662 (1955)
- 21) F. Vogt: Über die Berechnung der Fundamentdeformation, Det Norske Videnskaps-akademie, Oslo (1925)
- 22) U. S. Bureau of Reclamation: Reclamation Manual, Treatise on Dams, Chap. 10 Arch Dams, Part II, p. 58 (1950)
- 23) 文献 16), Part II, p. 103
- 24) 東京都水道局: 小河内ダム, p. 51, 東京都水道局 (1960)
- 25) G. S. Sarkaria: Monolithic and Non-Monolithic Gravity Dams, Water Power, Vol. 7, n. 149 (1955)
- 26) 森 忠次: ハリ及びアーチの応力状態に及ぼす支持条件の影響について, (端面傾斜の影響), 土木学会誌, 40巻, p. 219 (1955)
- 27) B. F. Jakobsen: Stresses in Thick Arches of Dams, Trans. ASCE, Vol. 90, p. 554 (1927)
- 28) 大野 謙: 曲り梁の歪エネルギーに対する新公式, 土木学会誌, 33巻, p. 381 (1953)
- 29) 林 正夫: 基礎の変形がアーチダムの応力に及ぼす影響について, 電力中央研究所, 技術研究報告, 土木58007 (1958)
- 30) 林 正夫: 基礎の変形がアーチダムの応力に及ぼす影響について — 堤体応力を中心とした一考察, 土木学会論文集, 469号・別冊(3-1), (1960)

- 31) Y. Niwa, C. Mori and S. Samukawa: A Study on the Effects of Saddle upon the Stress Condition of an Arch, Tech. Reports of the Engineering Research Institute, Kyoto Univ., Vol. 10, No. 9 (Report No. 73), (1960)
- 32) 文献 22)
- 33) A. Bourgin: Cours de calcul de barrage, p. 229, Eyrolles (1948)
- 34) A. Bourgin: (Trans. by F. F. Fergusson): The Design of Dams, p. 294, Pitman (1953)
- 35) H. M. Westergaard: Report on Arch Dam Investigation, Vol. 1, p. 231, Proc. ASCE, May, 1928
- 36) F. Tölke: Talsperren, Handbibliothek für Bauingenieure, Wasserkraftanlagen, Hefte 2, Teil 1, S. 484, Springer (1938)
- 37) J. Lombardi: Les barrages en voute mince, Chap. II, III et V, Dunod (1955)
- 38) M. Harsog: Beitrag zur Nährungsberechnung doppelt gekrümmter Staumauern, Bautechnik, 34 Jg., S. 298 (1957)
- 39) 文献 22)
- 40) U. S. Bureau of Reclamation: Trial Load Method of Analysing Arch Dams, Boulder Canyon Project Final Reports, Part V, Bull. 1 (1941)
- 41) 文献 22), Part II, p. 338
- 42) 九州電力株式会社土木部: 上桂ダム-4 ダムの計画と施工, p. 49, 丸善 (1957)
- 43) 文献 22), Part II, p. 335
- 44) D. M. C. Allen, L. Chitty, A. J. S. Pippard and R. T. Severn: The Experimental and Mathematical Analysis of Arch Dams, with Special Reference to Dokan, Proc. Institution of Civil Engineers, Part I, Vol. 5, p. 198 (1956)
- 45) L. Chitty and A. J. S. Pippard: The Determination of the Stresses in an Arch Dam from a Rubber Model, Proc. Institution of Civil Engineers, Part I, Vol. 5, p. 259 (1956)
- 46) R. Prisçu et M. Constantinescu: Le calcul des barrage-voutes par la Méthode des reseaux, Sixième Congrès des Grands Barrages, C. 12 (1958)

第 3 章

- 1) U. S. Bureau of Reclamation: Model Tests of Arch and Cantilever Elements, Boulder Canyon Project Final Reports, Part V, Bull. 6, p. 83 (1940)
- 2) J. H. A. Brahtz: The Stress Function and Photoelasticity Applied to Dams, Trans. ASCE, Vol. 101, p. 1256 (1936)
- 3) 冊羽 義次: 埋体内部応力の算定について, 土木学会誌, 37巻, p. 293 (1952)
- 4) 冊羽 義次: 堰堤基本三角形断面内の応力状態に関する光弾性学的研究, 土木学会誌, 39巻, p. 146 (1954)
- 5) 冊羽 義次: 拱壁堰堤断面に関する二つの考察, 京大工学研究所彙報, 第2輯, p. 24 (1952)
- 6) 冊羽 義次, 林口 桃万: 堰堤基本三角形断面内の応力状態に関する光弾性学的研究, 土木学会誌, 39巻, p. 146 (1954)
- 7) H. B. Phillips and C. N. Zanger: Stress around Gallery Determined by Photoelastic Interferometer, U. S. Bureau of Reclamation (Apr., 1952)
- 8) 色部 誠, 林 正夫, 青木 清, 山田 桂一: 重力ダムへの新しい打設方式に関する基礎的研究, 電力技術研究所所報, Vol. 5, No. 3/4, p. 23 (1955)
- 9) 森 忠次: 各種の荷重による重力ダムの光弾性解析, 土木学会論議, 第39号, p. 38 (1956)
- 10) 河田 章三, 辻 一郎: 応力凍結法の研究(第3報), 科学研究所報告, 第29輯, p. 1 (1953)
- 11) 伊藤 勝孝: 若干の新しい凍結用光弾性材料とその利用について, 科学研究所報告, 第30輯, p. 233 (1954)
- 12) 河田 章三: 三次元及び二次元光弾性応力解析における接着実験法について, 科学研究所報告, 第30輯, p. 271 (1954)
- 13) 平松 良雄, 冊羽 義次: 高速度遠心力光弾性実験について, 京大工学研究所彙報, 第3輯, p. 30 (1953)
- 14) 冊羽 義次: 高速度遠心力光弾性実験について, 土木学会誌, 39巻, p. 192 (1954)
- 15) B. F. Jakobsen: Stresses in Gravity Dams by Principle of Least Work, Trans. ASCE, Vol. 96, p. 489 (1932)

- 16) F. Vogt: 文献15)の Discussion, p.548
- 17) 畑野 正: 堰堤コンクリートの強度規準並びに剪断強度に就て(I), 土木学会論文集, 第4号, p.117 (1949)
- 18) 畑野 正: 堰堤コンクリートの強度規準並びに剪断強度について(其の2), 土木学会論文集, 第6号, p.1 (1951)
- 19) 畑野 正: コンクリート・ダム の滑動安定度について, 土木学会論文集, 第6号, p.6 (1951)
- 20) 垣谷 正道: 7-4ダムの応力に関する研究, 電研月報, Vol. 3, No. 2, p.22 (1950)
- 21) G. Oberti and B. Bonfioli: Research on the Stresses of Arch Dam Rings, Second Congress on Large Dams, C. 20 (Vol. 5, p. 17), (1936)
- 22) 文献1), p.153
- 23) U. S. Bureau of Reclamation: Reclamation Manual, Treatise on Dams, Chap. 10 Arch Dams, Part II, p. 530 (1950)
- 24) A. Stucky: Quelques problèmes relatifs aux fondations des grands barrages-réservoirs—Barrage du Mauvoisin et de Grande Dixence, École polytechnique de l'Univ. de Lausanne, Publication No. 32 (1954)
- 25) Y. Niwa and C. Mori: Comparison Between the Stresses of Gravity Dams Obtained by the Three-Dimensional Photoelastic Experiment and the Trial Load Analysis, Tech. Reports of the Engineering Research Institute, Kyoto Univ., Vol. 8, No. 7 (Report No. 47), (1958)
- 26) Y. Niwa and C. Mori: Comparison Between the Stresses of Gravity Dams Obtained by the Three-Dimensional Photoelastic Experiment and the Trial Load Method of Analysis, Sixième Congrès des Grands Barrages, C. 3 (1958)
- 27) F. Vogt: Über die Berechnung der Fundamentdeformation, Det Norske Videnskapsakademie, Oslo (1925)
- 28) 文献16)
- 29) 文献16)
- 30) Y. Niwa and C. Mori: Three-Dimensional Photoelastic Stress Analysis of a Gravity Dam, Proc. 6th Japan National Congress for Appl. Mech. (1956), p. 121 (1957)

- 31) U. S. Bureau of Reclamation: Model Test of Boulder Dam, Boulder Canyon Project Final Reports, Part V, Bull. 3 (1940)
- 32) A. Nizery, G. Remenieras et N. Beaujoint: Étude sur modèle réduit des contraintes dans les barrages, Annales des Ponts et Chaussées, Année 123, p. 395 (1953)
- 33) The Arch Dam Committee, Tokyo Electric Power Company, Inc.: Experimental Researches of Arch Dam, Cinquième Congrès des Grands Barrages, C. 12 (Vol. 4, p. 795), (1955)
- 34) 東京電力アーチダム委員会: アーチダム実験報告, p. 103, 東京電力アーチダム委員会(1955)
- 35) M. Rocha and J. L. Serafim: Rupture Studies on Arch Dams by Means of Models, Water Power, Vol. 11, p. 92/145 (1959)
- 36) 近藤 正雄, 鈴木 喜久: 佐々並川アーチダム工事について(II), 発電水力, No. 38, p. 35 (1959)
- 37) E. Probst: Deformationsmessungen an einer 65 m Hohen Gewichtstaumauern, Second Congress on Large Dams, C. 25 (Vol. 5, p. 447), (1938)
- 38) 文献32)
- 39) M. Rocha: Determination of Thermal Stresses in Arch Dams by Means of Models, Sixième Congrès des Grands Barrages, C. 17 (1958)

第 4 章

- 1) C. H. Paul and A. B. Mayhew: Temperature Changes in Mass Concrete, Proc. ASCE, Vol. 41, p. 789 (1915)
- 2) L. R. Jorgensen: Improving Arch Action in Arch Dams, Trans. ASCE, Vol. 33, p. 316 (1919-20)
- 3) F. A. Noelsli: Arch Dam Temperature Change and Deflection Measurements, E. N. R., Vol. 89, p. 920 (1922)
- 4) J. Chapelle: L'auscultation thermique des barrages par thermo-couples, RILEM (1955), No. 2, Thème 1a
- 5) E. C. Eaton: Electric-Resistance Strain Gage Measures Stresses in Concrete,

- E. N. R., Vol. 107, p. 615 (1931)
- 6) R. W. Carlson: Five Years Improvement of the Electric-wire Strainmeter, E. N. R., Vol. 114, p. 696 (1935)
- 7) 丹羽義次, 森 忠次: カールソン式歪計について, 日本材料試験協会第2期総会講演会にて発表, 1953年5月
- 8) 丹羽義次, 森 忠次: カールソン式歪計による応力測定について, 関西工学会講演会にて発表, 1953年10月
- 9) 丹羽義次, 畑中元弘, 森 忠次: 7-4ダムの振動時における応力状態について, 東大工学研究所要報, 第7輯, p. 32 (1955)
- 10) 横尾義實, 丹羽義次, 森 忠次: ビルディングの潜函工事における応力測定, 土木学会誌, 40巻, p. 520 (1955)
- 11) J. M. Raphael: Determination of Stress from Measurements in Concrete Dams, Third Congress on Large Dams, Question No. 9, R. 54 (Vol. 1, p. 629), (1948)
- 12) K. Jones: Calculation of Stress from Strain in Concrete, U. S. Bureau of Reclamation, Tech. Memorandum 653 (1955)
- 13) R. W. Carlson and D. Pirtz: Development of a Device for the Direct Measurement of Compressive Stress, Jour. ACI, Vol. 24, p. 201 (1952)
- 14) A. U. Huggenberger: Talsperren-Messtechnik, Springer (1951)
- 15) 大ダム会議 日本国内委員会耐震分科会: 日本におけるダムの耐震設計について, 大ダム, 別冊 No. 1, p. 17 (1960)
- 16) Japanese National Committee on Large Dams: Present Status of Measurement of Structural Behavior of Dams in Japan, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 21, R. 25 (1958)
- 17) W. T. Lockman: 15-Year Report — Structural Behavior of Grand Coulee Dam, U. S. Bureau of Reclamation, Tech. Memorandum 652 (1955)
- 18) Service Construction Aménagements Hydroélectriques du Groupe Edison-Milan: Détermination des déformations d'un élément de barrage-poids allégé provoquées par la seule charge hydrostatique, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 21, R. 61 (1958)
- 19) 文献 (6)

- 20) H. Juillard: Observations des contraintes et déformations dans les barrages, leurs fondations et leurs appuis, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 21, R. 106 (1958)
- 21) J. M. Raphael: The Development of Stresses in Shasta Dam, Proc. ASCE, Vol. 78, Structural Div., Sep. No. 117 (1952)
- 22) 文献 11)
- 23) 東京電力ア-4ダム委員会: ア-4ダム実験報告, p. 97, 東京電力ア-4ダム委員会 (1955)
- 24) G. Oberti, E. Fumagalli et E. Lauletta: Sur la comparaison entre les déformations enregistrées dans les barrages et les résultats des essais sur modèle, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 21, R. 45 (1958)
- 25) M. Rocha, J. L. Serafim and A. F. de Silveira: Arch Dams: Design and Observation of Arch Dams in Portugal, Proc. ASCE, Jour. Power Div., Vol. 82, Paper 997 (1956)
- 26) E. Hirschfeld: Temperaturverteilung im Beton, S. 10, Springer (1948)
- 27) Collection of Data on the Thermal Properties of Concrete for Dams, Sixième Congrès des Grands Barrages, C. 24 (1958)
- 28) R. W. Carlson: A Simple Method for the Computation of Temperatures in Concrete Structures, Jour. ACI, Proc. Vol. 34, p. 89 (1937)
- 29) R. Kuhn: Temperatur- und Dehnungsmessungen an einer Wehrpfeller, Beton und Stahlbetonbau, 47 Jg. Heft 9/10 (1952)
- 30) 文献 11)
- 31) 和久英雄, 大沢 勲, 高橋 英夫: 井川ホロー・グラビティ・ダムの工事計画とその実績について—(Ⅲ)—, 発電水力, No. 35, p. 11 (1958)
- 32) T. V. A.: Measurements of the Structural Behavior at Fontana Dam, T. V. A. Tech. Monograph No. 69, p. 196 (1953)
- 33) T. V. A.: Measurements of the Structural Behavior of Norris and Hiwassee Dams, T. V. A. Tech. Monograph No. 67, p. 244 (1950)
- 34) 文献 29)
- 35) 文献 33), p. 319

- 36) 文献 33), p. 242/340
- 37) 文献 32), p. 235
- 38) 文献 29).
- 39) M. Rocha, J. L. Serafim and A. F. de Sileira: A Method of Quantitative Interpretation of the Results Obtained in the Observation of Dams, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 21, R. 36 (1958)
- 40) N. Tashiro and H. Kimishima: A Review on Measured Results and Computed Estimations in the Analysis of Kamishiiba Arch Dam, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 21, R. 24 (1958)
- 41) 文献 33), p. 75
- 42) 文献 37), p. 63
- 43) W. A. Trimble: The average Temperature Rise of the Surface of a Concrete Dam Due to Solar Radiation, U. S. Bureau of Reclamation (1954)
- 44) 田島正彦, 元永正紀: 綾北ダム施工に関する二, 三の問題, 土木学会誌, 45巻, 10号, p. 1 (1960)
- 45) 一ノ瀬明彦: 綾北ダムの模型構造実験, 発電水力, No. 51, p. 17 (1961)
- 46) W. F. Emmons, O. Lavik and P. L. Hornby: Control of Cracking in TVA Concrete Gravity Dams, Proc. ASCE, Vol. 86, No. PO 1, p. 11 (1960)
- 47) 九州電力株式会社土木部: 上桂ダム計画と施工, p. 78, 電書 (1957)
- 48) 建設省五十里ダム工事事務所: 五十里ダム工事報告書, p. 310, 建設省五十里ダム工事事務所 (1957)

第 II 編

第 1 章

- 1) 倉西正嗣: 弾性学, p. 632, 日本機械学会 (1949)
- 2) K. Weindlhofer: Evaluation of Residual Stresses, p. 3, McGraw-Hill (1948)
- 3) F. と之江, 文献 1), p. 635
- 4) B. A. Boley and J. H. Weiner: Theory of Thermal Stresses, p. 60, John Wiley & Sons (1960)
- 5) H. Parkus: Instationäre Wärmespannungen, S. 1, Springer (1959)

- 6) E. Melan und H. Parkus: Wärmespannungen infolge stationäre Temperaturfelder, S. 7, Springer (1953)
- 7) S. Timoshenko and J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 2nd Ed., p. 433, McGraw-Hill (1951)
- 8) J. N. Goodier: On the Integration of the Thermo-Elastic Equations, Philos. Mag. Series VII, Vol. 23, p. 1017 (1937)
- 9) N. I. Muskhelishvili: Sur l'équilibre des corps élastiques soumis à l'action de la chaleur, Bull. de l'Univ. Tiflis, No. 3 (1923)
- 10) M. A. Biot: A General Property of Two Dimensional Thermal Stress Distribution. Philos. Mag. Series VII, Vol. 19, p. 540 (1935)
- 11) E. Melan: Wärme spannungen in Scheiben, Österr. Ingenieur-Archiv, Bd. 4, S. 153 (1950)
- 12) E. Melan: Temperaturverteilungen ohne Wärmespannungen, Österr. Ingenieur-Archiv, Bd. 6, S. 1 (1951)
- 13) 文献 5), S. 9
- 14) 文献 7), p. 427
- 15) N. I. Muskhelishvili (Trans. by J. R. M. Radok): Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, p. 157, P. Noordhoff (1953)
- 16) 文献 7), p. 401
- 17) B. E. Gatewood: Thermal Stresses, p. 9, McGraw-Hill (1957)

第 2 章

- 1) S. Timoshenko and J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 2nd Ed., p. 47, McGraw-Hill (1951)
- 2) K. Girkmann: Flächentragwerke, S. 77, Springer (1948)
- 3) 金西正嗣: 弾性学, p. 632, 日本機械学会 (1949)
- 4) J. Fadle: Die Selbstspannungs-Eigenfunktionen der Quadratischen Scheibe, Ingenieur-Archiv, Bd. 11, S. 125 (1941)
- 5) I. S. Sokolnikoff: Mathematical Theory of Elasticity, p. 315, McGraw-Hill (1946)

- 6) E. Reissner: Analysis of Shear Lag in Box Beams, by the Principle of Minimum Potential Energy, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 4, n: 268 (1946)
- 7) F. B. Hilderbrand and E. Reissner: Distribution of Stress in Built-In Beams of Narrow Rectangular Cross Section, Jour. Applied Mechanics, Vol. 9, n. A-108 (1942)
- 8) G. Horvay: The End Problem of Rectangular Strip, Jour. Applied Mechanics, Vol. 20, p. 87 (1953)
- 9) 文献 8)
- 10) G. Horvay and J. S. Born: Tables of Self-Equilibrating Functions, Jour. Mathematics and Physics, Vol. 33, p. 360 (1954)
- 11) 文献 3), p. 68
- 12) 文献 8)
- 13) 文献 5), p. 4/2
- 14) 林 毅, 村外志夫: 变分法, 応用数学講座, 第13巻, p. 14 (1958)
- 15) 文献 8)

第 3 章

- 1) H. S. Carslaw and J. C. Jeager: Conduction of Heat in Solids, 2nd Ed., p. 64, Clarendon (1959)
- 2) Gröber, Erk und Grigull: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, S. 80, Springer (1955)
- 3) 川下 研介: 熱伝導論, p. 94, 河出書房 (1941)
- 4) U. S. Bureau of Reclamation: Cooling of Concrete Dams, Boulder Canyon Project Final Reports, Part VII, Bull. 3, p. 50 (1949)
- 5) 文献 4), p. 42
- 6) K. Hirschfeld: Die Temperaturverteilung im Beton, Springer (1948)
- 7) 文献 1), p. 97
- 8) 文献 4), p. 33
- 9) L. H. Adams and R. M. Waxler: Temperature-Induced Stresses in Solids of

- Elementary Shape, National Bureau of Standards Monograph 2, U. S. Department of Commerce (June 21, 1960)
- 10) H. Jachmann: Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper, Springer (1932)
 - 11) 文献 1), p. 166
 - 12) E. Schmidt: Über die Anwendung der Differenzenrechnung auf thermische Anheiz- und Abkühlungsprobleme, Beitrag zur technischen Mechanik und technischen Physik (Föppl-Festschrift), Springer (1924)
 - 13) 文献 1), p. 131
 - 14) 文献 6), p. 16
 - 15) R. W. Carlson: A Simple Method for the Computation of Temperatures in Concrete Structures, Jour. ACI, Proc. Vol. 34, p. 89 (1937)
 - 16) 藤本武助, 佐藤 俊: 伝熱工学概論, p. 9, 共立出版 (1956)
 - 17) 文献 6), p. 56
 - 18) J. A. Rhodes: Discussion of the paper "Surface Cooling of Mass Concrete to Prevent Cracking, Jour. ACI, Vol. 31, p. 937 (1960)

第 4 章

- 1) H. S. Carslaw and J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, 2nd Ed., p. 199, Clarendon (1959)
- 2) U. S. Bureau of Reclamation: Cooling of Concrete Dams, Boulder Canyon Project Final Reports, Part VII, Bull. 3, p. 72 (1949)
- 3) 文献 2), p. 73
- 4) S. Timoshenko and J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 2nd Ed., p. 407, McGraw-Hill (1951)
- 5) E. Melan und H. Parkus: Wärmespannungen infolge stationäre Temperaturfelder, S. 54, Springer (1953)
- 6) L. H. Adams and R. M. Waxler: Temperatur-Induced Stresses in Solids of Elementary Shape, National Bureau of Standards Monograph 2, U. S. Department of Commerce (June 21, 1960)

- 7) 倉西正昂: 弾性学, p. 640, 日本機械学会 (1949)
- 8) 文献 4), p. 424
- 9) 文献 7), p. 83
- 10) 文献 4), p. 484
- 11) 文献 1), p. 204
- 12) K. Hirschfeld: Die Temperaturverteilung im Beton, Springer (1948)
- 13) 電力技術研究所工2部: 大森川ダム ダイヤモンドヘッドの応力解析, 埋設計器測定値の解析, セミナール, コンクリートはらひに修理用充填材を用いた実験報告, 電力中央研究所技術研究所報告書, 工研5701/5706 (1957)
- 14) A. Stucky et M. -H. Derron: Problèmes thermiques posés par la construction des barrages-réservoirs, École polytechnique de l'Univ. de Lausanne, Publication No. 38, p. 70 (1957)

第 5 章

- 1) C. Mori: Approximate Solution of Thermal Stresses in Rectangular Plates Fixed at an Edge, Tech. Reports of the Engineering Research Institute, Kyoto Univ., Vol. 11, No. 8 (Report No. 85), (1961)

第 6 章

- 1) G. Mori: Analysis of Thermal Stresses in Rectangular Plates Restrained at an Edge, Proc. 9th Japan National Congress for Applied Mechanics (1959), p. 61 (1960)
- 2) G. Horvay: Discussion of the paper "The End Problem of Rectangular Strips," Jour. Applied Mechanics, Vol. 20, p. 579 (1953)
- 3) C. Mori and S. Kobayashi: Approximate Solution of Thermal Stresses in Rectangular Plates Restrained at an Edge, Tech. Reports of the Engineering Research Institute (to be Published)
- 4) G. Horvay: Thermal Stresses in Rectangular Strips, Proc. 2nd U. S. National Congress of Applied Mechanics, p. 313 (1954)

第 7 章

- 1) 森 忠次: 熱応力の光弾性実験法に関する研究, 工学会論文集, 466号, p. 21 (1960)

- 2) M. A. Biot: Distributed Gravity and Temperature Loading in Two-Dimensional Elasticity Replaced by Boundary Pressure and Dislocations, Trans. ASME, Vol. 57, p. A-41 (1935)
- 3) J. Taylor: Experimental Methods in High-Temperature Structural Research, Ed. by N. J. Hoff; High Temperature Effects in Aircraft Structures, p. 313, Pergamon (1958)
- 4) Research in Portugal, Water Power, Vol. 9, p. 321 (1957)
- 5) M. Rocha: Determination of Thermal Stresses in Arch Dams by Means of Models, Sixième Congrès des Grands Barrages, C. 17 (1958)
- 6) K. A. Parsons: A Photoelastic Investigation of Quenching Stresses in Glass, Proc. Soc. Exp. Stress Analysis, Vol. 10, No. 1, p. 1 (1952)
- 7) 辻 二郎, 河田章三: 老弾性実験法 (下), 工業物理学講座 I-1, p. 139/付録 p. 15, 日刊工業新聞社 (1956)
- 8) 黒田 正夫: 弾撃破壊の研究, 科学研究所報告, 第29輯, p. 320 (1953)
- 9) A. J. Durelli and G. H. Tasso: Determination of Thermal Stresses in Three-Ply Laminates, Jour. Applied Mechanics, Vol. 22, p. 190 (1955)
- 10) G. Gerard and A. C. Gilbert: Photothermoelasticity: An Exploratory Study, Jour. Applied Mechanics, Vol. 24, p. 355 (1957)
- 11) H. Trampusch and G. Gerard: Correlation of Theoretical and Photothermoelastic Results on Thermal Stresses in Idealized Wing Structures, Jour. Applied Mechanics, Vol. 27, p. 79 (1960)
- 12) 川本 昇万: マンブな構造物の収縮応力に関する老弾性学的基礎研究, 土木学会論文集, 第61号, p. 29 (1959)
- 13) 河田章三, 辻 二郎: 応力凍結法の研究 (第3報) — 凍結用老弾性材料としてのエポキシ及びフェノール樹脂について, 科学研究所報告, 第29輯, p. 1 (1953)
- 14) H. Trampusch and G. Gerard: Physical Properties of Plastics for Photothermoelastic Investigations, Jour. Applied Mechanics, Vol. 25, p. 525 (1958)
- 15) 文献 9)
- 16) 文献 10)
- 17) 文献 13)

第 8 章

- 1) B. F. Jakobsen: Stresses in Gravity Dams by Principle of Least Work, Trans. ASCE, Vol. 96, p. 489 (1932)
- 2) F. Vogt: 文献 1) の Discussion, p. 548
- 3) J. H. A. Brahtz: The Stress Function and Photoelasticity Applied to Dams, Trans. ASCE, Vol. 101, p. 1256 (1936)
- 4) I. K. Silverman: Approximate Stress Functions for Triangular Wedges, Jour. Applied Mechanics, Vol. 22, p. 123 (1955)
- 5) M. M. Frocht: Photoelasticity, Vol. 1, p. 252, McGraw-Hill (1941)
- 6) 応力測定技術研究会編: 応力測定法, p. 549, 朝倉 (1955)
- 7) L. Föppl und E. Mönch: Praktische Spannungsoptik, S. 53, Springer (1959)

第 9 章

- 1) G. Horvay: Thermal Stresses in Rectangular Strips, Proc. 2nd U. S. National Congress of Applied Mechanics, p. 313 (1954)
- 2) O. C. Zienkiewicz: The Computation of Shrinkage and Thermal Stresses in Massive Structures, Proc. Institution of Civil Engineers, Part 1, Vol. 4, p. 88 (1955)
- 3) H. G. Smith: Photo-Elastic Determination of Shrinkage Stresses, Trans. ASCE, Vol. 101, p. 927 (1936)
- 4) 川本 勝万: マッシュ"な構造物の収縮応力に関する光弾性学的基础研究. 土木学会論文集, オ61号, p. 29 (1959)
- 5) C. N. Zanger and J. H. A. Brahtz: Thermal Stresses in Concrete Blocks Subjected to Foundation Restraint, U. S. Bureau of Reclamation Tech. Memorandum No. 600 (1940)
- 6) R. E. Copeland: Shrinkage and Temperature Stresses in Masonry, Jour. ACI, Vol. 28, p. 769 (1957)
- 7) 文献 6)
- 8) A. V. Bielov: Détermination des contraintes thermiques dans les massifs en

béton, compte tenu de la plasticité de celui-ci, Cinquième Congrès des Grands Barrages, C. 38 (Vol. 4, P. 1367), (1955)

第 Ⅲ 編

第 1 章

- 1) 大分会議、日本国内委員会：ダム設計基準，昭和32年制定
- 2) 関西電力株式会社：丸山発電所工事誌 土木編，p. 204，関西電力株式会社 (1956)
- 3) U. S. Bureau of Reclamation (近藤泰夫訳)：コンクリート便覧，分5版，p. 20，国民科学社 (1950)
- 4) U. S. Bureau of Reclamation: Thermal Properties of Concrete, Boulder Canyon Project Final Reports, Part VII, Bull. 1, p. 33 (1940)
- 5) W. Ihlenburg: Die Wärmedehnung von Beton, Der Bauingenieur, Bd. 26, S. 339 (1951)
- 6) B. Mather: Discussion of the paper "Control of Cracking in Concrete Gravity Dams," Proc. ASCE, Vol. 86, No. PO 2, p. 57 (1960)
- 7) S. J. Gallan: Thermal Expansion of Aggregates and Concrete Durability, Jour. ACI, Vol. 23, p. 485 (1952)
- 8) S. Walker, D. L. Bloem and W. G. Mullen: Effect of Temperature Changes on Concrete as Influenced by Aggregates, Jour. ACI, Vol. 23, p. 661 (1952)
- 9) 本間 栄五郎：加熱冷却たぐいに乾燥急凍法に対する各種コンクリートの耐入性に関する研究，セメント技術年報 XIII, p. 282 (1959)
- 10) 文献 4), p. 13
- 11) International Sub-Committee on Concrete for Large Dams: Collection of Data on the Thermal Properties of Concrete for Dams, Sixième Congrès des Grands Barrages, C. 24 (1958)
- 12) 文献 4)
- 13) 日本セメント技術協会：水和熱測定試験の精度並に本邦市販各種セメントの水和熱に関する報告 (Mag, 1954)
- 14) 国際大分会議日本国内委員会；コンクリート分科会高炉セメント小委員会：高炉セメント調査報告，大分，別冊第1号，p. 1 (1960)

- 15) 有泉昌, 小松原正夫, 安沢俊=: ガムに使用したセメント諸性質の変動状態について
水和熱と圧縮強さの関係について, セメント技術年報 XI, p. 118 (1957)
- 16) 有泉昌, 安沢俊=: ガムに使用した高炉セメントの諸性質についてその統一性
について, セメント技術年報 XII, p. 174 (1958)
- 17) 尾島博次: ガム コンクリートのクリープの基礎的研究とその応用結果について,
土木学会論文集, 第72号, p. 23 (1961)
- 18) 周田 清, 西村新蔵, 富沢 年直: 高炉セメントの諸特性特にクリープについて, セメ
ント技術年報 XIV, p. 191 (1960)
- 19) J. L. Savage: Special Cements for Mass Concrete, U. S. Bureau of Reclama-
tion, p. 91 (1936)
- 20) R. E. Davis: Cement and Concrete Investigations for Bonneville Dam, Final
Report to Corps of Engineers, U. S. Army, Second Portland District, p. 115
(1938)
- 21) 高野 俊介: 打込み温度がマスコンクリートの強度に及ぼす影響の研究, 土木学会
論文集, 第26号 (1955)
- 22) 岡方正胤, 三浦一郎, 高野俊介, 杉本六郎: 養生中の温度および湿度が, フライアッシュを用いたコ
ンクリートの強度に及ぼす影響, 土木学会論文集, 第71号・別冊(4-3), p. 1 (1960)
- 23) 左田孝男, 山崎寛治: 養生中の温度および湿度が, フライアッシュを用いたコンクリートの強度
に及ぼす影響, 土木学会論文集, 第71号・別冊(4-3), p. 11 (1960)
- 24) 河原友純: 養生中の温度および湿度が, フライアッシュを用いたコンクリートの強度
に及ぼす影響, 土木学会論文集, 第71号・別冊(4-3), p. 17 (1960)
- 25) 丸安隆和, 水野 俊一, 小林一輔: 高炉セメントの使用方法に関する研究, 土木
学会論文集, 第65号・別冊(3-1), (1959)
- 26) 川崎 精一: 大野ガムのコンクリート, セメント・コンクリート, No. 163, p. 2 (Sep. 1960)
- 27) W. Lerch: Plastic Shrinkage, Jour. ACI, Vol. 28, p. 797 (1957)
- 28) H. E. Davis: Autogeneous Volume Changes of Concrete, Proc. ASTM, Vol. 40,
p. 1103 (1940)
- 29) T. V. A.: Measurements of the Structural Behavior of Norris and Hiwassee
Dams, T. V. A. Tech. Monograph No. 67, p. 410 (1950)

- 30) P. E. Blanks: Concrete Deterioration at Parker Dam, Engineering News Records, Vol. 126, p. 462 (1941)
- 31) H. S. Meissner: Cracking in Concrete Due to Expansive Reaction Between Aggregate and High-Alkali Cement as Evidenced in Parker Dam, Jour. ACI, Proc. Vol. 37, p. 549 (1941)
- 32) G. L. Kalouske, R. J. O'Heir, K. L. Zeims and E. L. Saxer: Relation of Shrinkage to Moisture Content in Concrete Block, Jour. ACI, Vol. 25, p. 225 (1953)
- 33) R. W. Carlson: Drying Shrinkage of Large Concrete Members, Jour. ACI, Proc. Vol. 33, p. 327 (1937)
- 34) G. Pickett: Shrinkage Stresses in Concrete, Vol. 17, p. 165/361 (1946)

第 2 章

- 1) 大仏会議日本国内委員会: ダム設計基準, 第1章(1), 昭和32年制定
- 2) V. Jones: Foundation Bearing Tests at Davis Dam (Second Series), U. S. Bureau of Reclamation, Eng. Lab. Branch, Structural Lab. Report No. SP 18 A (1951)
- 3) A. V. Biélov: Détermination des contraintes thermiques dans les massifs en béton, compte tenu de la plasticité de celui-ci, Cinquième Congrès des Grands Barrages, C. 38 (Vol. 4, p. 1367), (1955)
- 4) R. W. Carlson: Temperature and Stresses in Mass Concrete, Jour. ACI, Proc. Vol. 34, p. 497 (1938)
- 5) 文献 4)
- 6) Service Construction Aménagements Hydroélectriques du Groupe Edison-Milan: Les contraintes thermiques dans le Barrage de Morasco, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 21, R. 71 (1958)
- 7) W. T. Lockman: 15-Year Report—Structural Behavior of Grand Coulee Dam, U. S. Bureau of Reclamation Tech. Memorandum 652 (1955)
- 8) 文献 3)
- 9) R. E. Copeland: Shrinkage and Temperature Stresses in Masonry, Jour. ACI,

- Vol. 28, p. 769 (1957)
- 10) H. Press: Risse an Schwergewichtstaumauern und ihre Verhinderung, Der Bauingenieur, 24 Jg., S. 44 (1949)
 - 11) 文献 10)
 - 12) Y. Niwa and C. Mori: On the Stresses in the Diamond-Heads of Hollow-Gravity Dams, Septième Congrès des Grands Barrages, C. 1 (1961)
 - 13) U. S. Bureau of Reclamation: Reclamation Manual, Treatise on Dams, Chap. 11 Buttress Dams (1950)
 - 14) A. W. Hendry: Photoelastic Experiments on the Stress Distribution in a Diamond-Head Buttress Dam, Proc. Institution of Civil Engineers, Part I, Vol. 3, p. 370 (1954)
 - 15) H. G. Keefe: Investigation of Stress Distribution in a Diamond Head Buttress Dam by Photoelastic Model Tests, Cinquième Congrès des Grands Barrages, C. 14 (Vol. 4, p. 875), (1955)
 - 16) O. Holden: High-Lift Construction Methods for Mass Concrete, Proc. ASCE, Vol. 85, No. PO 3, p. 1 (1959)
 - 17) G. Mitchell and R. B. Young: Winter Concreting Can be Economical, Civil Engineering, Vol. 20, p. 511 (1950)
 - 18) I. Babuška and L. Mejzlik: Calculation and Measurement of Thermal Stresses in Gravity Dams, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 21, R. 59 (1958)
 - 19) I. Babuška und L. Mejzlik: Über die Anwendungsmöglichkeit hoher Arbeitsschichten beim Bau einer Schwergewichtstaumauern, Acta Technica, 3 Jg., S. 353 (1958)
 - 20) R. W. Carlson and D. P. Thayer: Surface Cooling of Mass Concrete to Prevent Cracking, Jour. ACI, Vol. 29, p. 107 (1959)
 - 21) 電力技術研究所工二部: 大森川ダム ダイヤモンドヘッドの応力解析, 埋設計量測定値の解析, セメント, コンクリート, 材料に修理用充てん材に用いた実験報告, 電力中央研究所技術研究所報告書, 工構 5901/工構 5906 (1959)

- 22) D. L. Houghton: Field Study of Interior Temperatures in Concrete, Proc. ASCE, Vol. 85, No. PO 5, p. 21 (1959)
- 23) W. F. Emons, O. Lavik and P. L. Hornby: Control of Cracking in TVA Concrete Gravity Dams, Proc. ASCE, Vol. 86, No. PO 1, p. 11 (1960)
- 24) R. R. Clark: Mass Concrete Control in Detroit Dam, Jour. ACI, Vol. 28, p. 1145 (1957)
- 25) R. R. Clark and H. E. Brown: Cool Concrete at Detroit Dam, Engineering News Records, Vol. 145, No. 25/26 (Dec. 21/28, 1950)
- 26) R. R. Clark: Mass Concrete Control in Hydraulic Structures as Related to the Detroit Dam, Cinquième Congrès des Grands Barrages, C. 9 (Vol. 4, p. 739), (1955)
- 27) W. R. Waugh and J. A. Rhodes: Control of Cracking in Concrete Gravity Dams, Proc. ASCE, Vol. 85, No. PO 5, p. 1 (1959)
- 28) C. L. Townsend: U. S. B. R. Practices for Control of Cracking in Arch Dams, Proc. ASCE, Vol. 85, No. PO 4, p. 1 (1959)

第 3 章

- 1) Grande Dixence S. A.: La construction du Barrage de la Grande Dixence par surélévations partielles successives, Cinquième Congrès des Grands Barrages, C. 34 (Vol. 4, p. 1265), (1955)
- 2) Grande Dixence S. A.: Aménagement hydro-electrique de la Grande Dixence, Wasser und Energie Wirtschaft, 47 Jg. Nrs. 5/6/7 (1955)
- 3) A. Stucky: Barrages du Mauvoisin et de la Grande Dixence, École polytechnique de l'Univ. de Lausanne, Publication No. 32 (1954)
- 4) J. Toran: General Report—Heightening of Existing Dams Including Methods of Constructing New Dams in Successive Stages, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 20, G. R.-E (1958)
- 5) 垣谷正道: 嵩上げ堰堤の安定計算について, 日本放送電, 工事/202号 (1966)
- 6) 丹羽義次, 阪口義明, 森 忠次, 飯沼正男: 嵯峨ダム嵩上げ工事の設計, 発電水力(投稿中)

- 7) M. Kondo and M. Kakitani: Plan of Heightening Ordinari Dam, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 21, R. 23 (1958)
- 8) 近藤正雄: 王泊y4a第上げ計画に關し, 発電水力, No. 25/28 (1956/57)
- 9) 文献 4) および 5)
- 10) U. S. Bureau of Reclamation: Thermal Properties of Concrete, Boulder Canyon Project Final Reports, Part VII, Bull. 1, p. 33 (1940)
- 11) U. S. Bureau of Reclamation: Cooling of Concrete Dams, Boulder Canyon Project Final Reports, Part VII, Bull. 3, p. 95 (1949)
- 12) E. Schmidt: Über die Anwendung der Differenzenrechnung auf technische Wärme- und Abkühlungsprobleme, Beiträge technischen Mechanik und technischen Physik (Föppl-Festschrift), Springer (1924)
- 13) A. D. Ross and T. W. Bray: The Prediction of Temperatures in Mass Concrete by Numerical Computation, Magazine of Concrete Research, No. 1, p. 9 (Jan. 1949)
- 14) K. W. Carlson: A Simple Method for the Computation of Temperatures in Concrete Structures, Jour. ACI, Proc. Vol. 34, p. 89 (1937)
- 15) R. E. Grover: Calculation of Temperature Distribution in a Succession of Lift Due to Release of Chemical Heat, Jour. ACI, Proc. Vol. 34, p. 105 (1937)
- 16) T. V. A.: Measurements of Structural Behavior at Fontana Dam, T. V. A. Tech. Monograph No. 69 (1953)
- 17) Service Construction Aménagements Hydroélectriques du Groupe Balaton-Milan: Les contraintes thermiques dans le Barrage de Morasco, Sixième Congrès des Grands Barrages, Question No. 21, R. 71 (1958)
- 18) V. P. Jensen: Analysis of Skew Slabs, Univ. of Illinois, Engineering Experiment Station, Bull. Series No. 332, p. 22 (1941)
- 19) O. C. Zienkiewicz: The Computation of Shrinkage and Thermal Stresses in Massive Structures, Proc. Institution of Civil Engineers, Part I, Vol. 4, p. 88 (1955)
- 20) 國分正作: 新旧コンクリート打設目に關する研究, 土木学会論文集, 第5号 (1950)

第 4 章

- 1). 石井文雄, 森 忠次: 周辺が固結支持のときのアーチダムに於ける応力状態について, 発電水力, No. 51, p. 27 (1961)
- 2) F. Vogt: Über die Berechnung der Fundamentdeformation, Det Norske Videnskapsakademie, Oslo (1925)
- 3) F. Vogt: Discussion of the paper "Stresses in Gravity Dams by Principle of Least Work," Trans. ASCE., Vol. 96, p. 548* (1932)
- 4) C. Semenza: Arch Dams: Development in Italy, Proc. ASCE, Vol. 82, No. PO 3 (1956)
- 5) C. Semenza: Überlegungen zur Ausgestaltung der Auflager von Bogenstaumauern, Die Bautechnik, Bd. 32, S. 393 (1955)
- 6) U. S. Bureau of Reclamation: Reclamation Manual, Treatise on Dams, Chap. 10 Arch Dams, Part II, p. 94 (1950)
- 7) W. Cain: The Circular Arch under Normal Loads, Trans. ASCE, Vol. 85, p. 233 (1922)

コンクリート ダムの熱応力 に関する基礎的研究

(附 図)

昭和 36 年 7 月

森 忠 次

コンクリート ダムの熱応力に関する基礎的研究

附 図 目 次

(附図番号)

(頁)

第 I 編 ダムの応力状態の一般的傾向

附図-I.1.1 ~ I.1.2	1
附図-I.2.1 ~ I.2.16	2 ~ 18
附図-I.3.1 ~ I.3.44	19 ~ 65
附図-I.4.1 ~ I.4.22	66 ~ 91

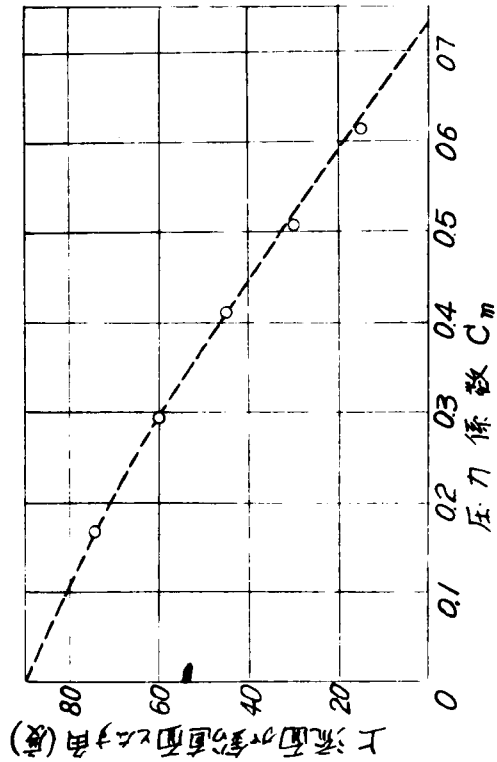
第 II 編 ダムに生ずる基本的な熱応力状態の解析

附図-II.2.1 ~ II.2.7	92 ~ 100
附図-II.3.1 ~ II.3.11	101 ~ 108
附図-II.4.1 ~ II.4.5	109 ~ 112
附図-II.5.1 ~ II.5.9	113 ~ 123
附図-II.6.1 ~ II.6.6	124 ~ 132
附図-II.7.1 ~ II.7.13	133 ~ 138
附図-II.8.1 ~ II.8.9	139 ~ 154
附図-II.9.1 ~ II.9.7	155 ~ 161

第 III 編 コンクリート ダムの熱応力に関する諸問題の検討

附図-III.1.1	162
附図-III.2.1 ~ III.2.18	163 ~ 176
附図-III.3.1 ~ III.3.14	177 ~ 190
附図-III.4.1	191

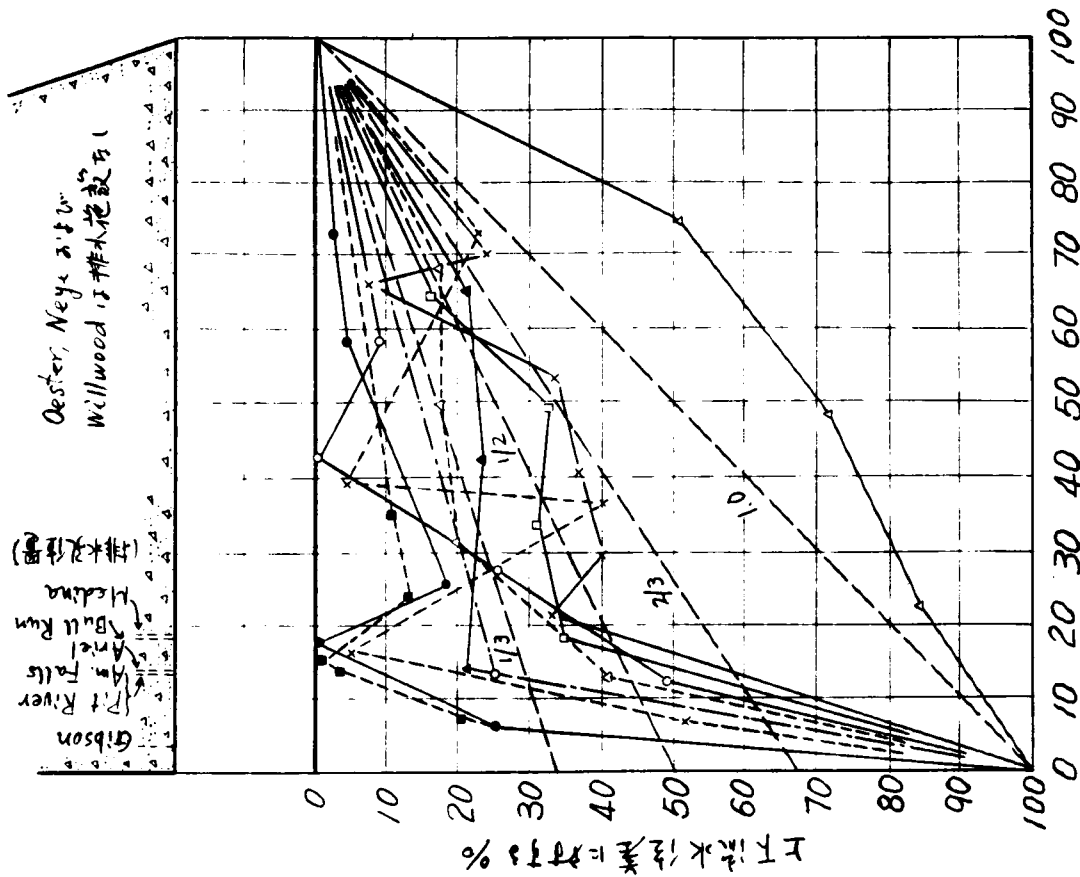
附図-I-1-1 一定勾配の上流面に対する動水圧
の圧力係数



附図-I-1-2 の記号

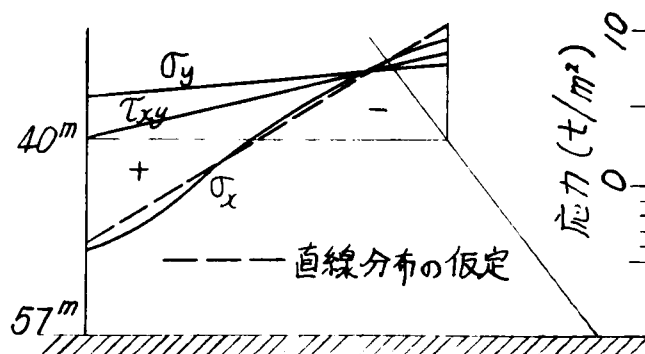
- Bull Run, Ore. よく締つた玄武岩質と火岩岩, グラウト
- Am. Fall, Idaho. 粒状節理の玄武岩, グラウト
- Willwood, Wyo. 砂岩および頁岩, グラウト
- Medina, Texas. 水平亀裂を有する石灰岩, グラウト
- × Blue River, Wis. 破碎された緑泥片岩,
- Pit River, No. 3, Calif. 凝灰岩および火岩岩, グラウト
- Oester, Doorn. 崩壊のある凝灰岩および硬砂岩
- × Naye, Doorn. 硬砂岩および頁岩, 一部グラウト
- Gibson, Mont. 結晶質の石灰岩, グラウト
- Ariel, Wash. 安山岩質凝灰岩, グラウト

附図-I-1-2 ダム底面における揚圧力強度
の最大観測値

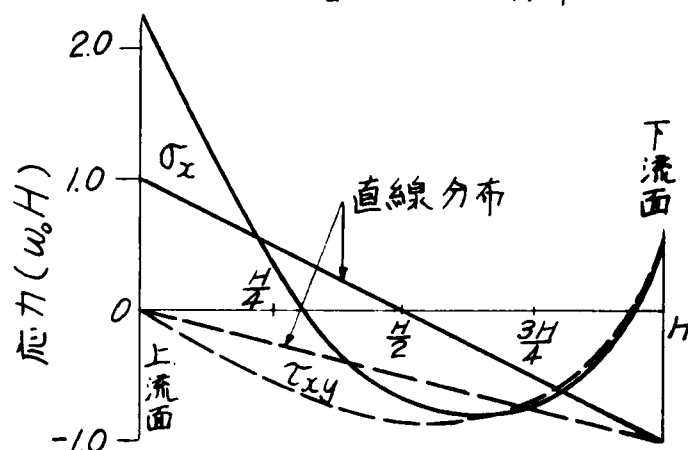


底面幅の%で表わした上流面からの距離

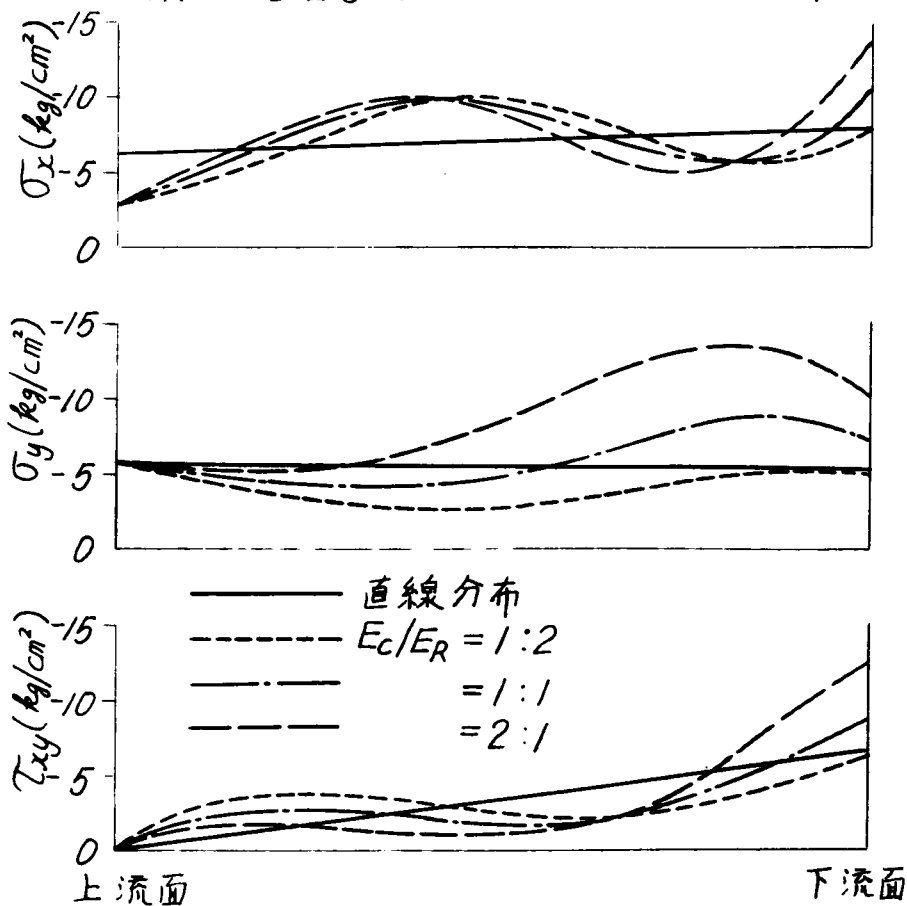
附図-I.2.1 動水圧による応力の比較



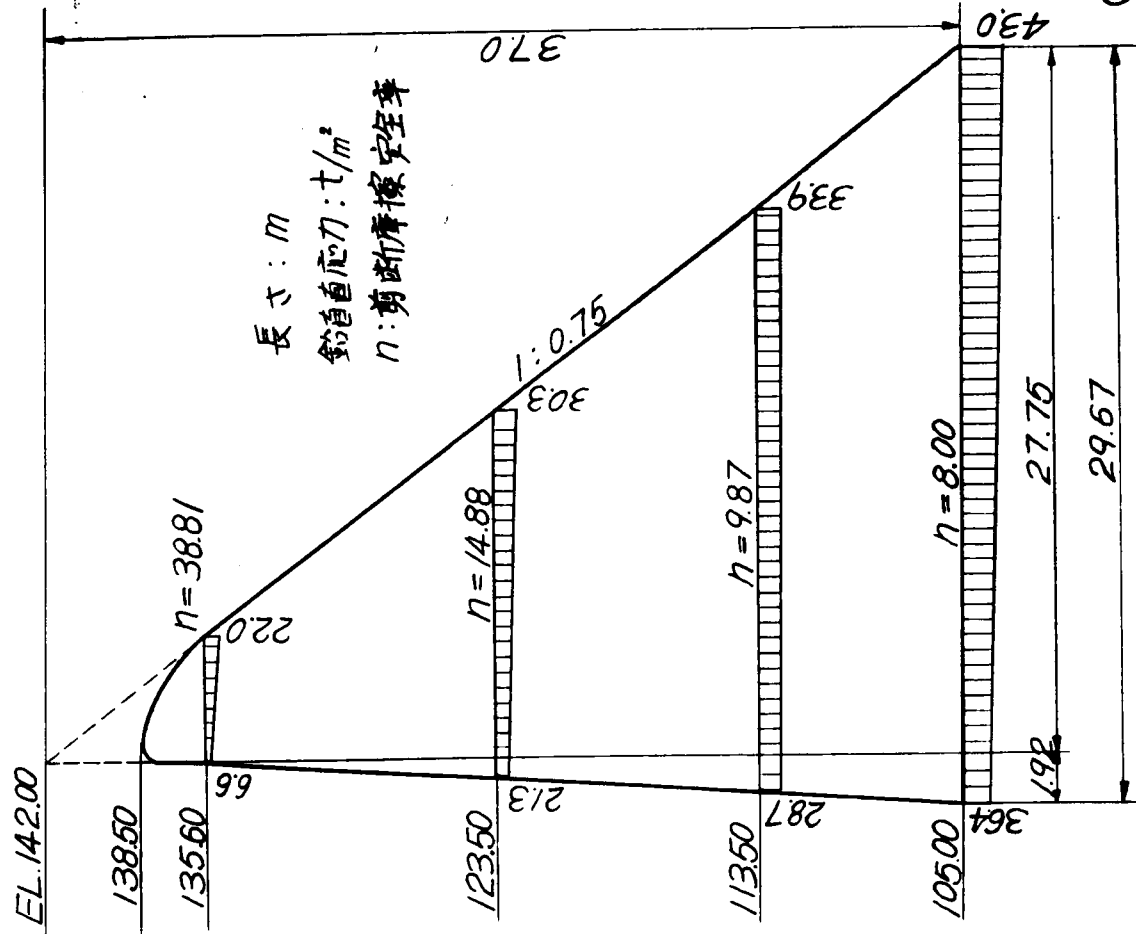
附図-I.2.2 底面の応力分布



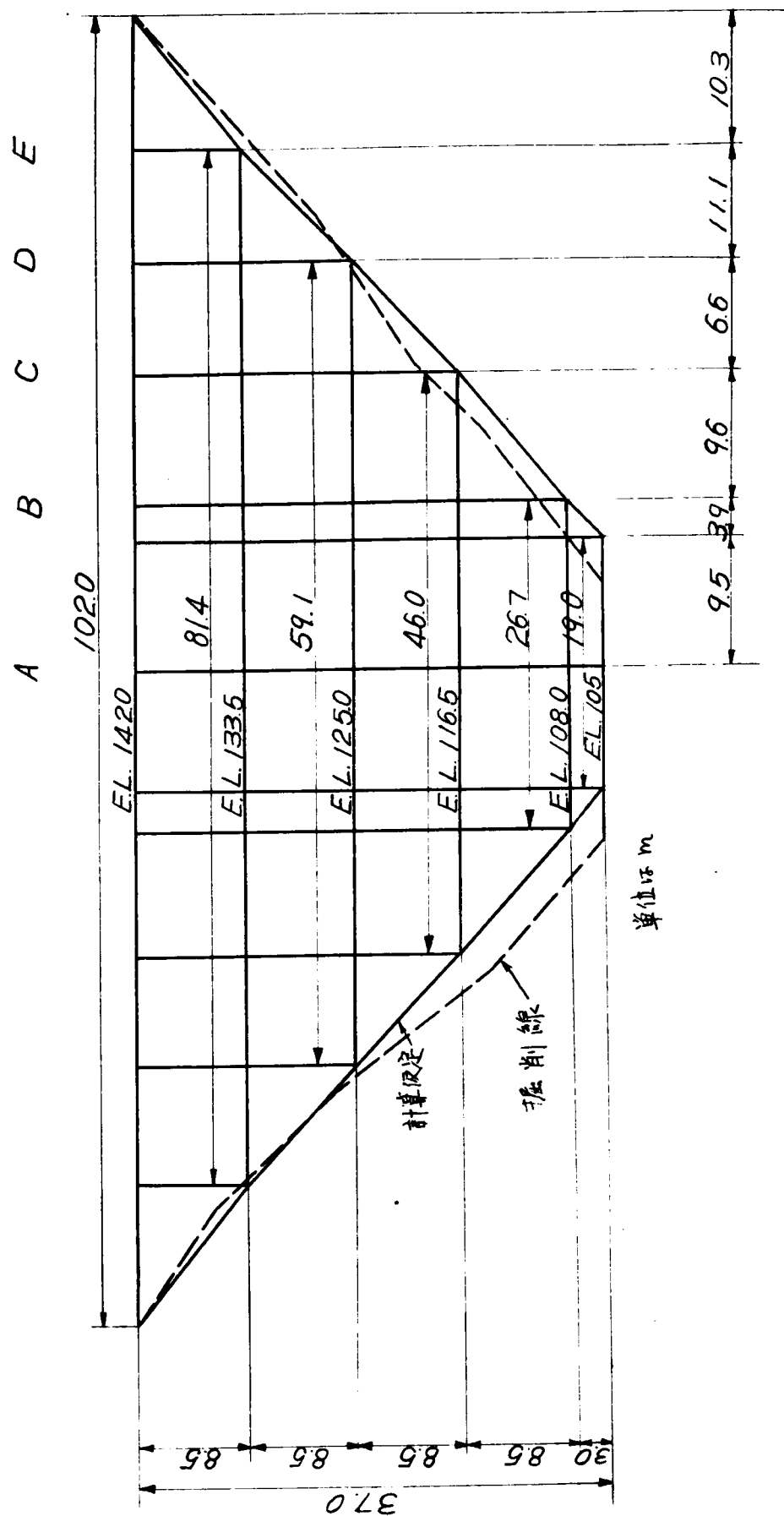
附図-I.2.3 ダム底面における応力分布



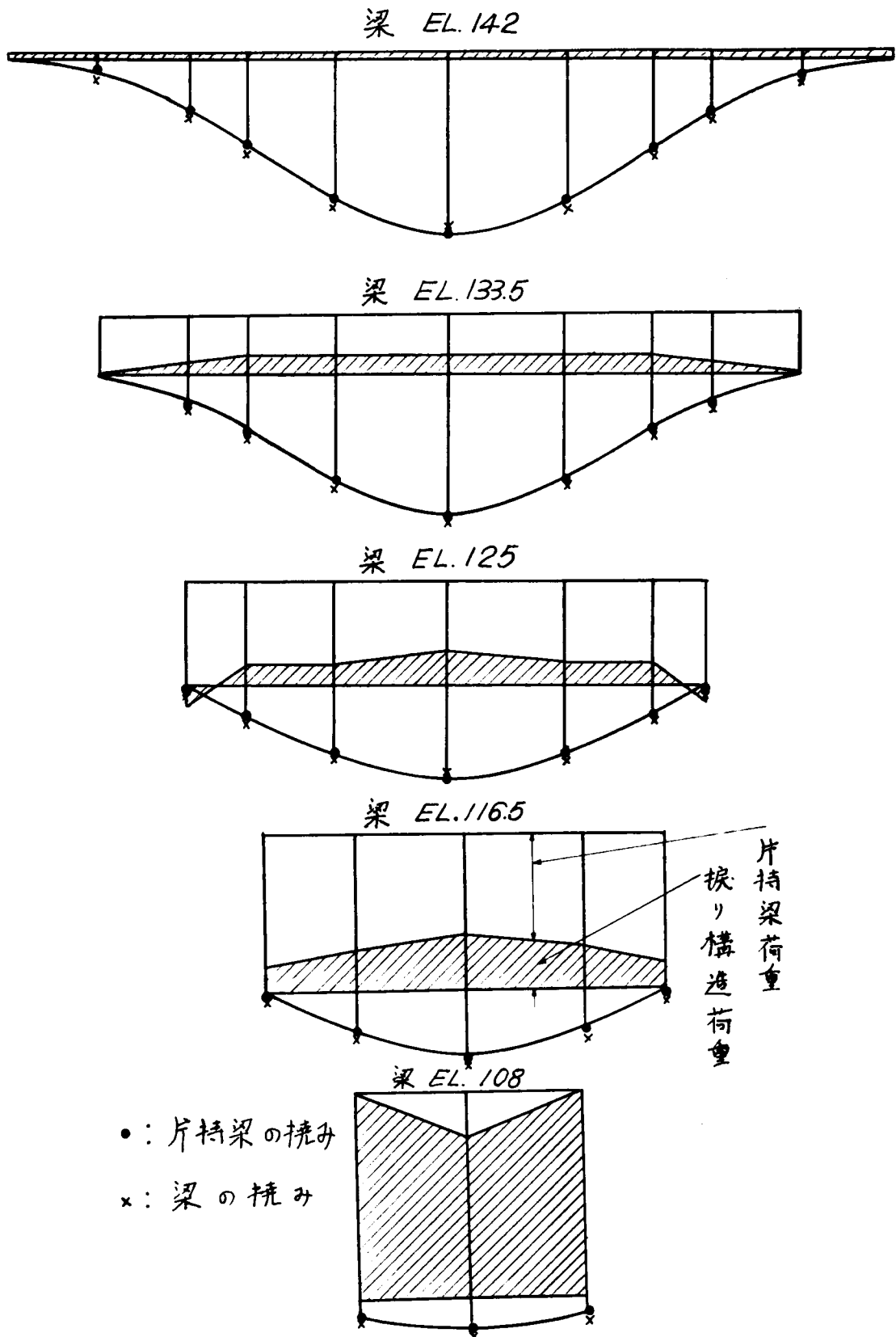
(b) 越流部

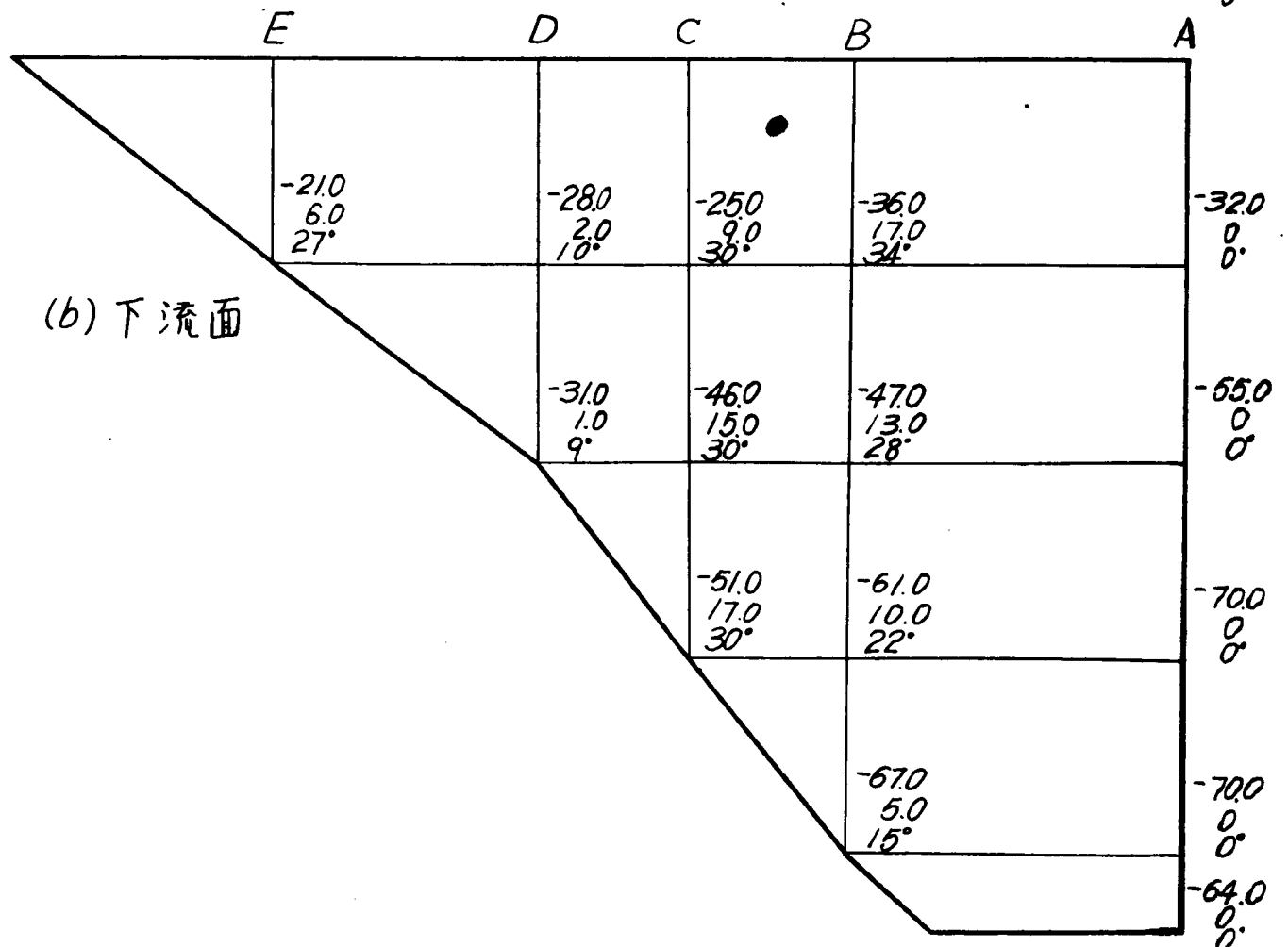
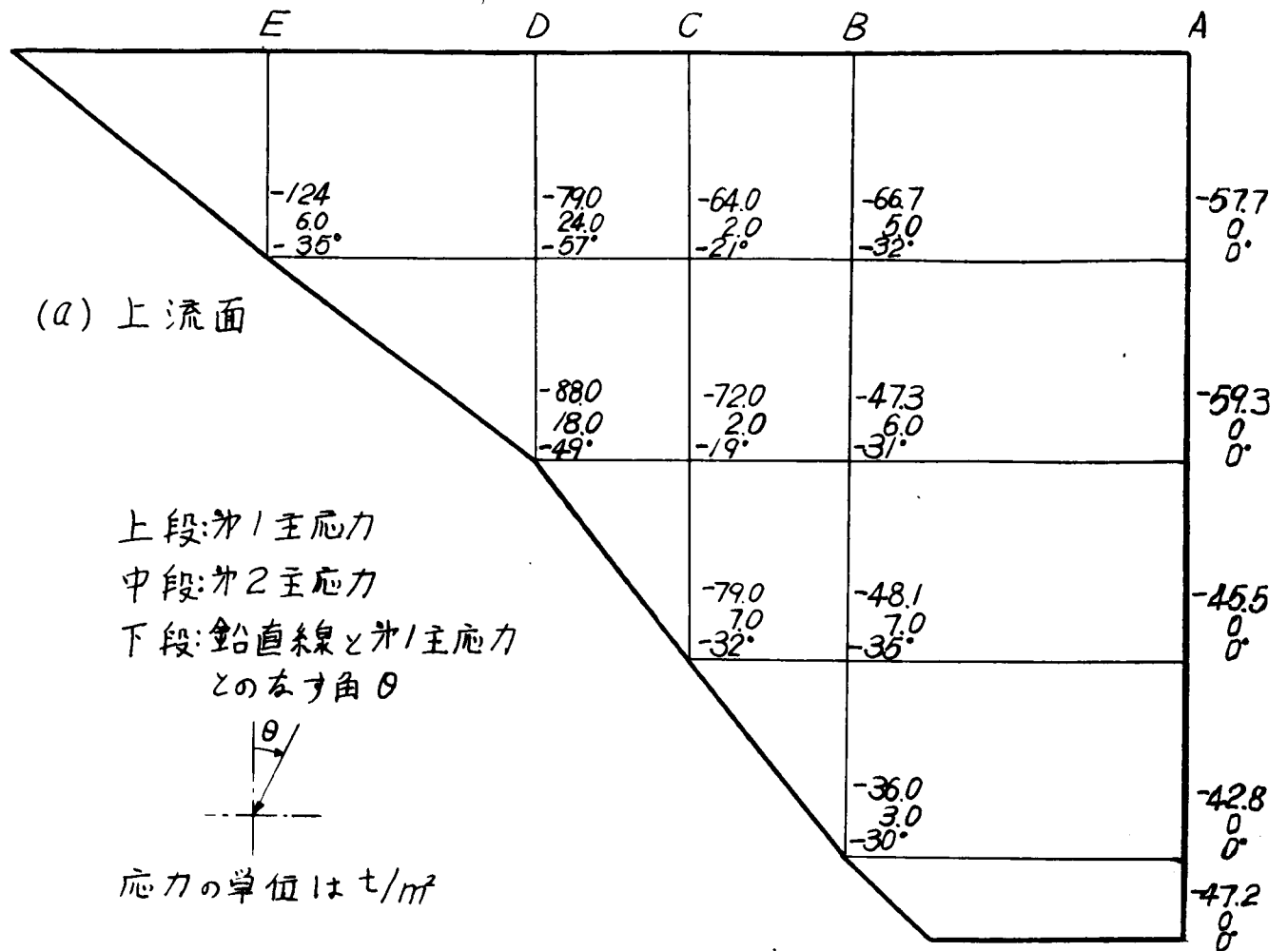


附圖-I-2.5 大谷ダム正面図



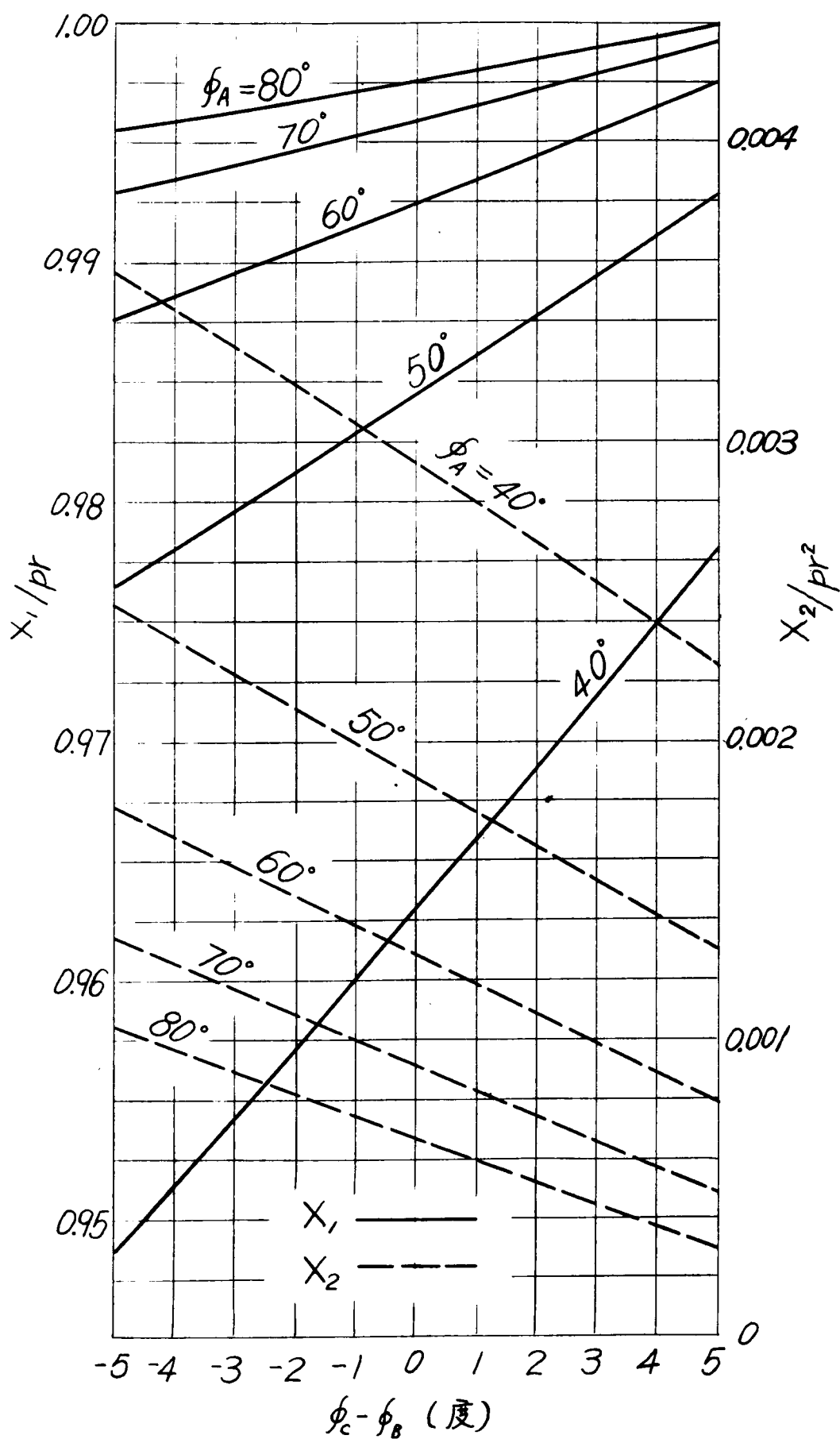
附図-I.2.6 荷重分担と水平梁の撓み





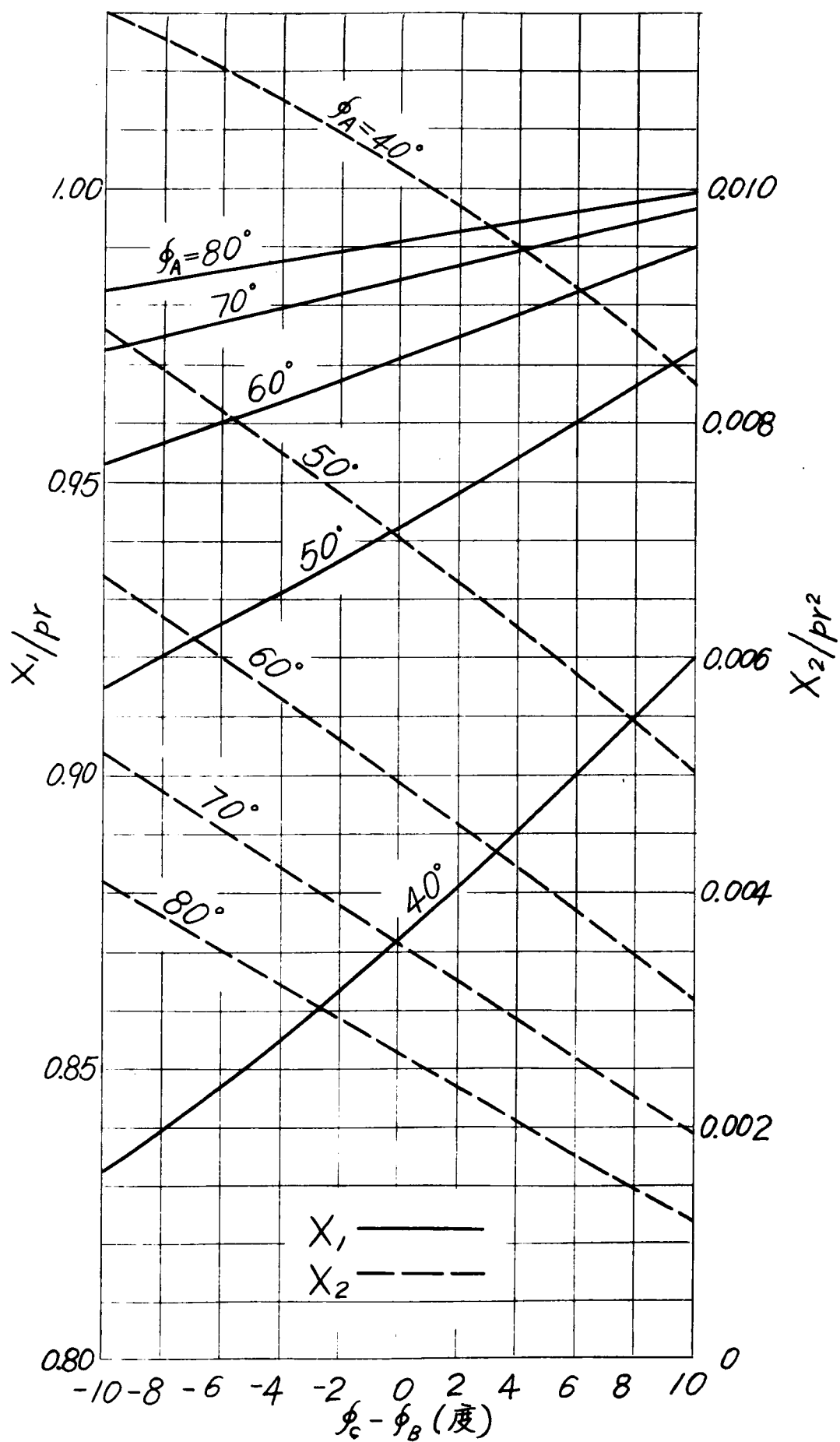
附圖-I-2-8 端面傾斜と断面力との関係

(a) $t/r = 1/20$



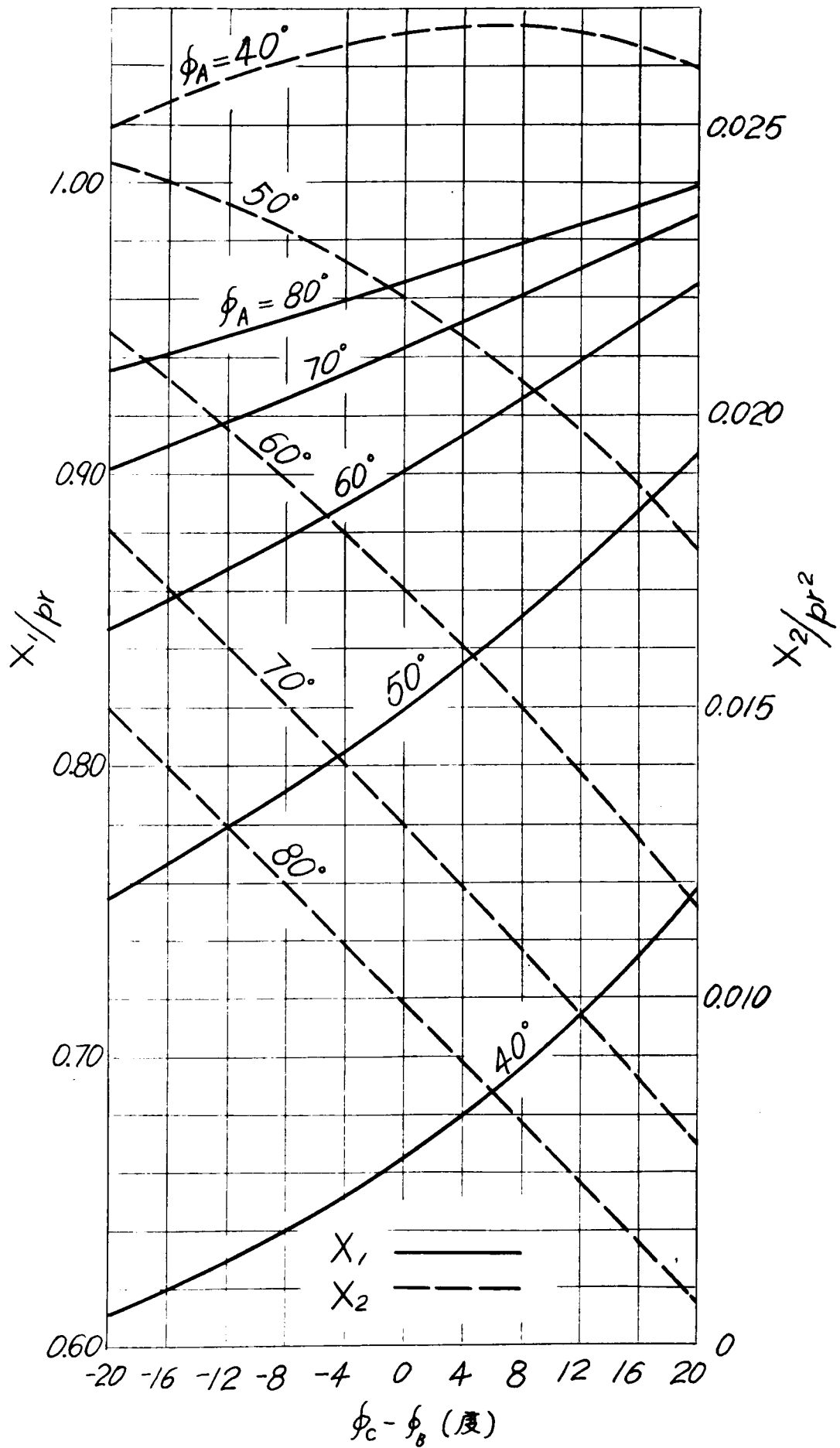
附圖-I.2.8

1b) $t/r = 1/10$



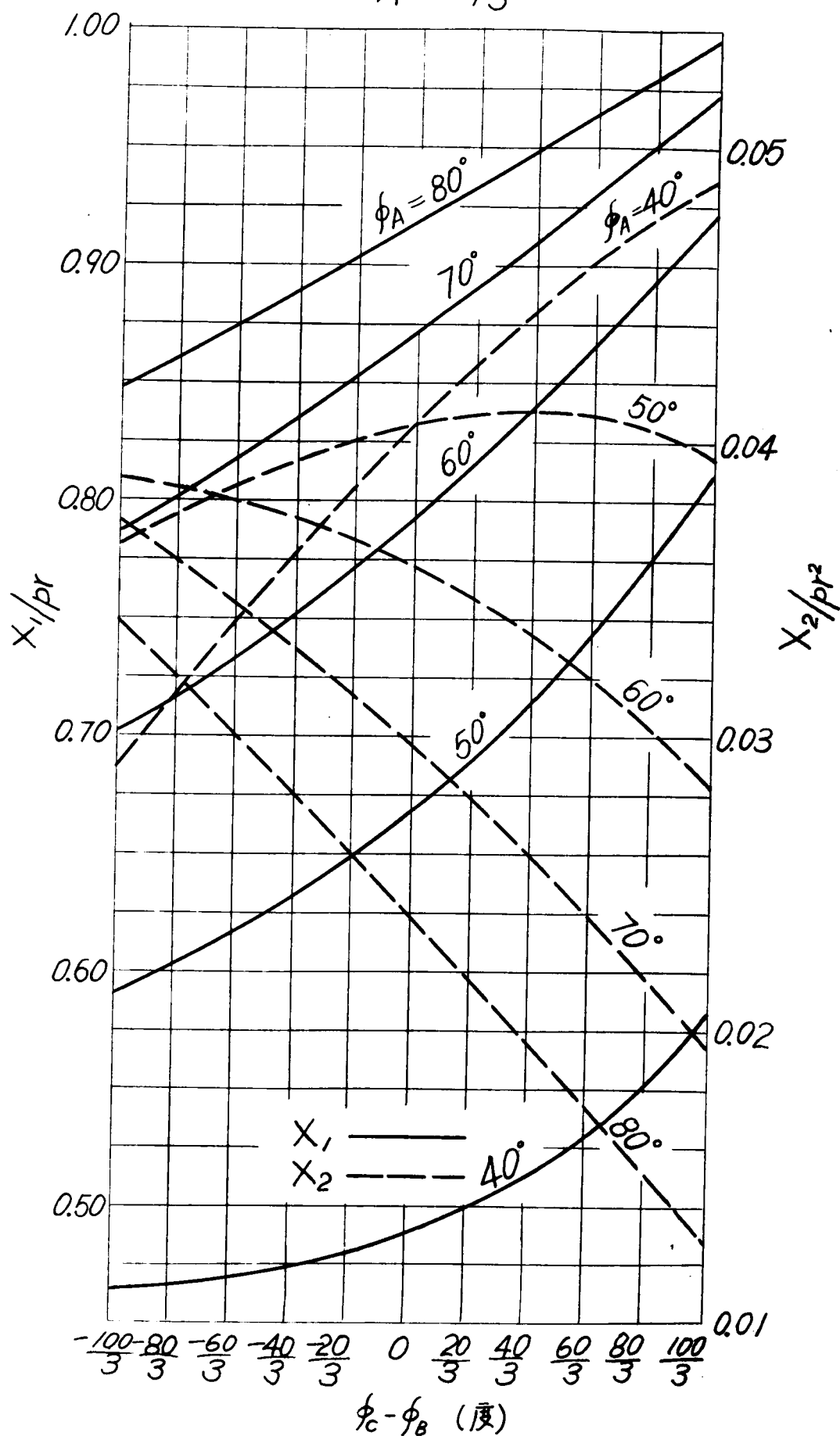
附圖-I·2·8
(c) $t/r = 1/5$

— 9 —



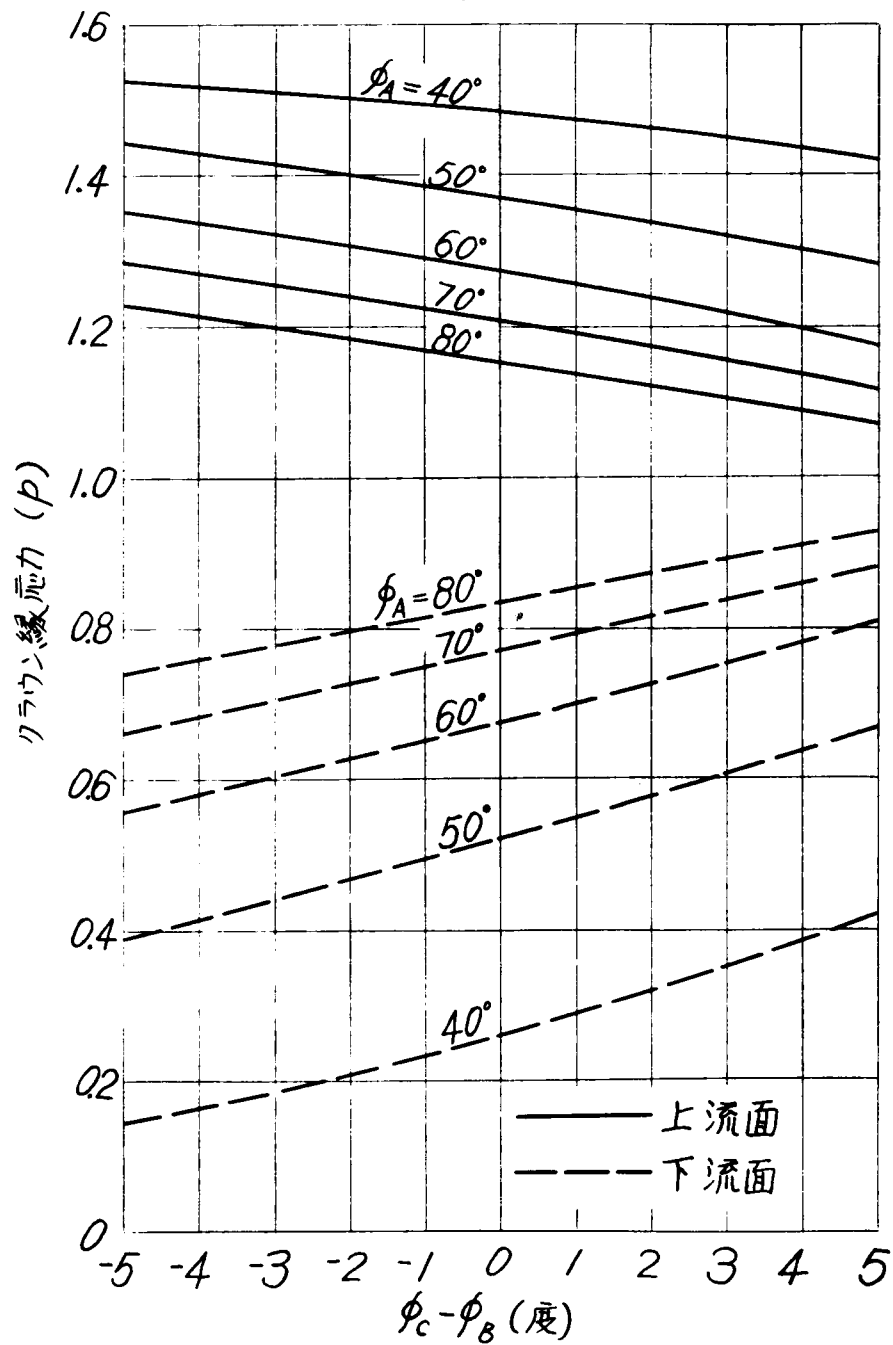
附图-I.2.8

10) $t/r = 1/3$



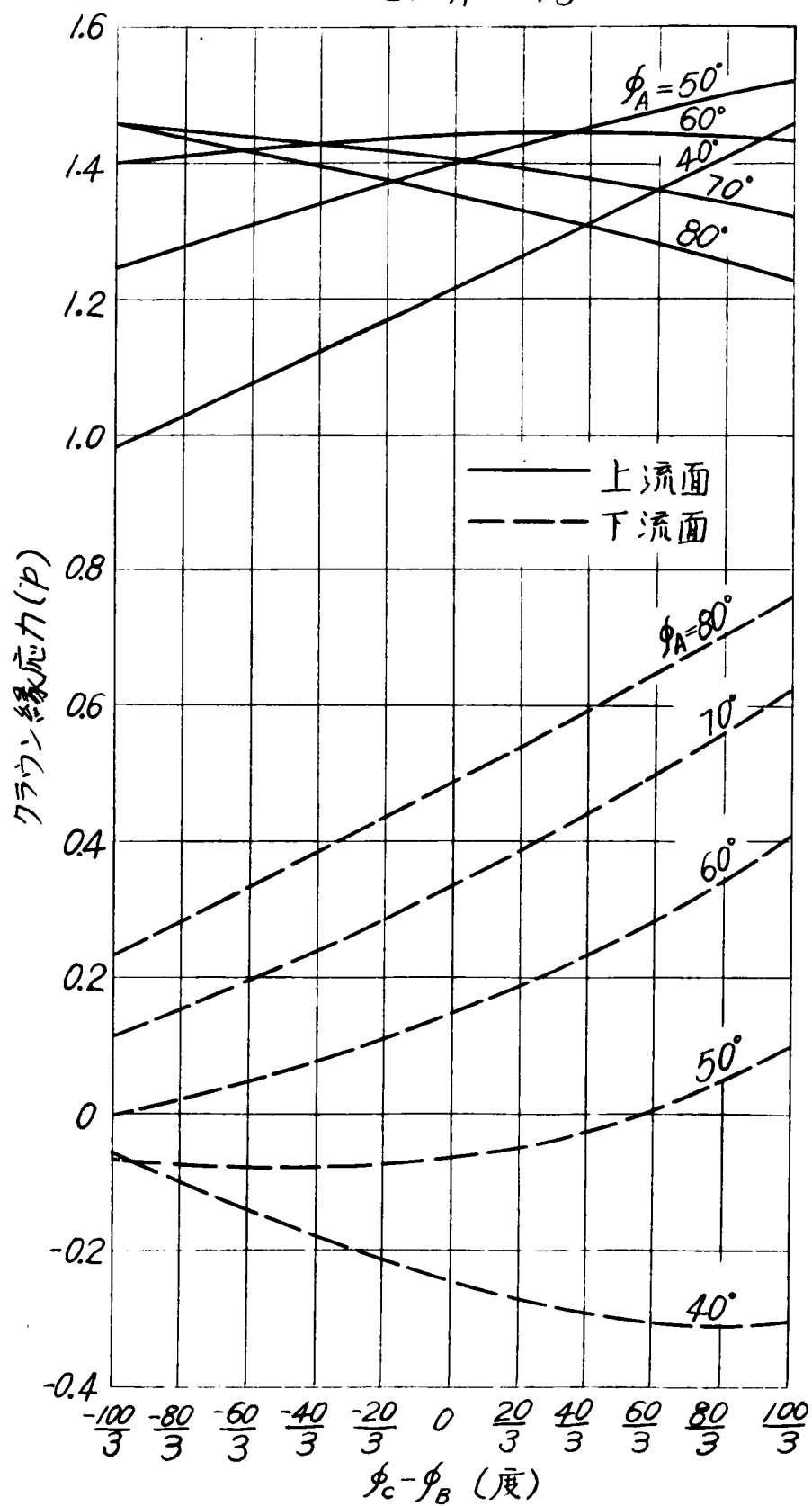
附図-I.2.9 クラウンの表面応力

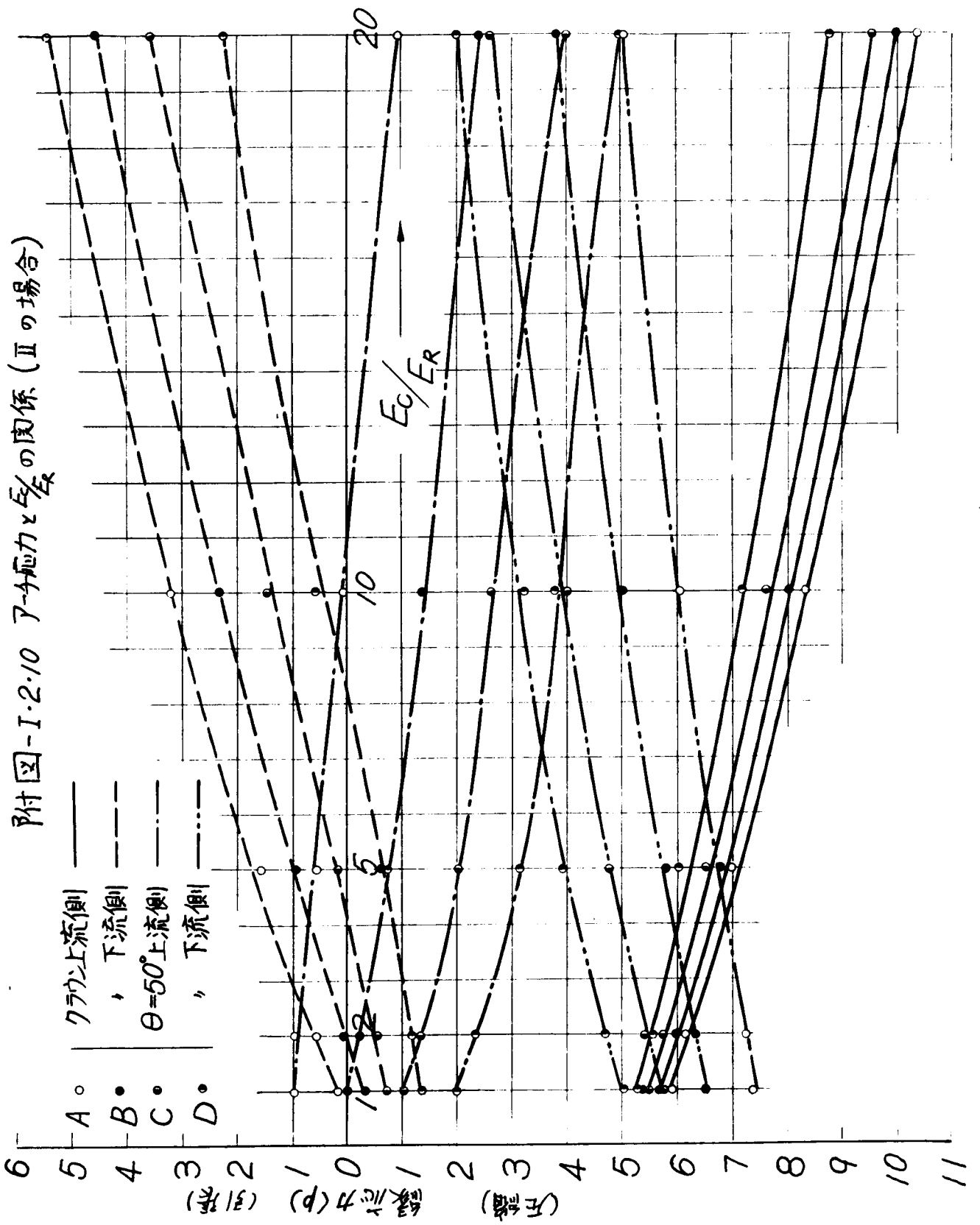
(a) $t/r = 1/10$



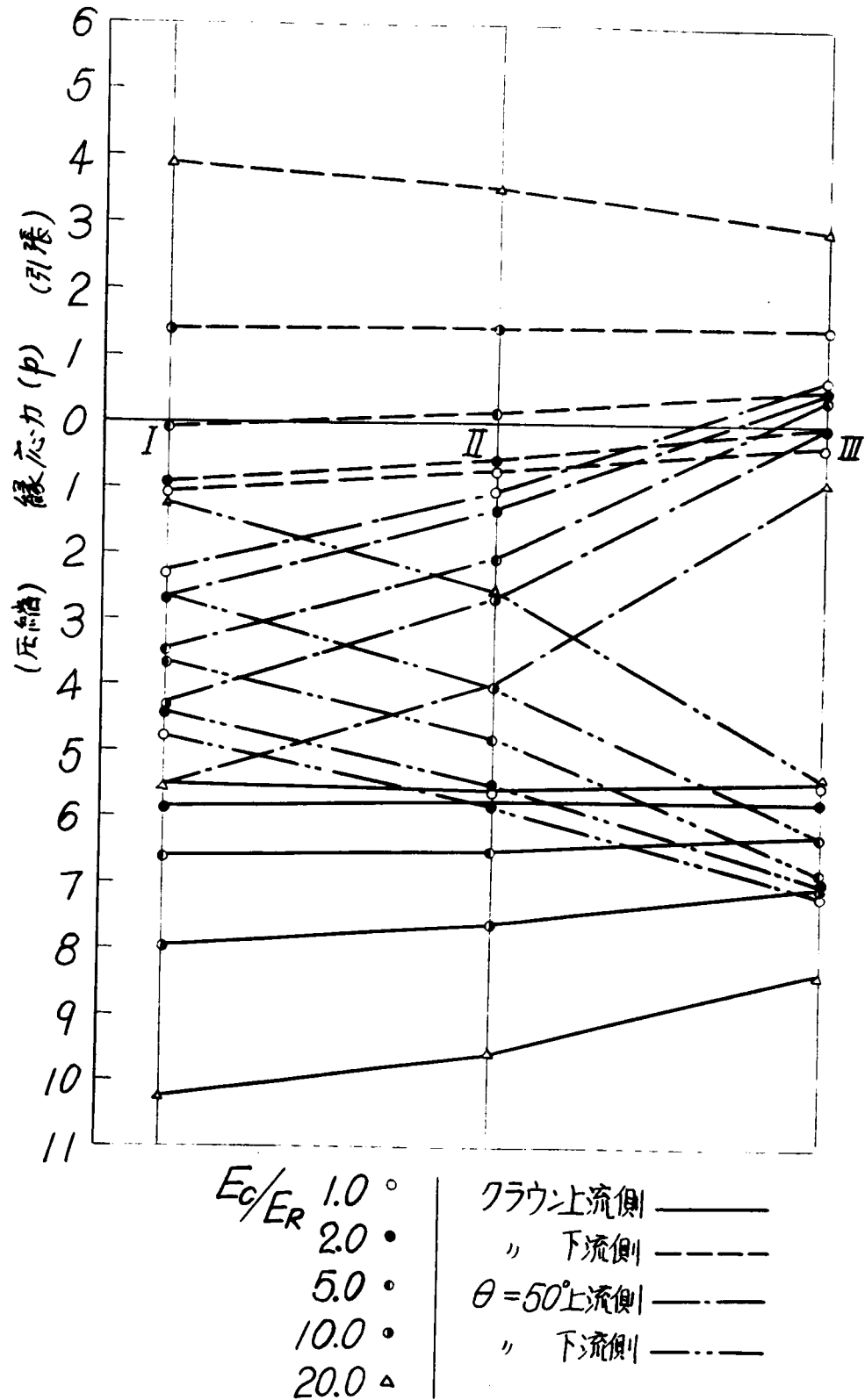
附図-I.2.9

(b) $t/r = 1/3$

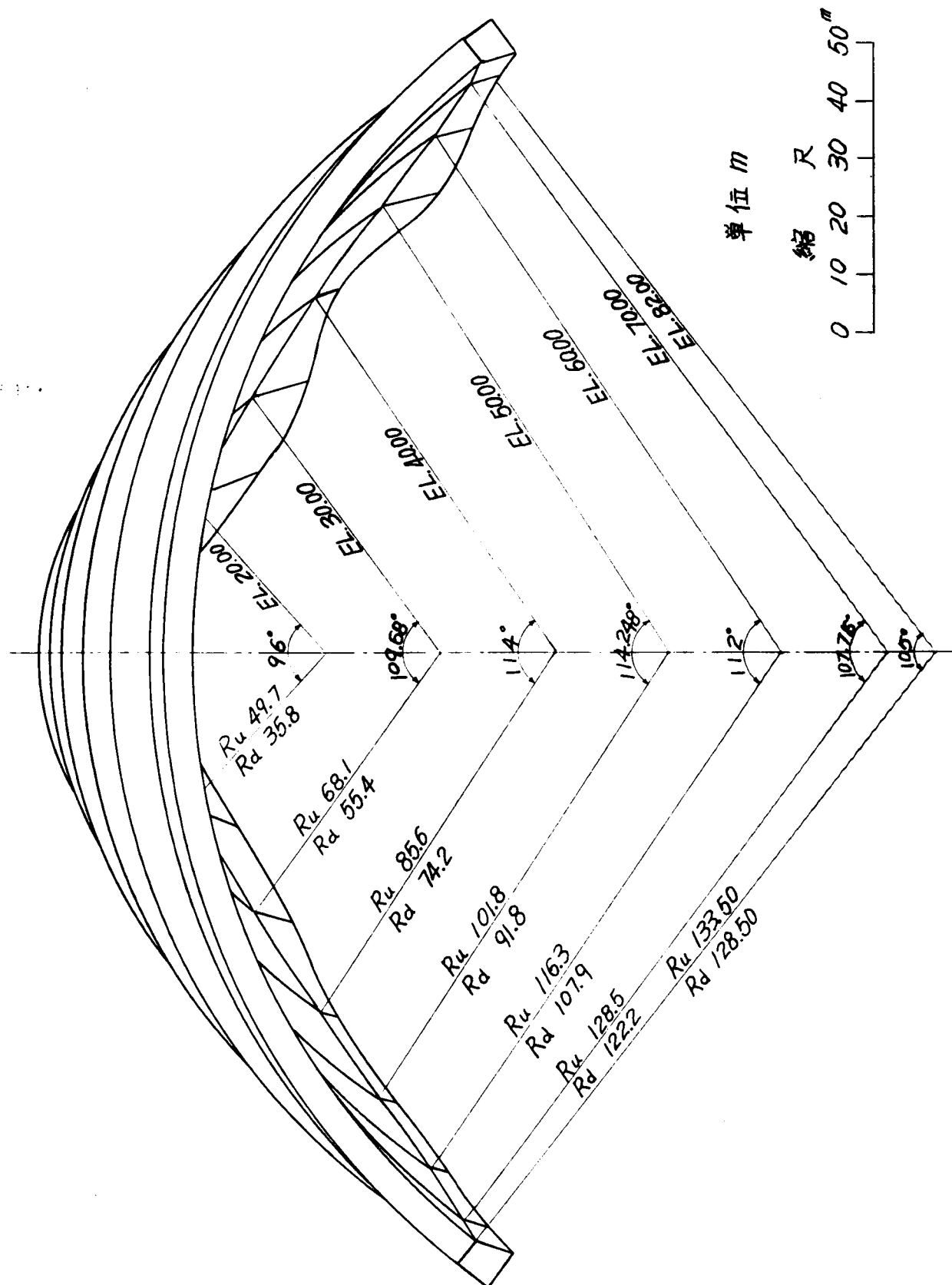




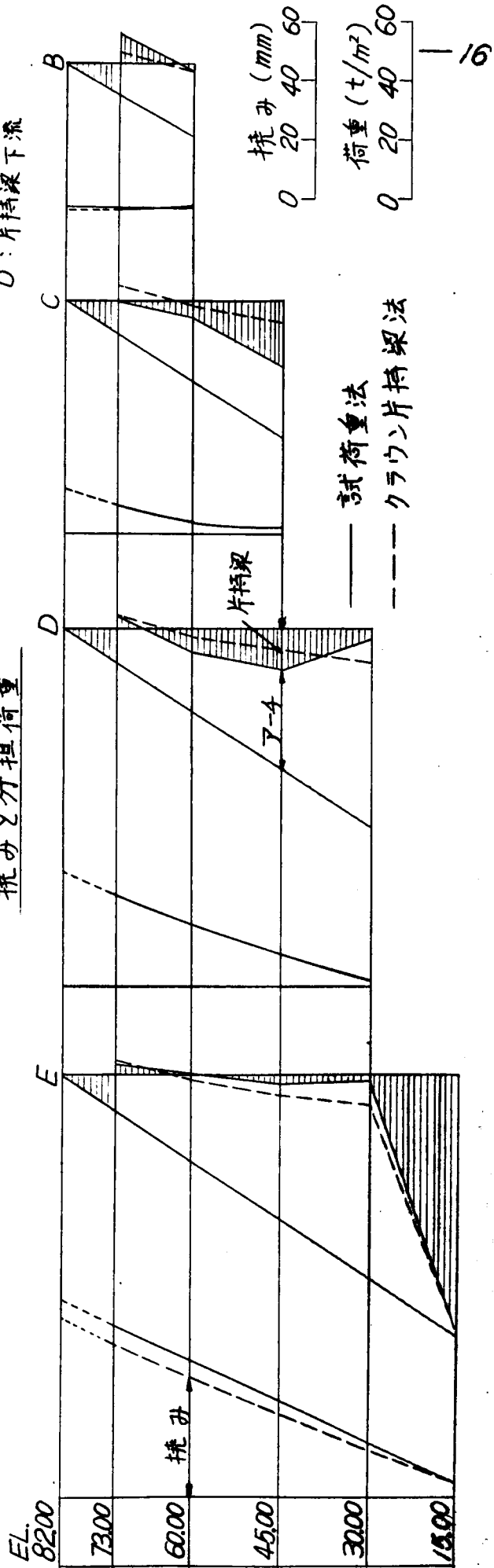
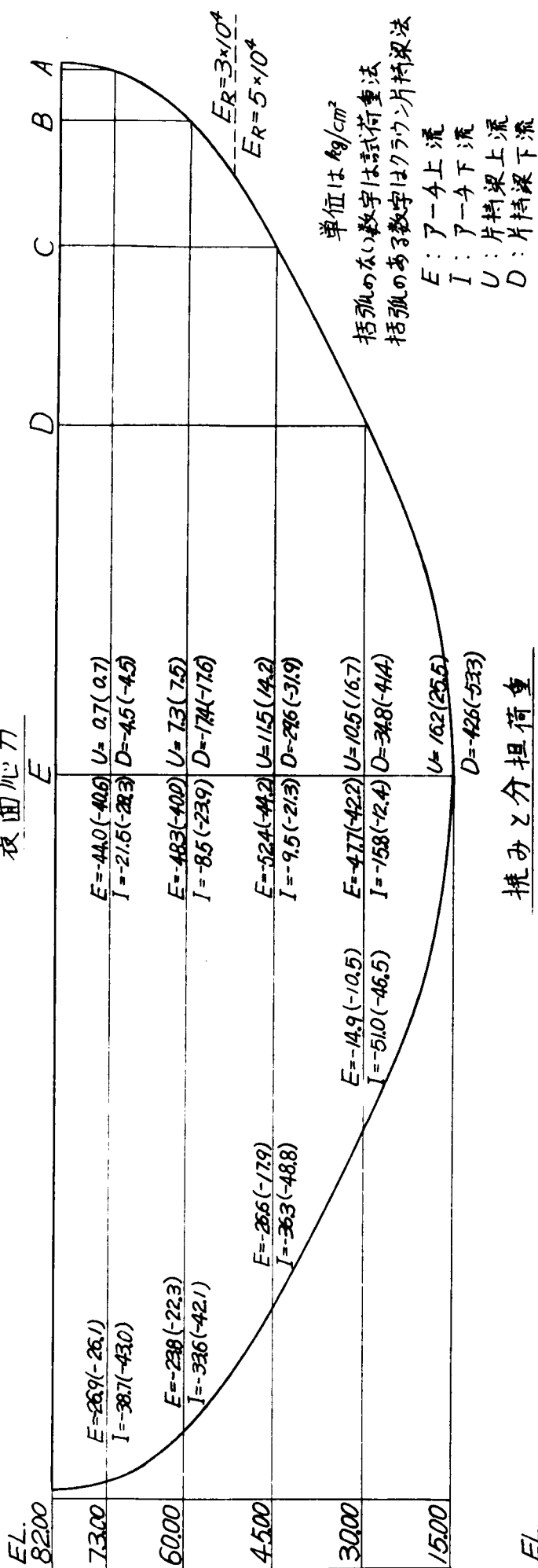
附図-I-2-11 アーチ応力とサドル形状の関係(C_0 の場合)



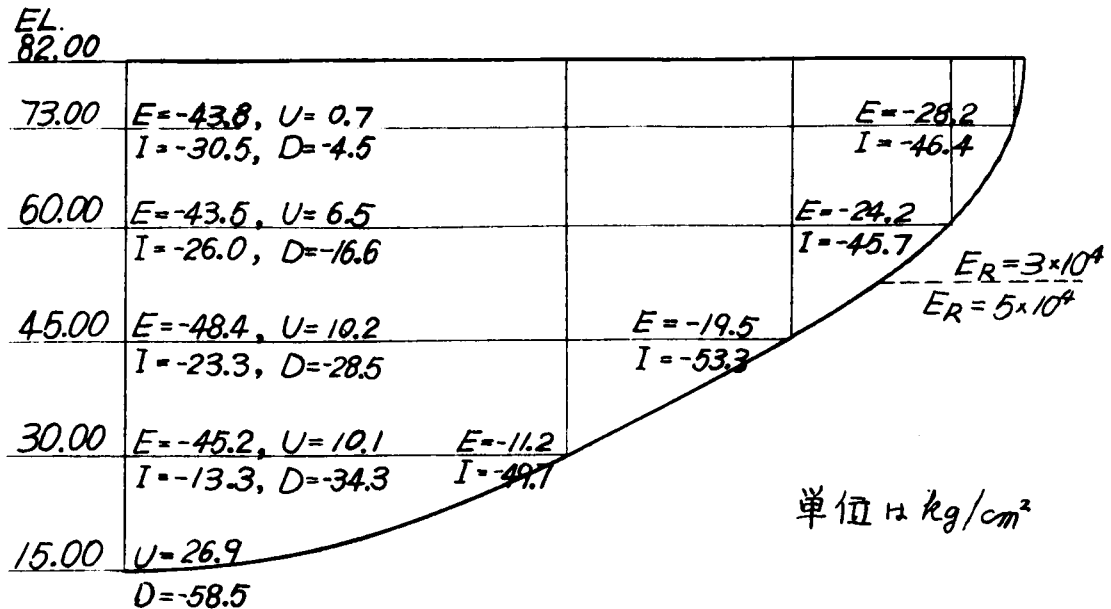
付図-I.2.12 天ヶ瀬ダム平面図(オ1次計画)



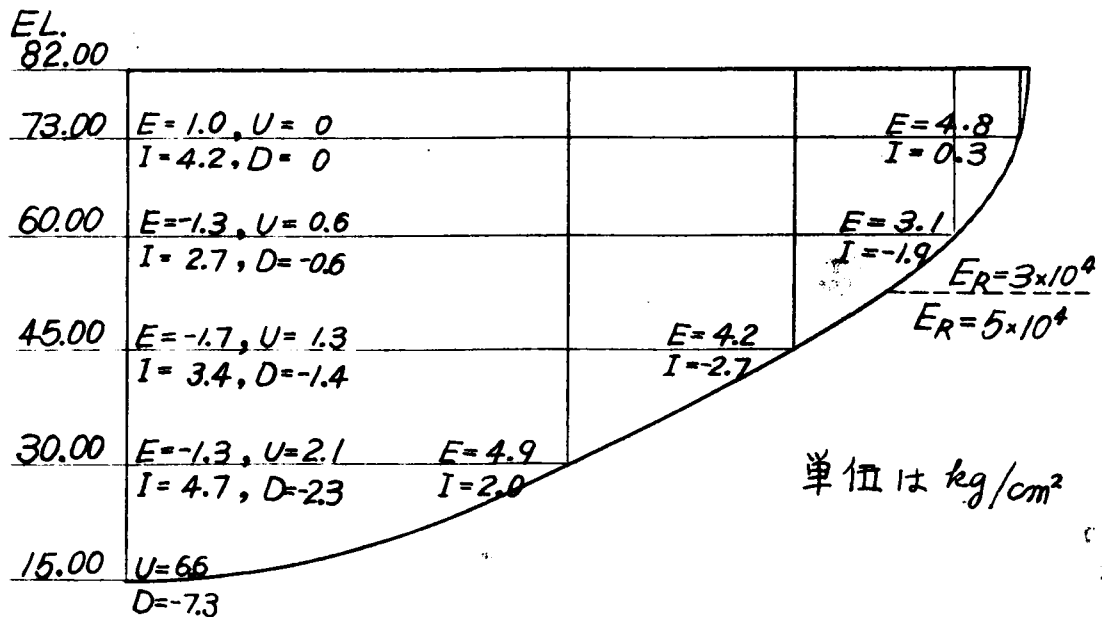
附図-I.2.13 計算値の比較
表面応力



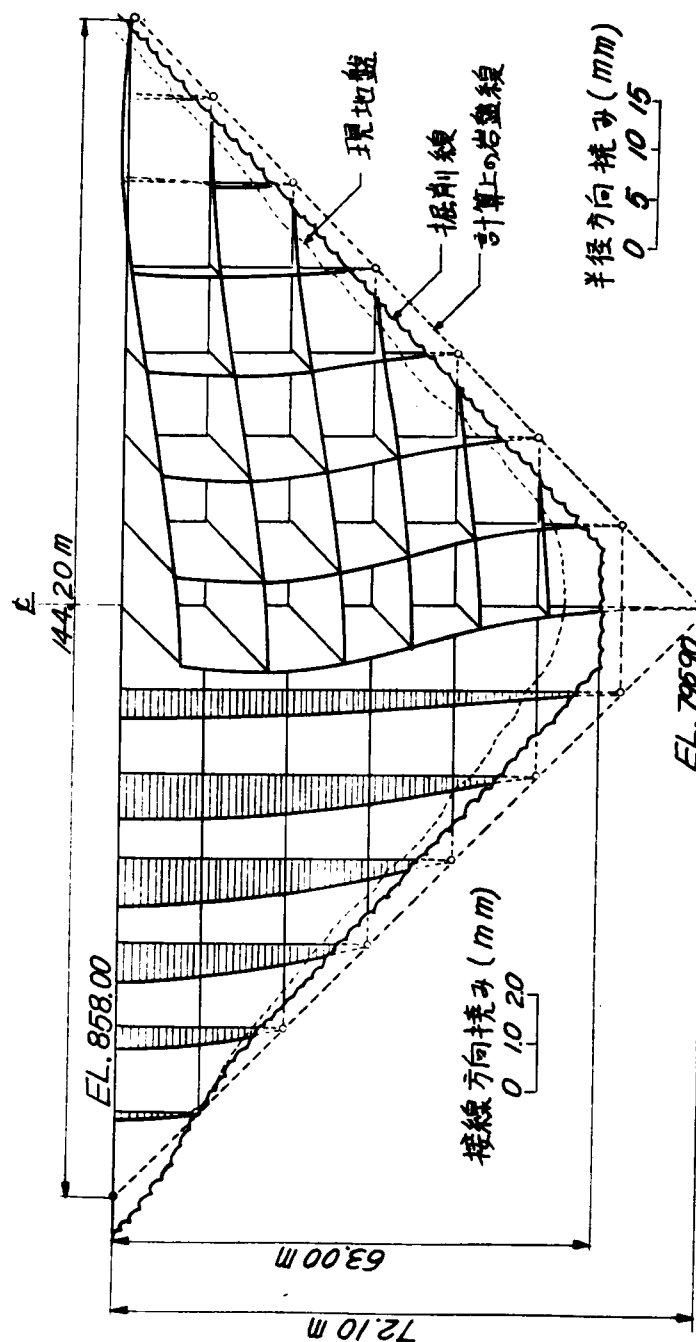
附図-I.2.14 片持梁にひび割れを考えたとき



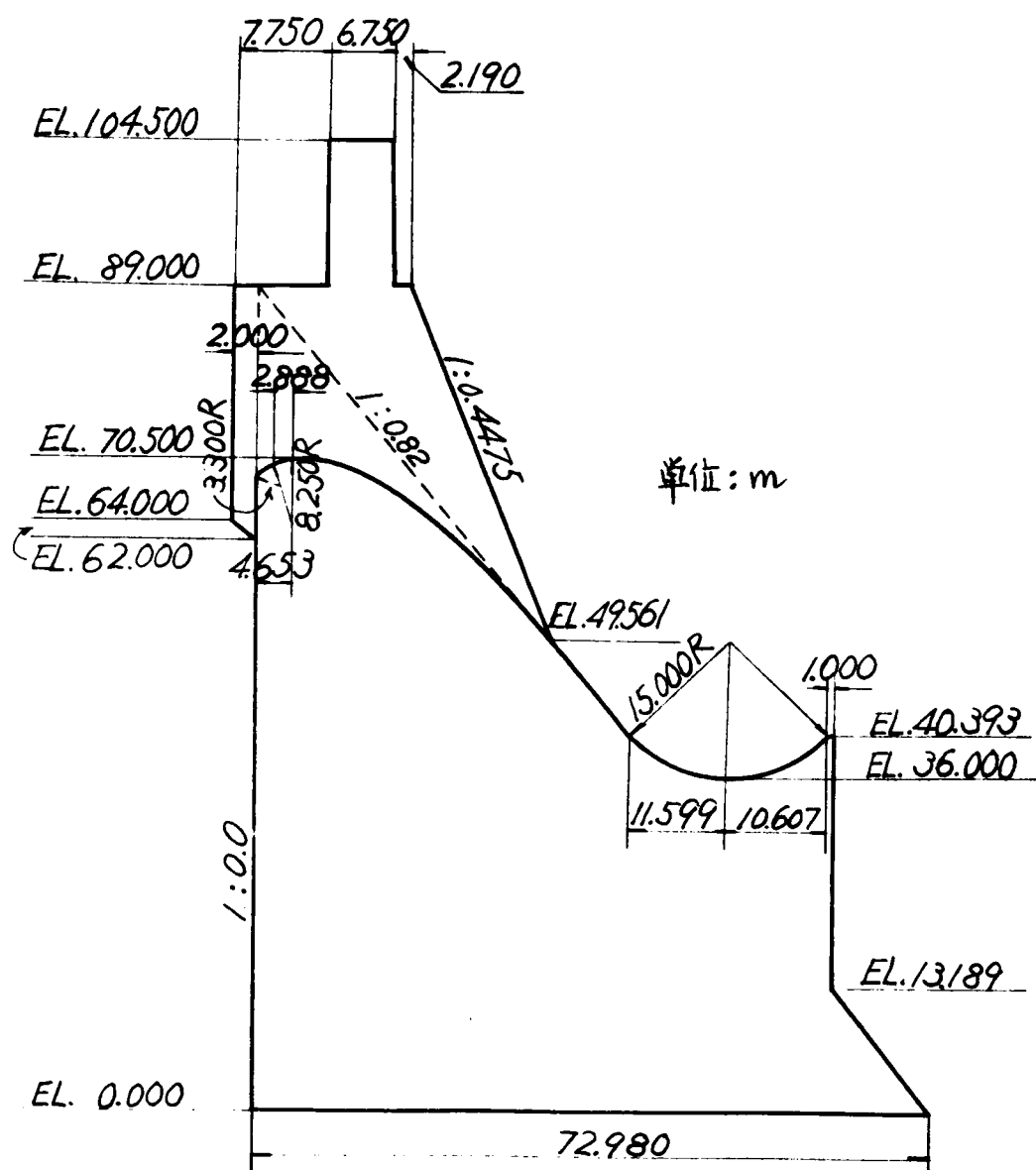
附図-I.2.15 温度降下するとき



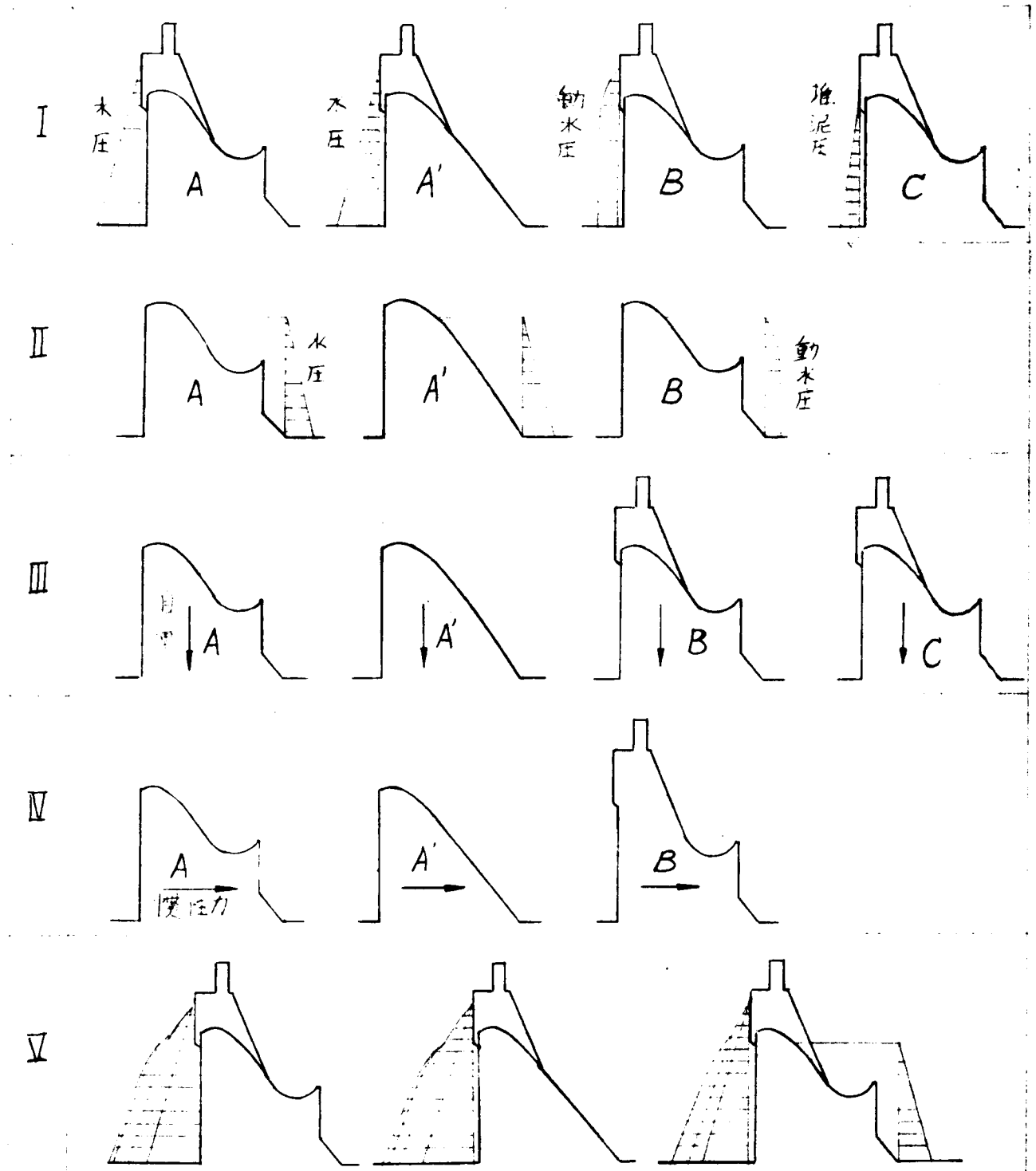
附図-I.2.16 Negovanu ダムの変形



附図-I・3・1 ダムの寸法

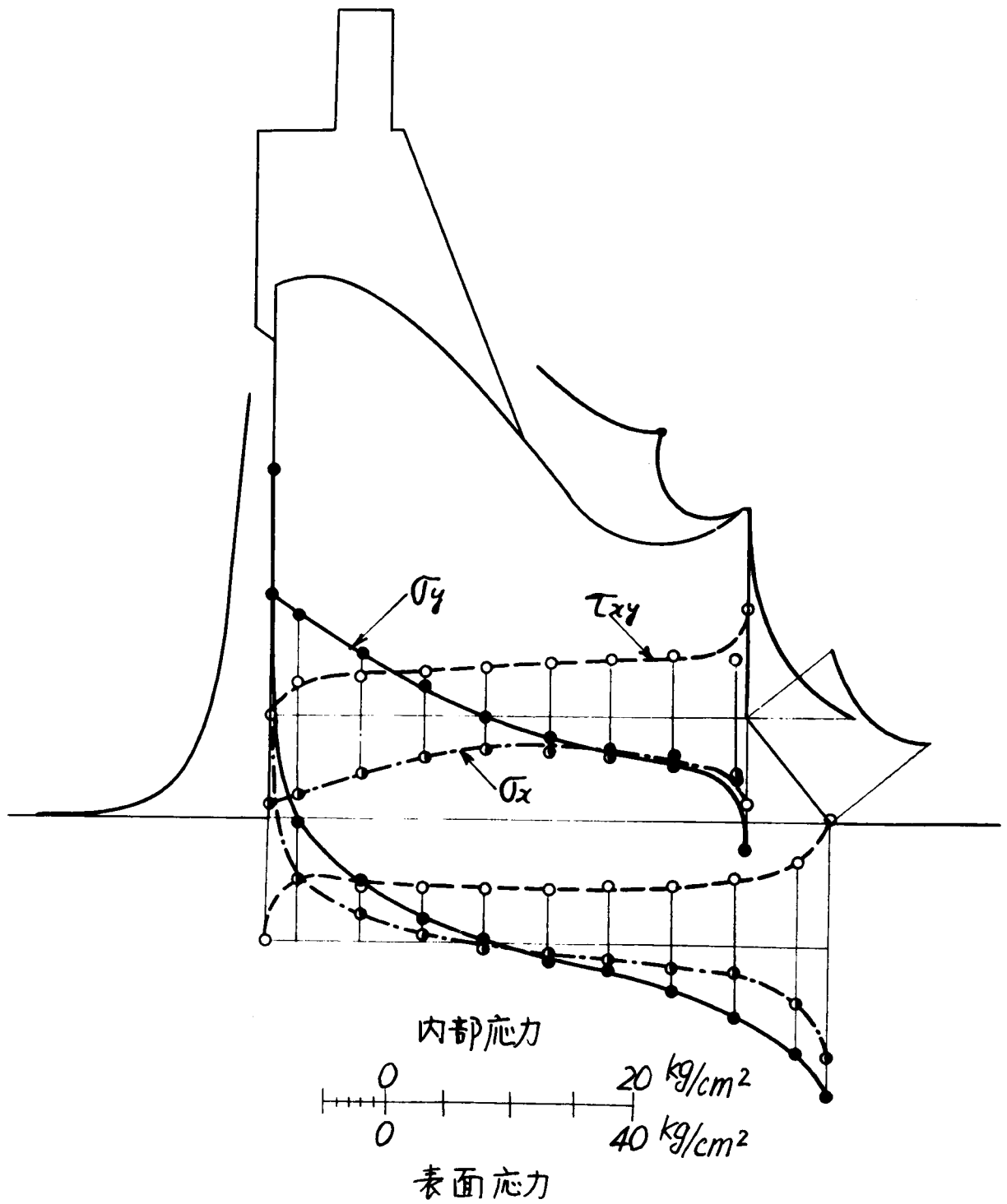


附圖-I.3.2 実験の種別とその記号



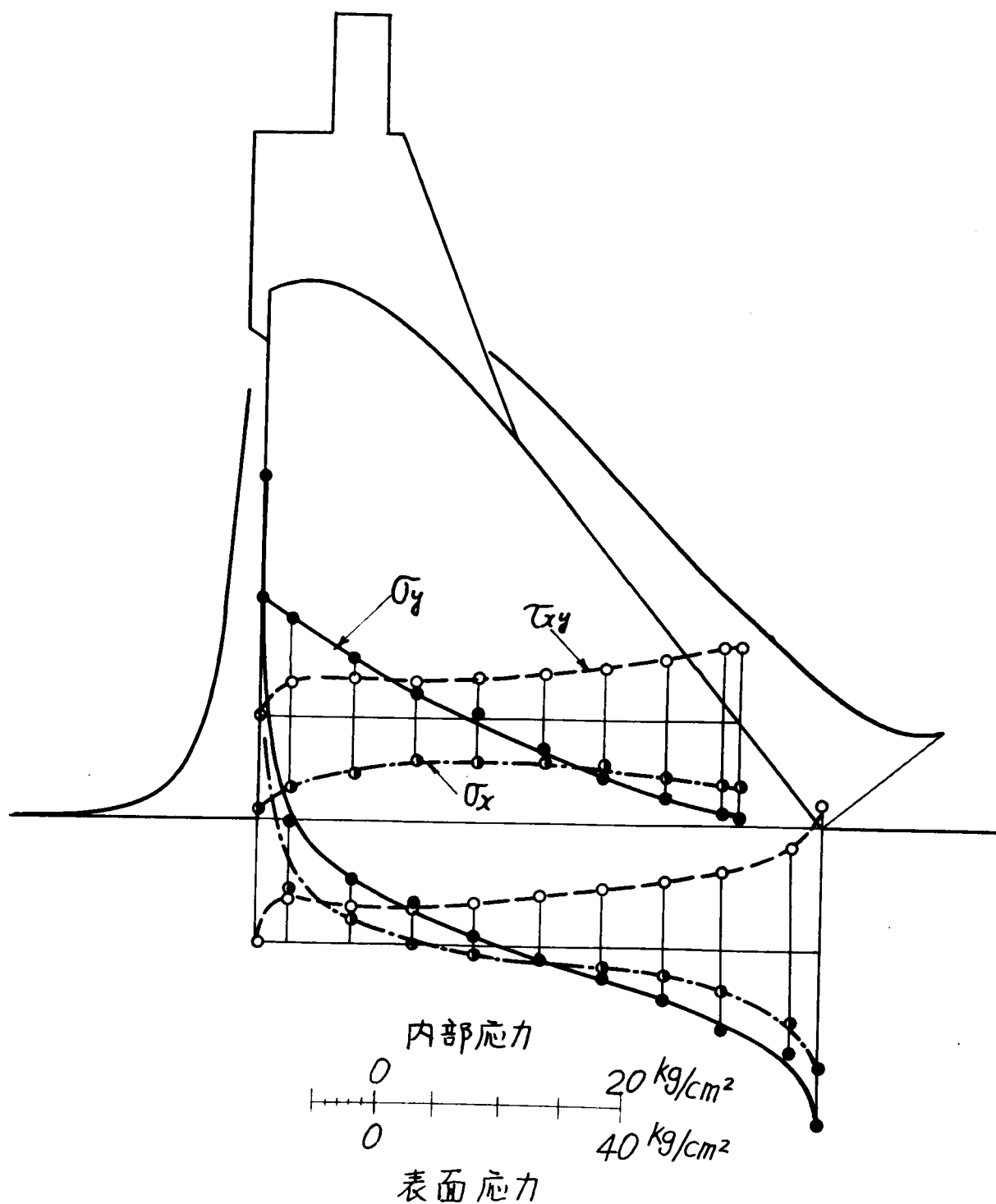
附図-I.3.3 上流面静水压の作用による応力状態

(a) IAの場合

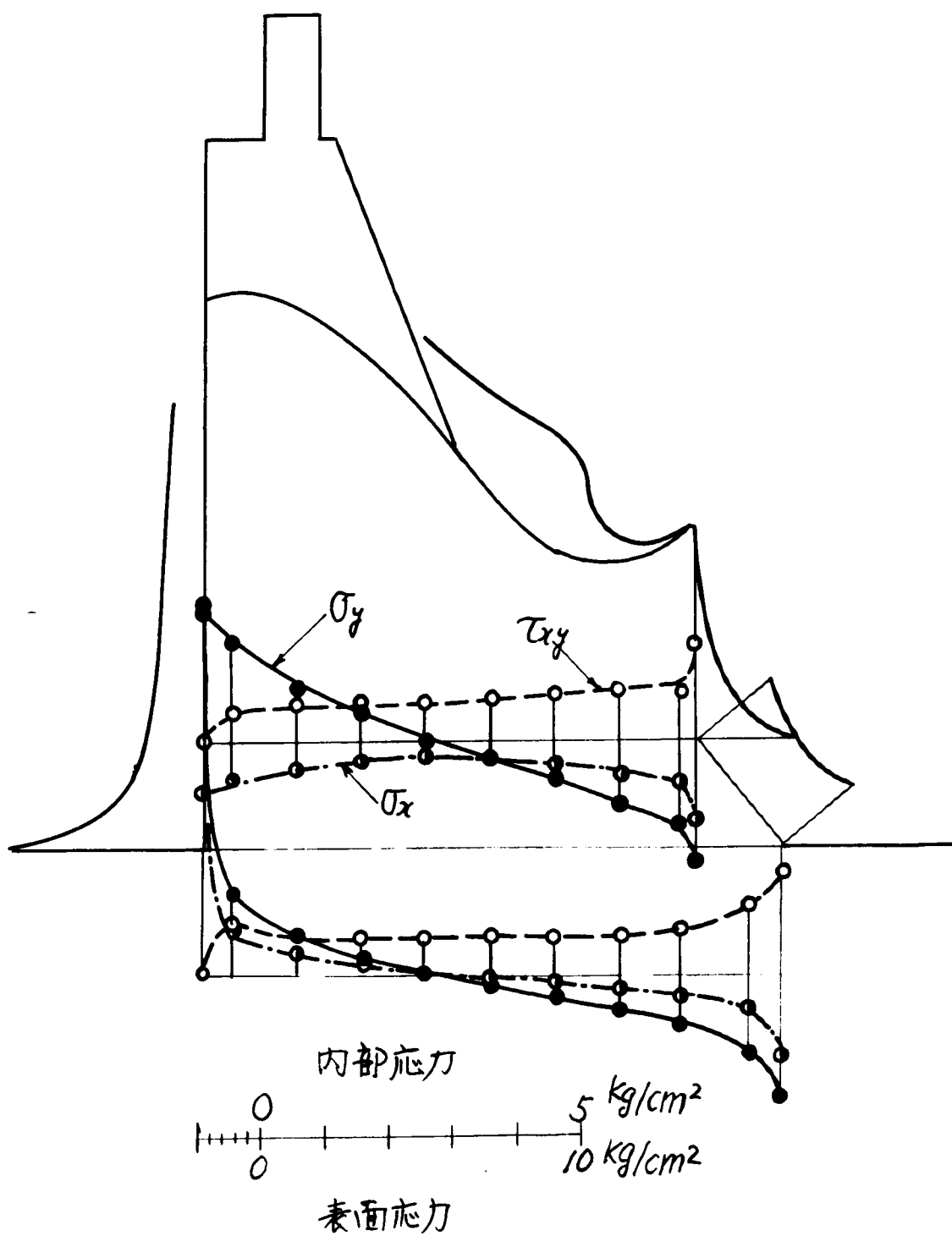


附図-I.3.3

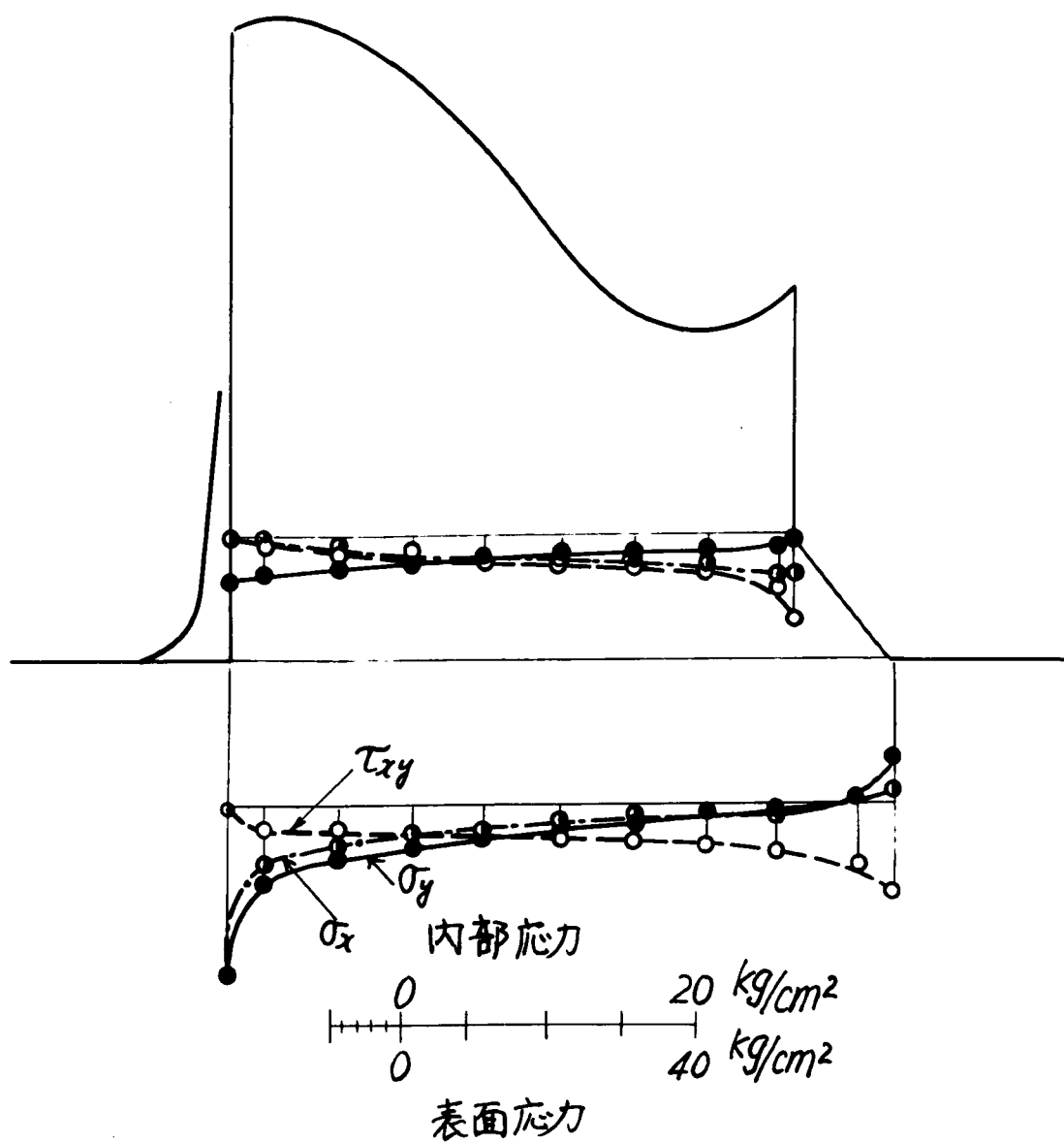
(b) IA'の場合



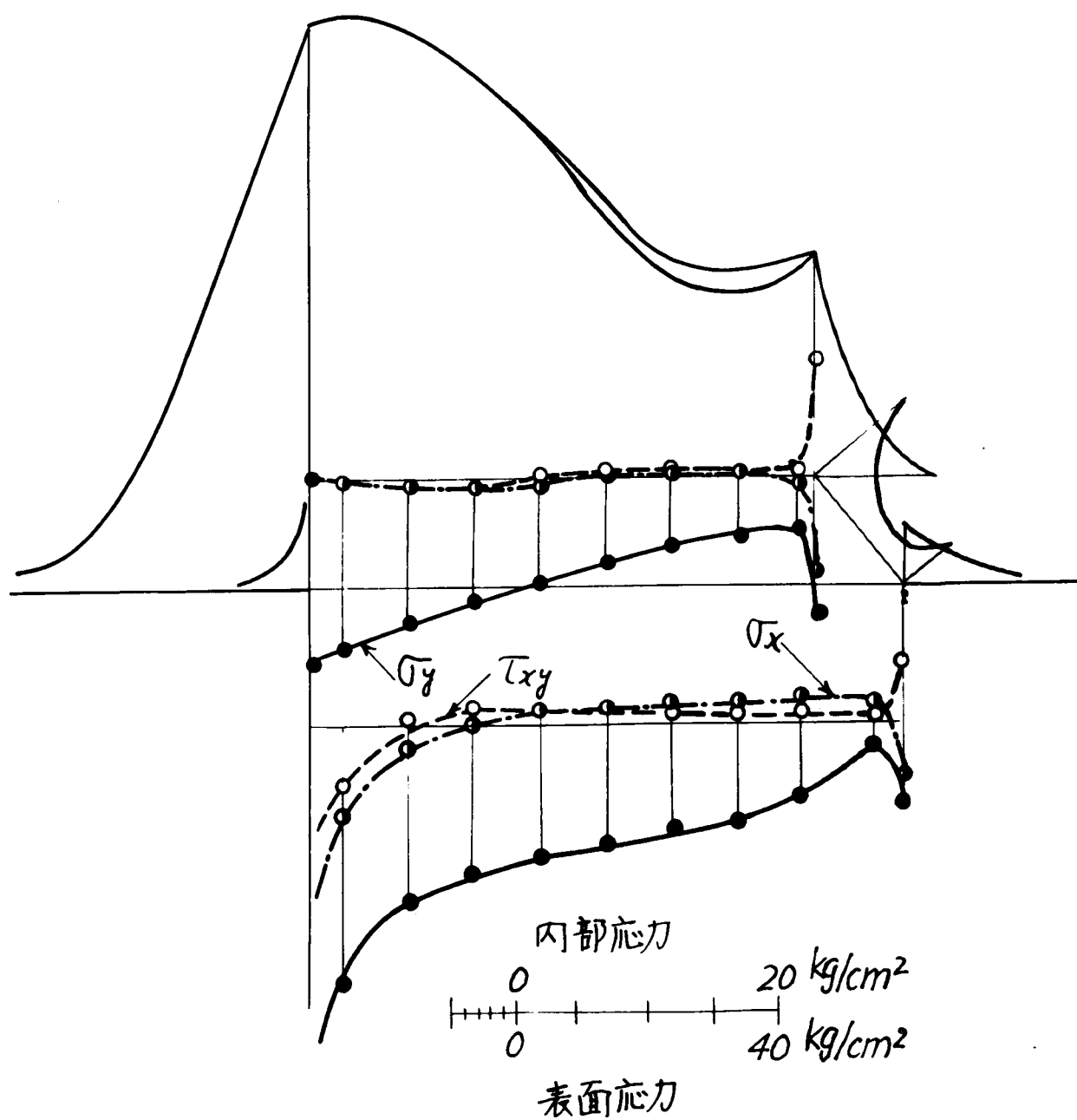
附図-I.3.4 上流面動水圧の作用による応力状態



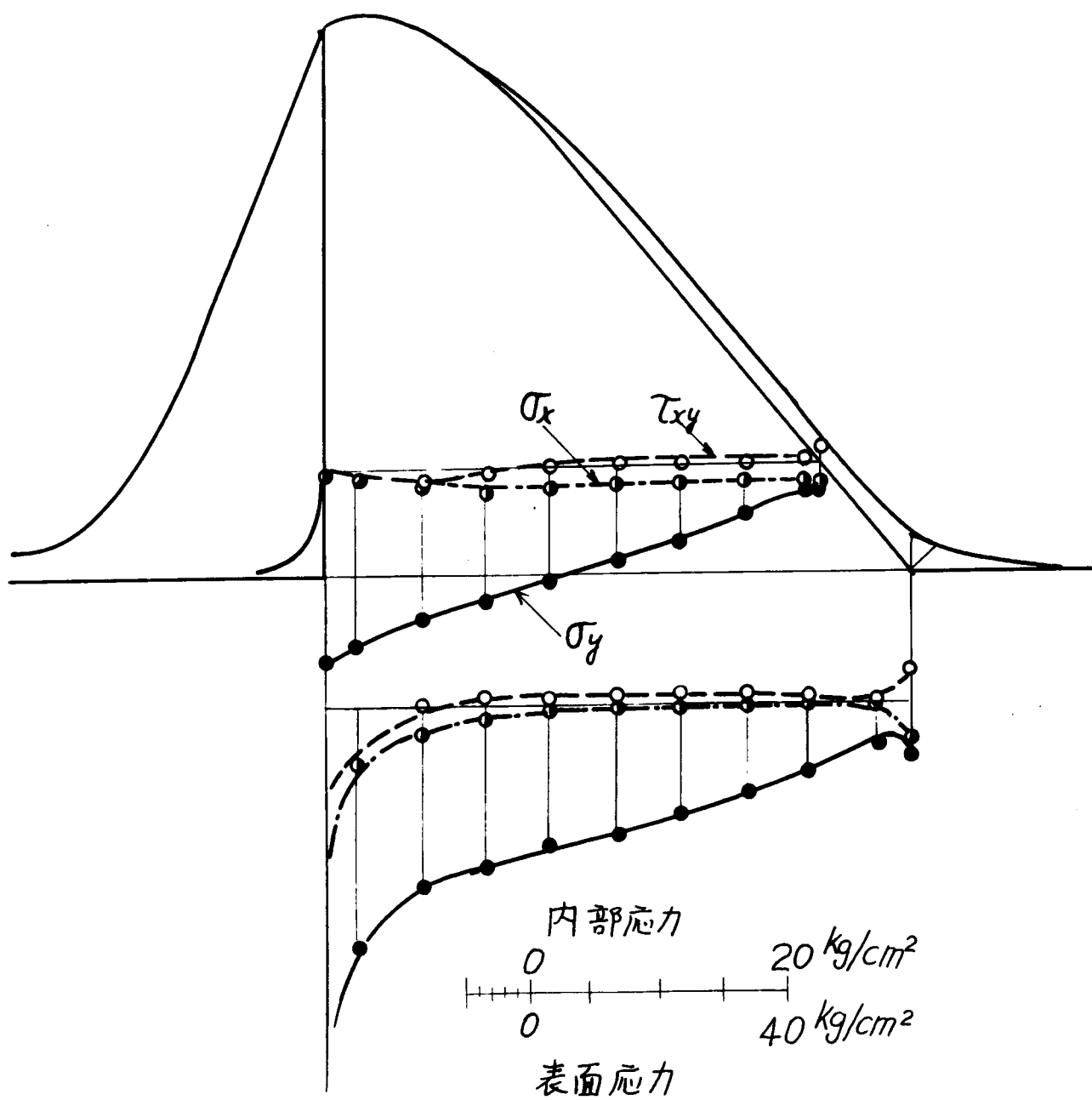
附図-I.3.5 下流面静水压の作用による応力状態



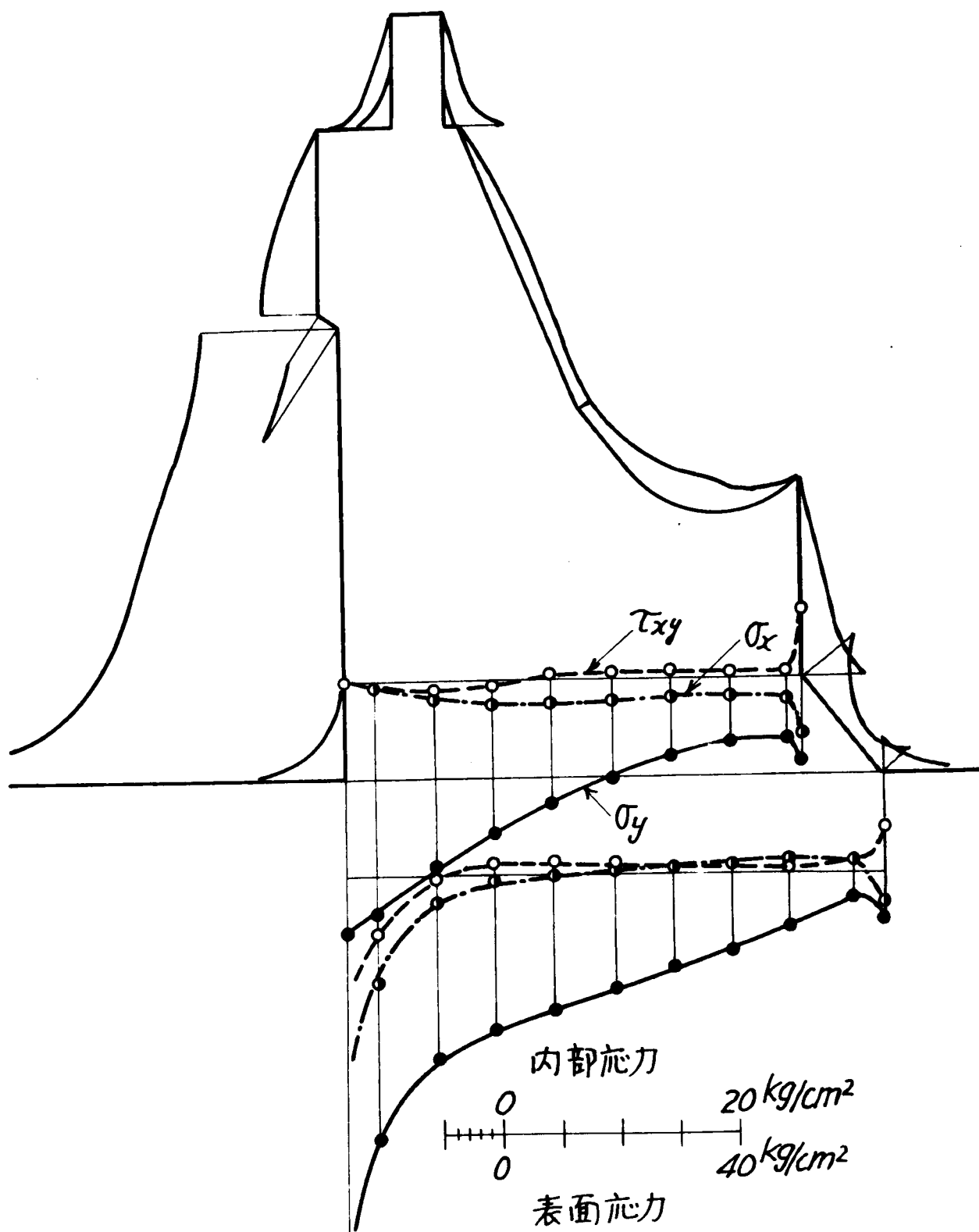
附図-I.3.6 自重の作用による応力状態
(a) IIIAの場合



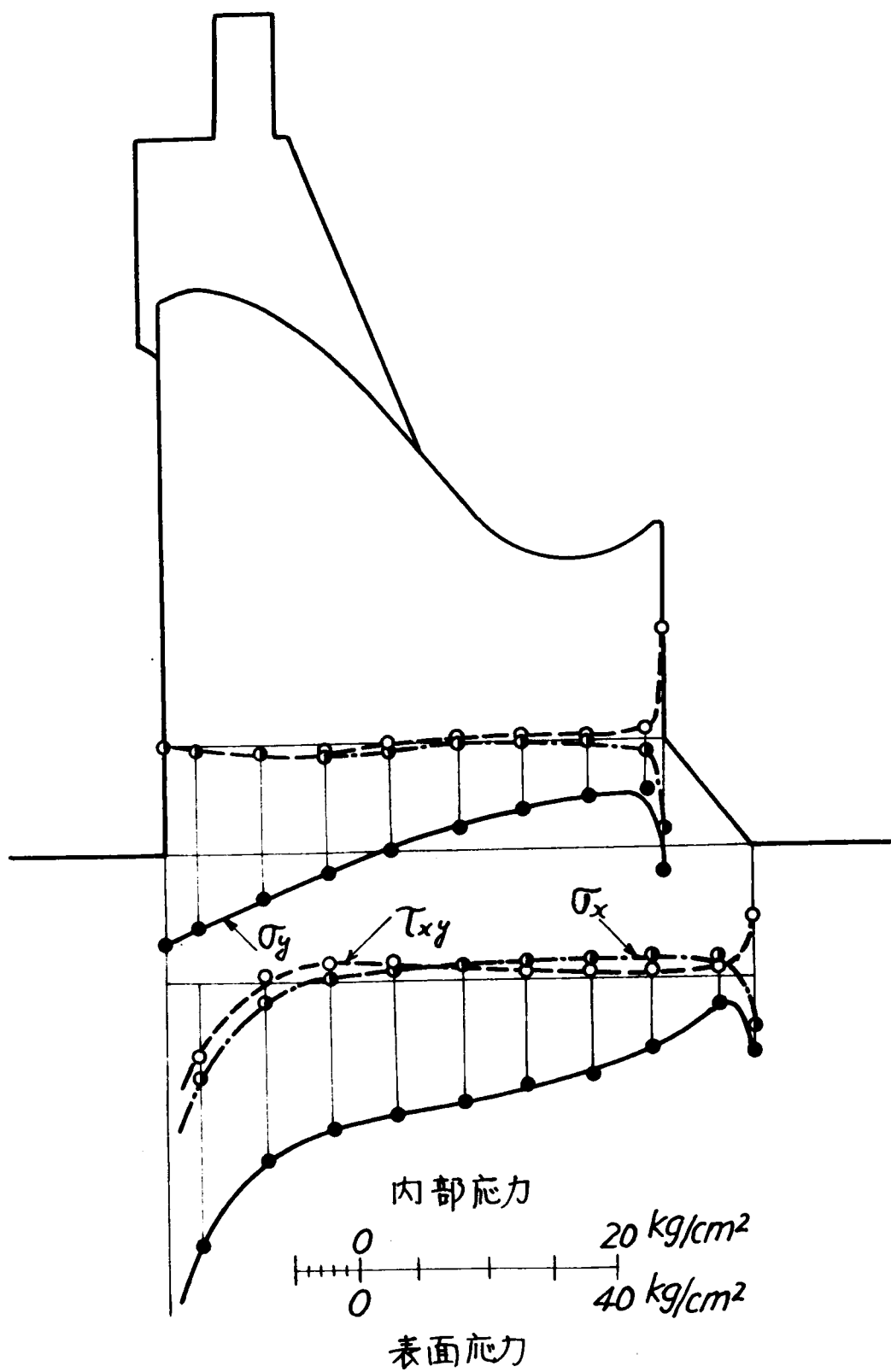
附圖-I·3·6
(b) IIIA'の場合



附図-I.3.7 自重の作用による応力状態

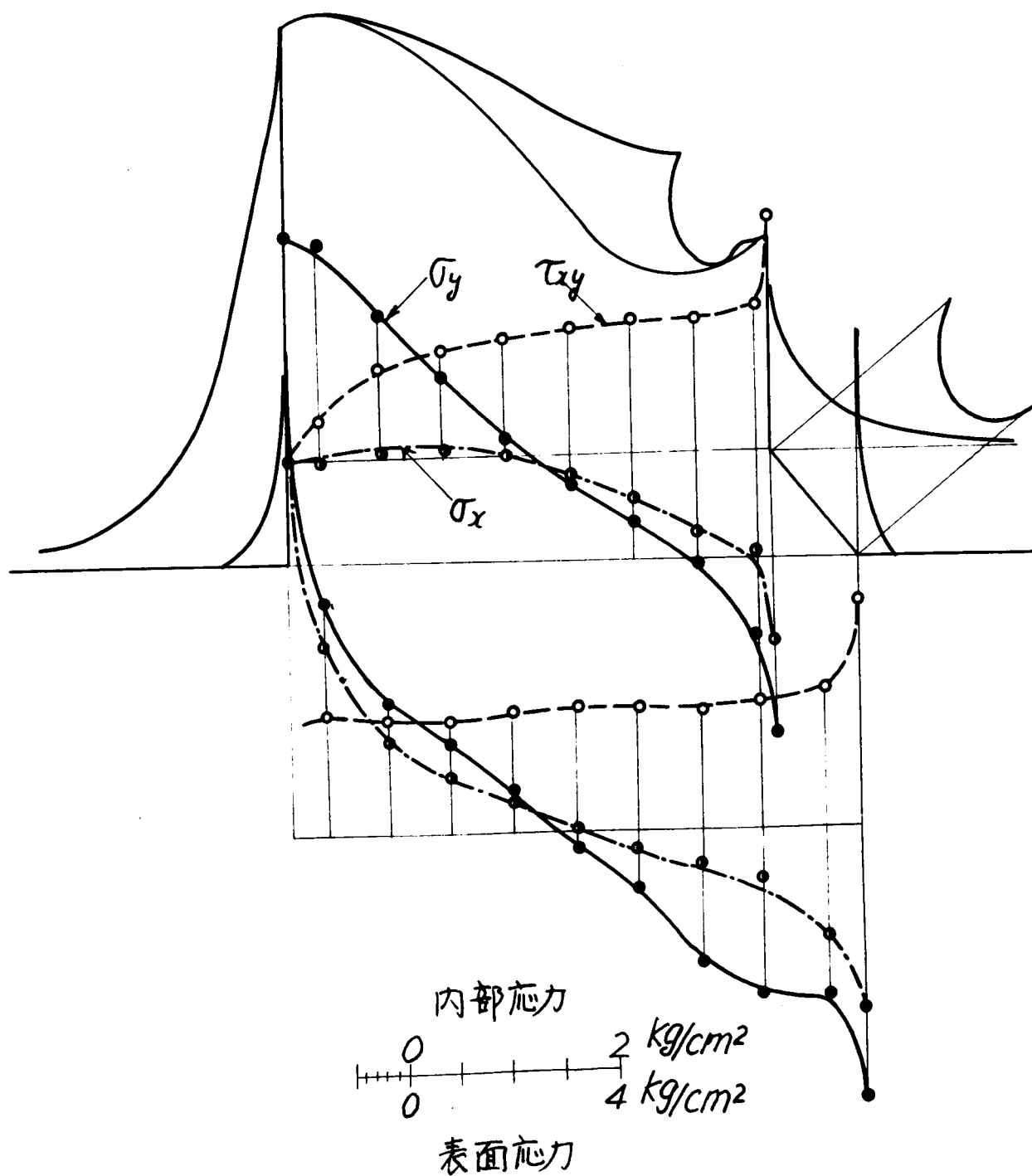


附圖-I.3.8 自重による応力状態



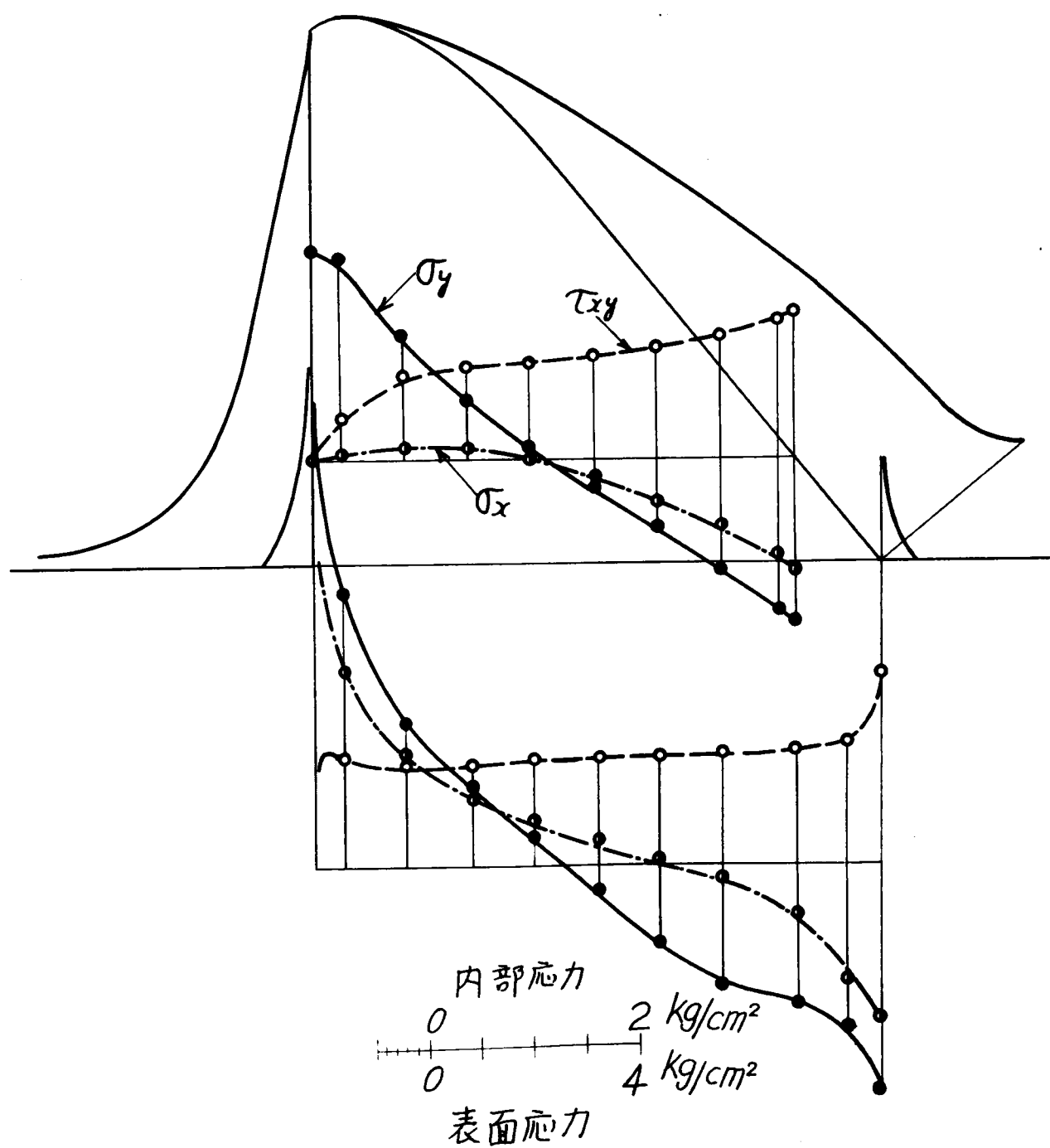
附図-I.3.9 水平地震力の作用による応力状態

(a) IV A の場合

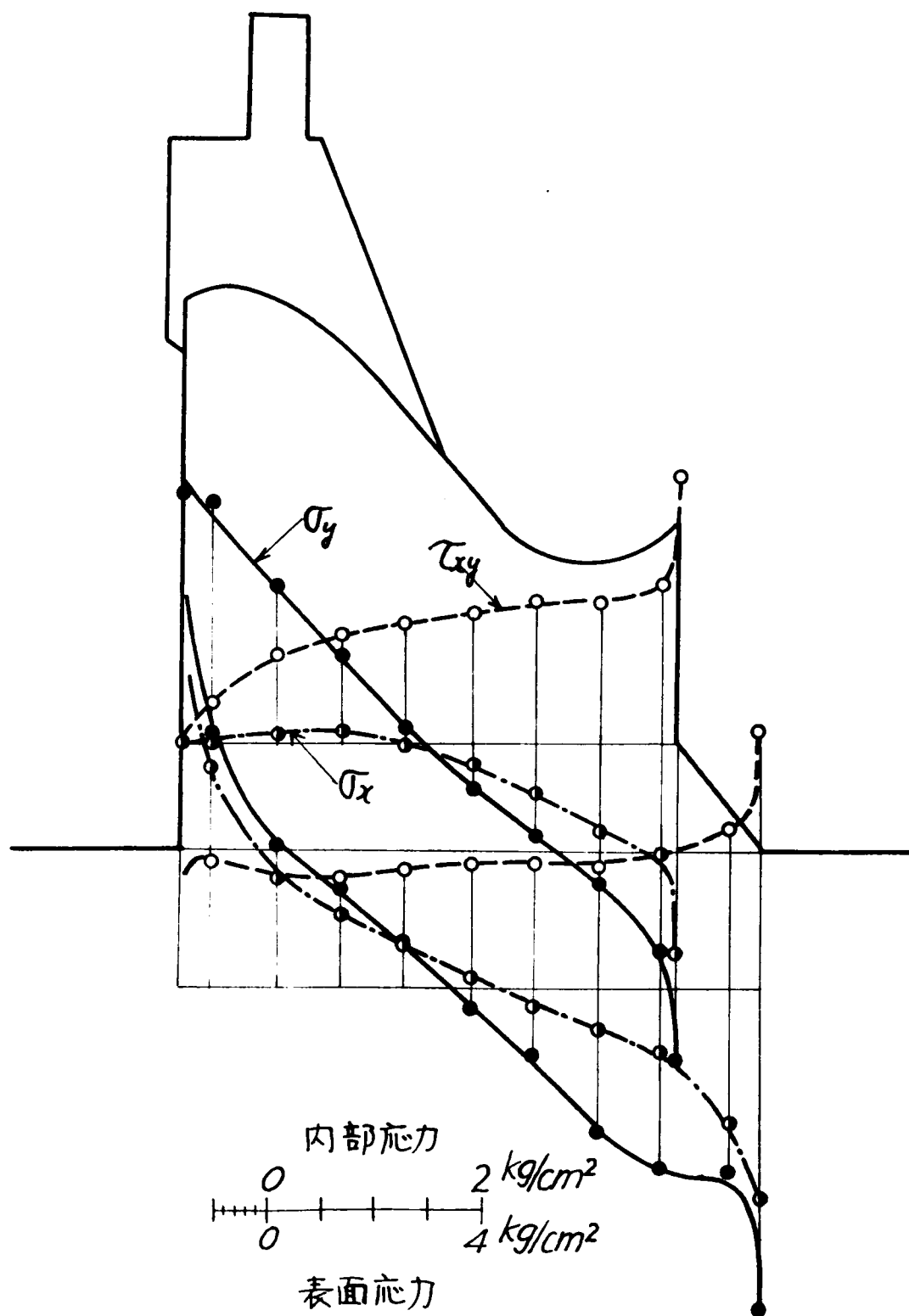


附図-I-39

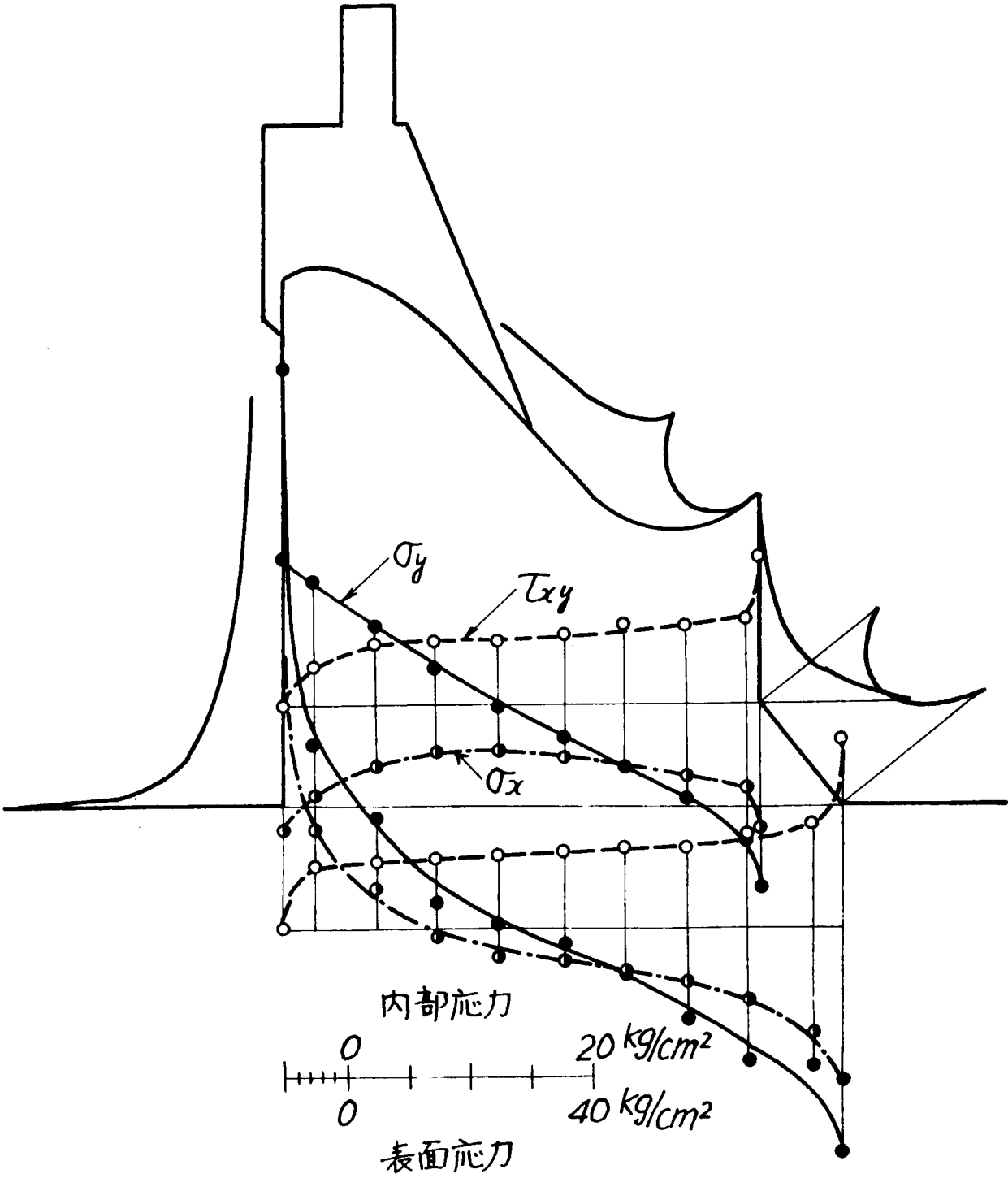
(b) IV A' の場合



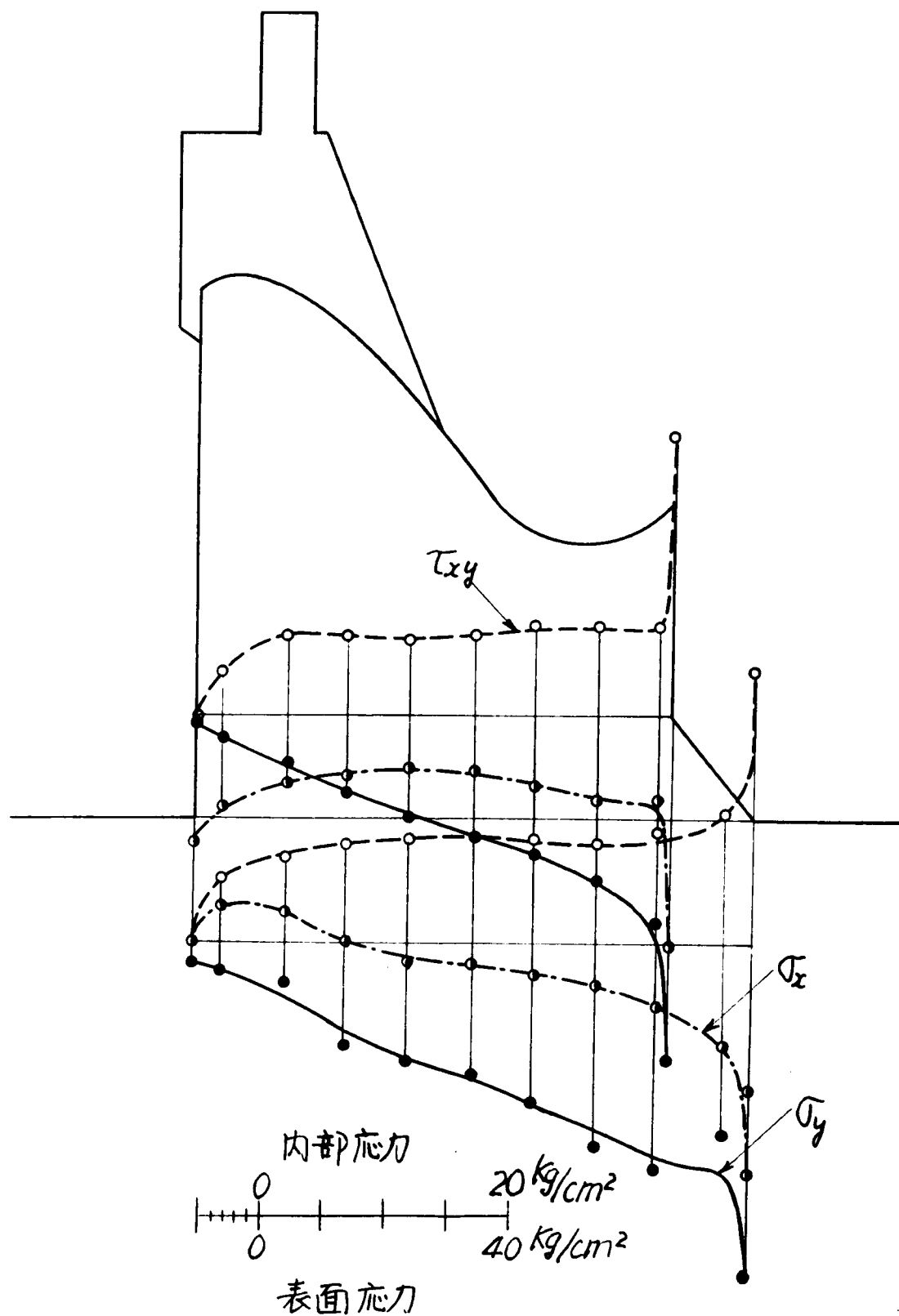
附図-I3.10 水平地震力の作用による応力状態
(橋脚附加)



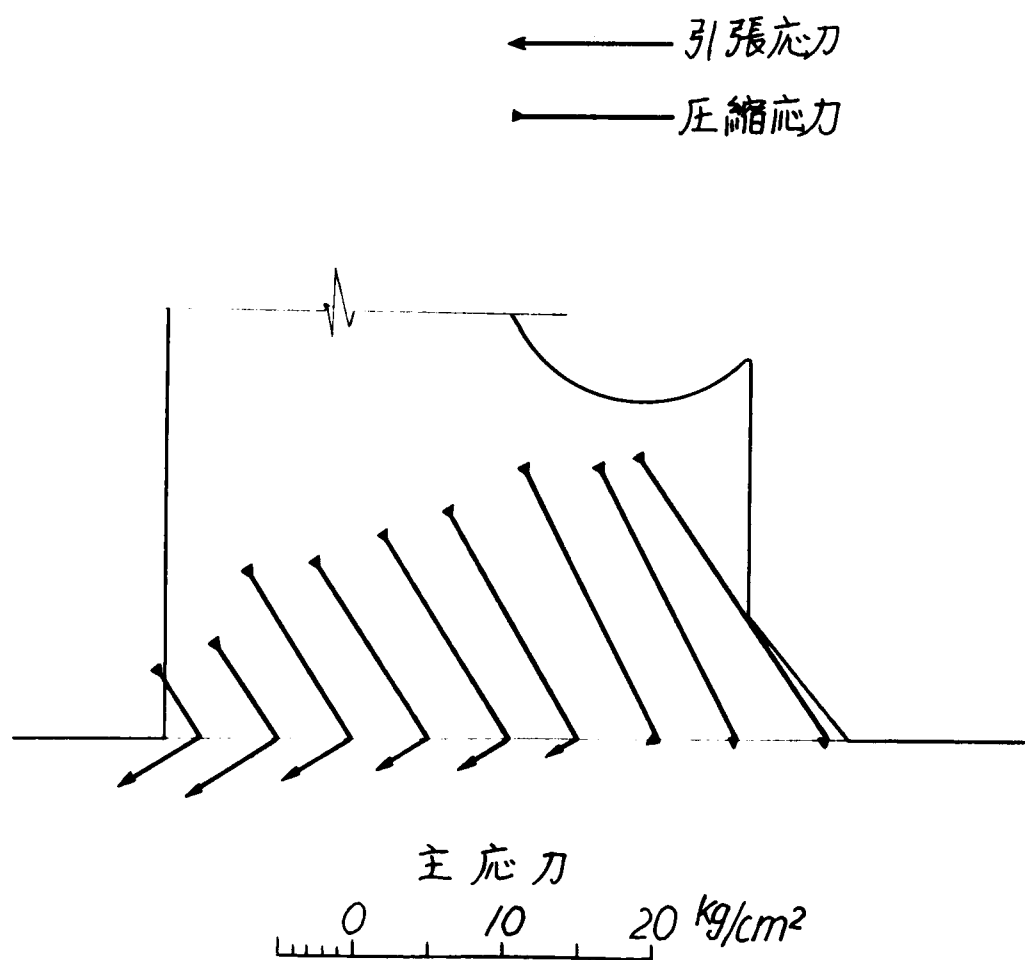
附圖-I·3// 上流面全荷重の作用による応力状態



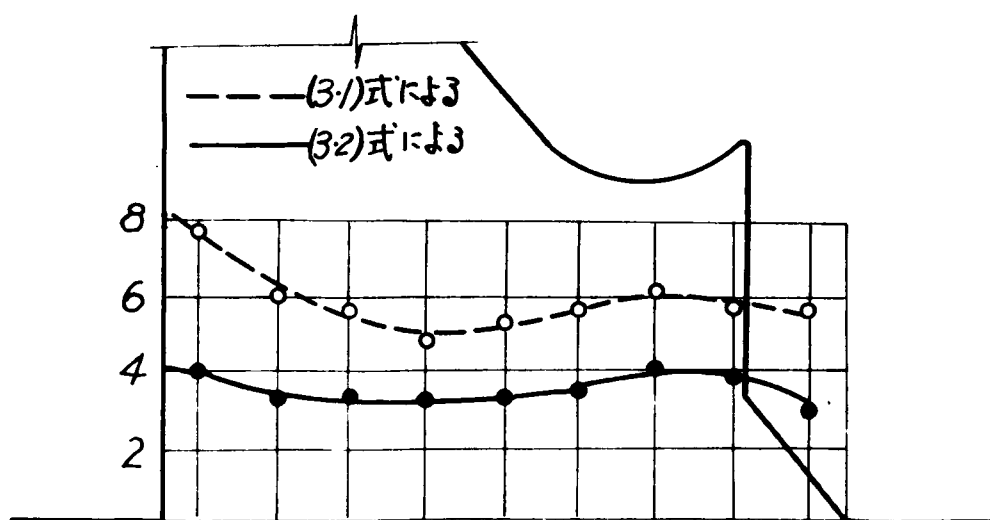
附図-I.3.12 上流面荷重, 下流向地震力および自重の作用による応力状態



附図-I.3.13 堤底面における主応力

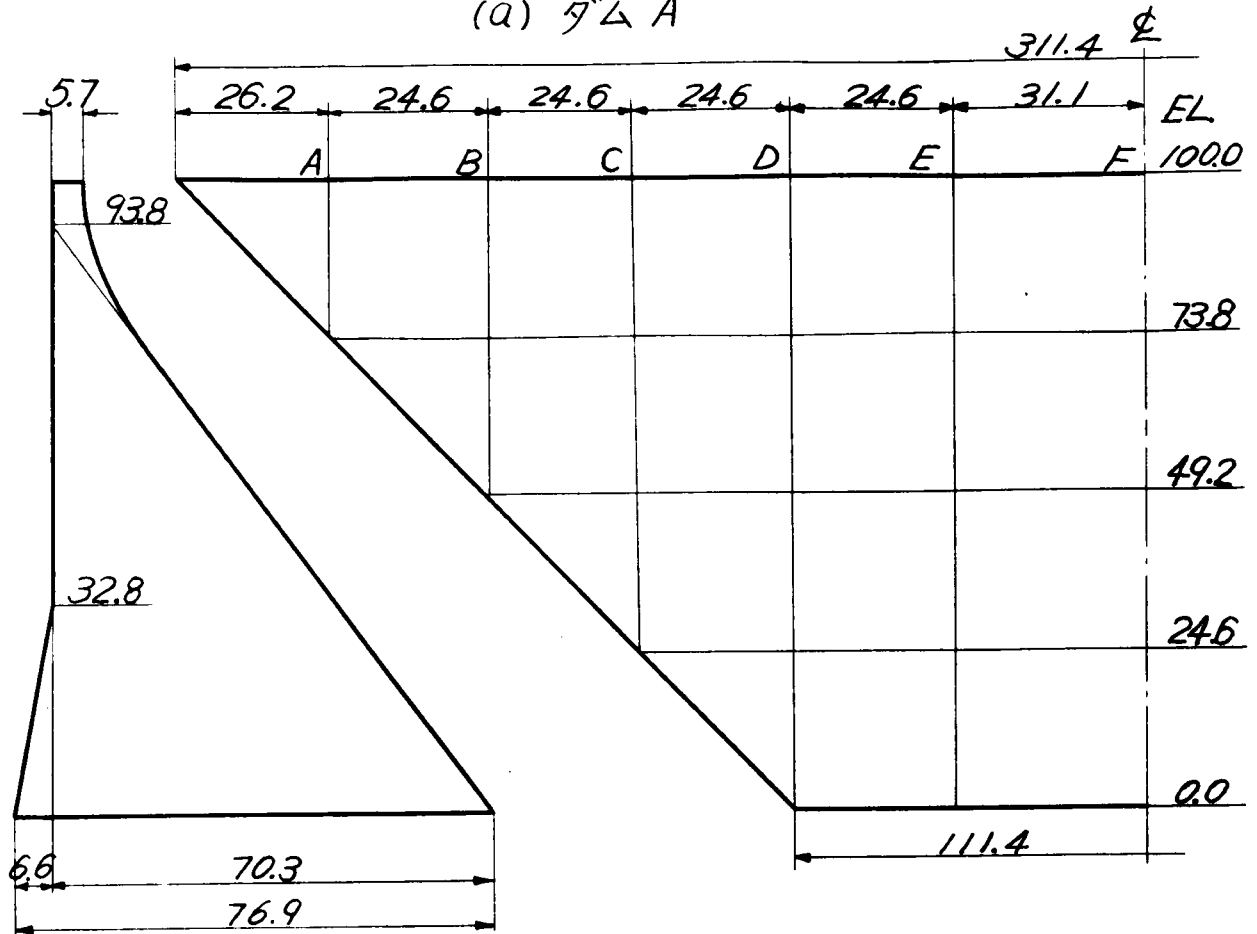


附図-I.3.14 堤底面に沿う剪断摩擦安全率

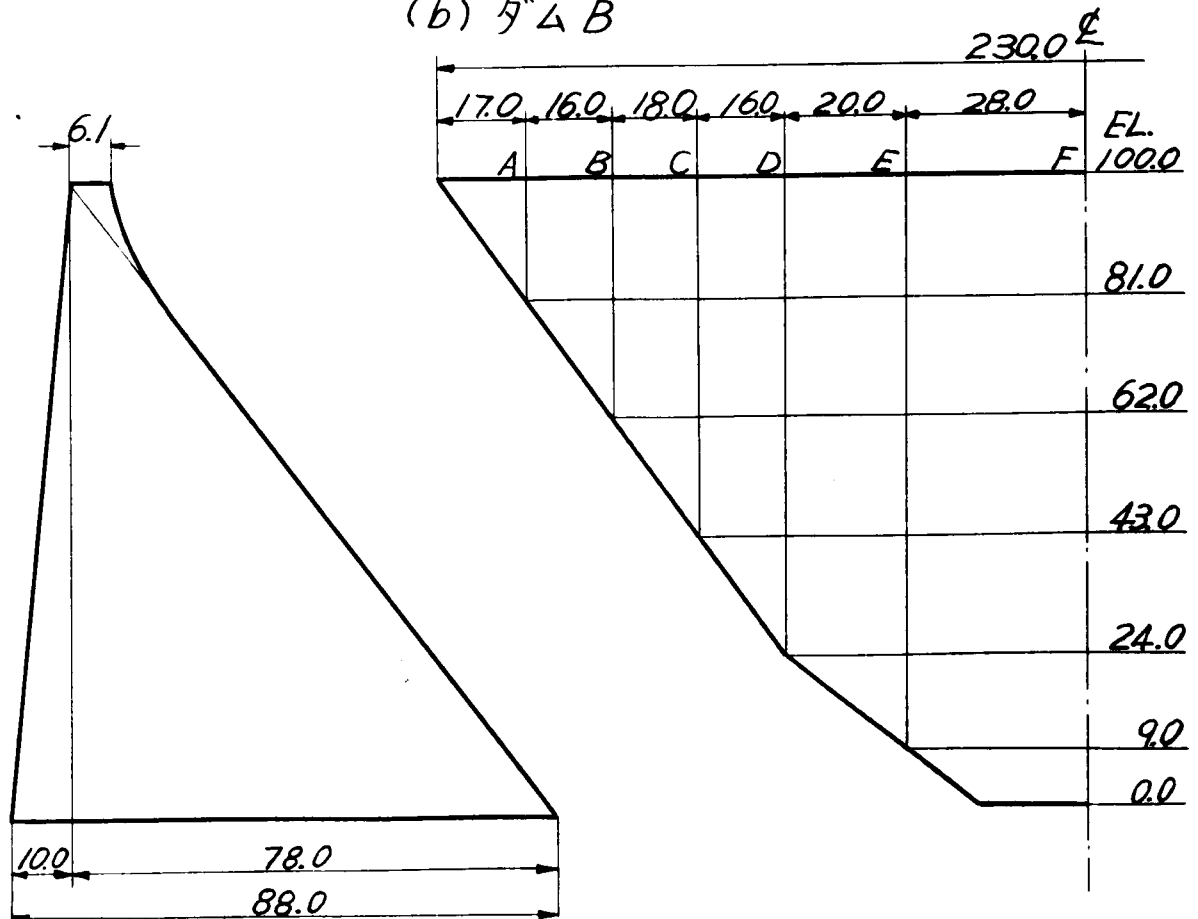


附図-I-3-15 ダムのかし

(a) ダム A

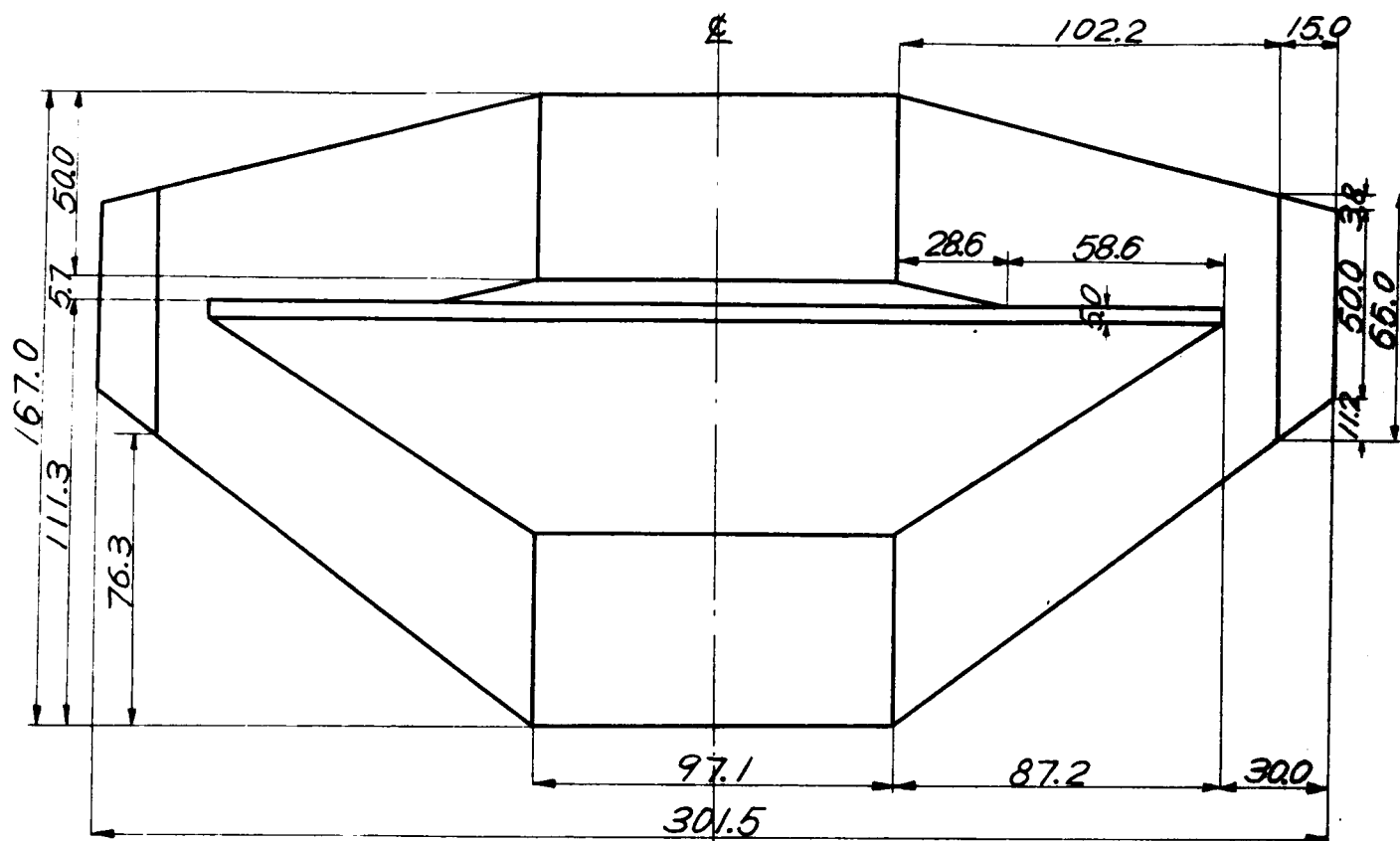


(b) ダム B

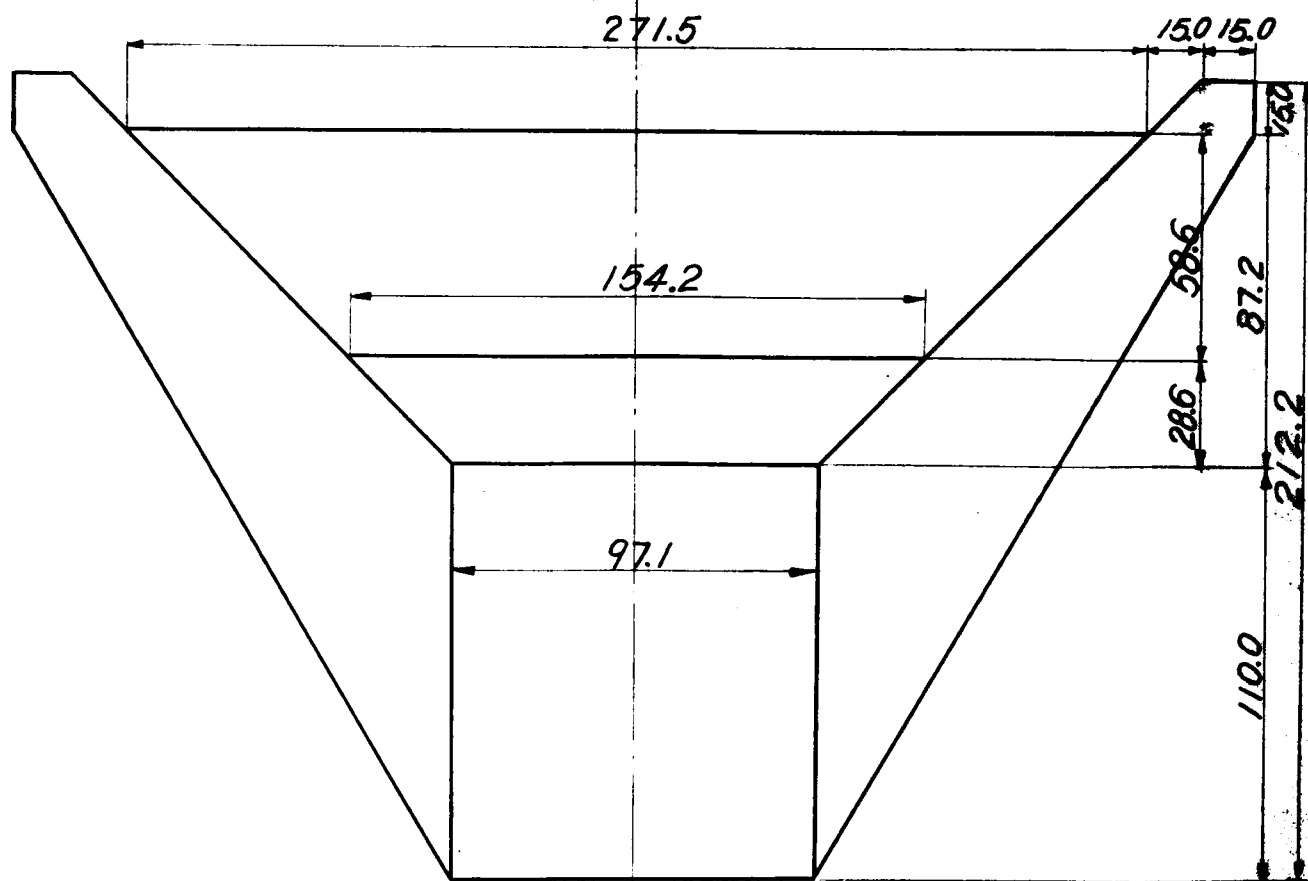


附図-I・3・16 ダム A の模型寸法

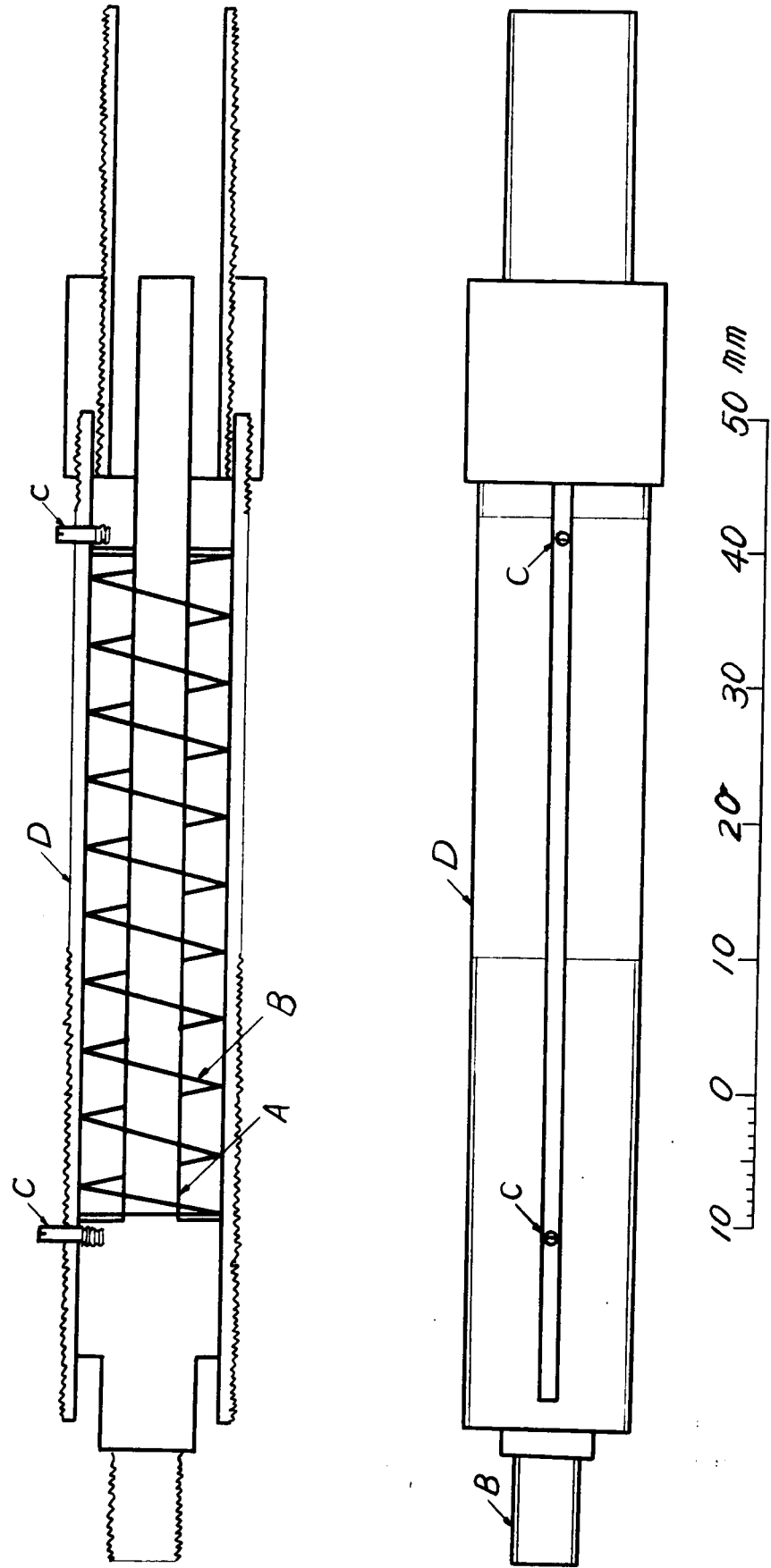
(a) 平面图



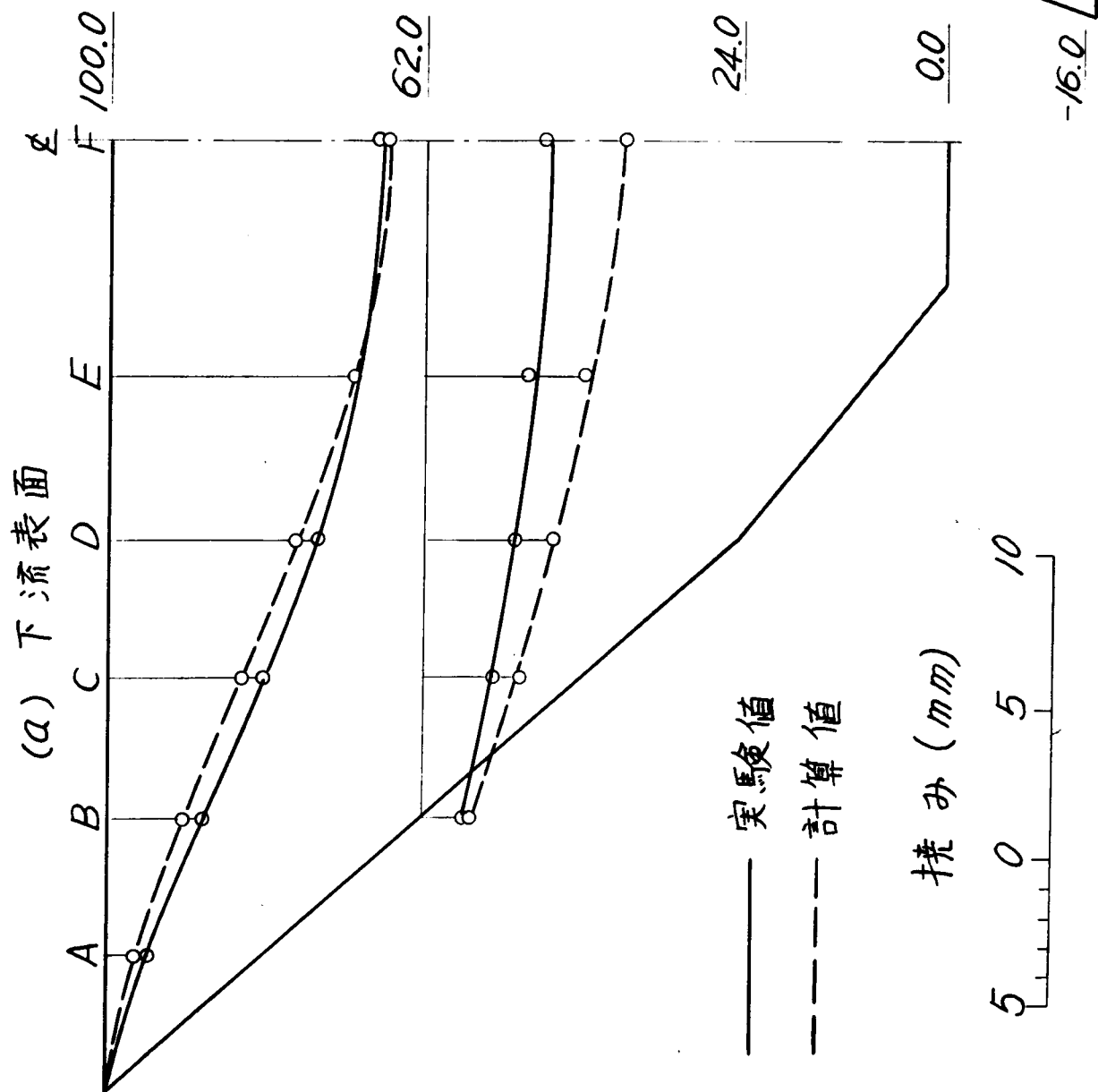
(b) 背面図



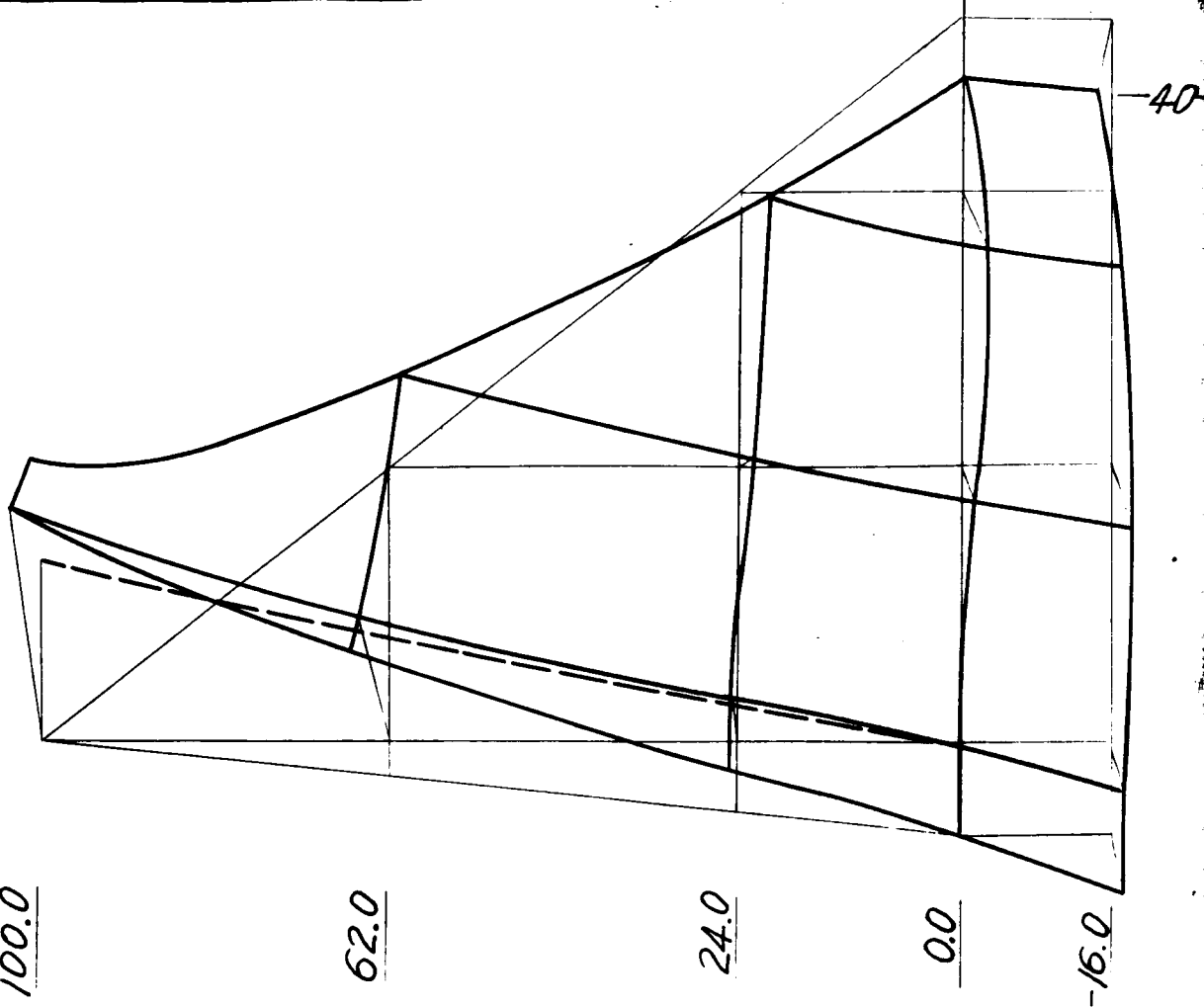
附圖-I·3·17 加壓裝置



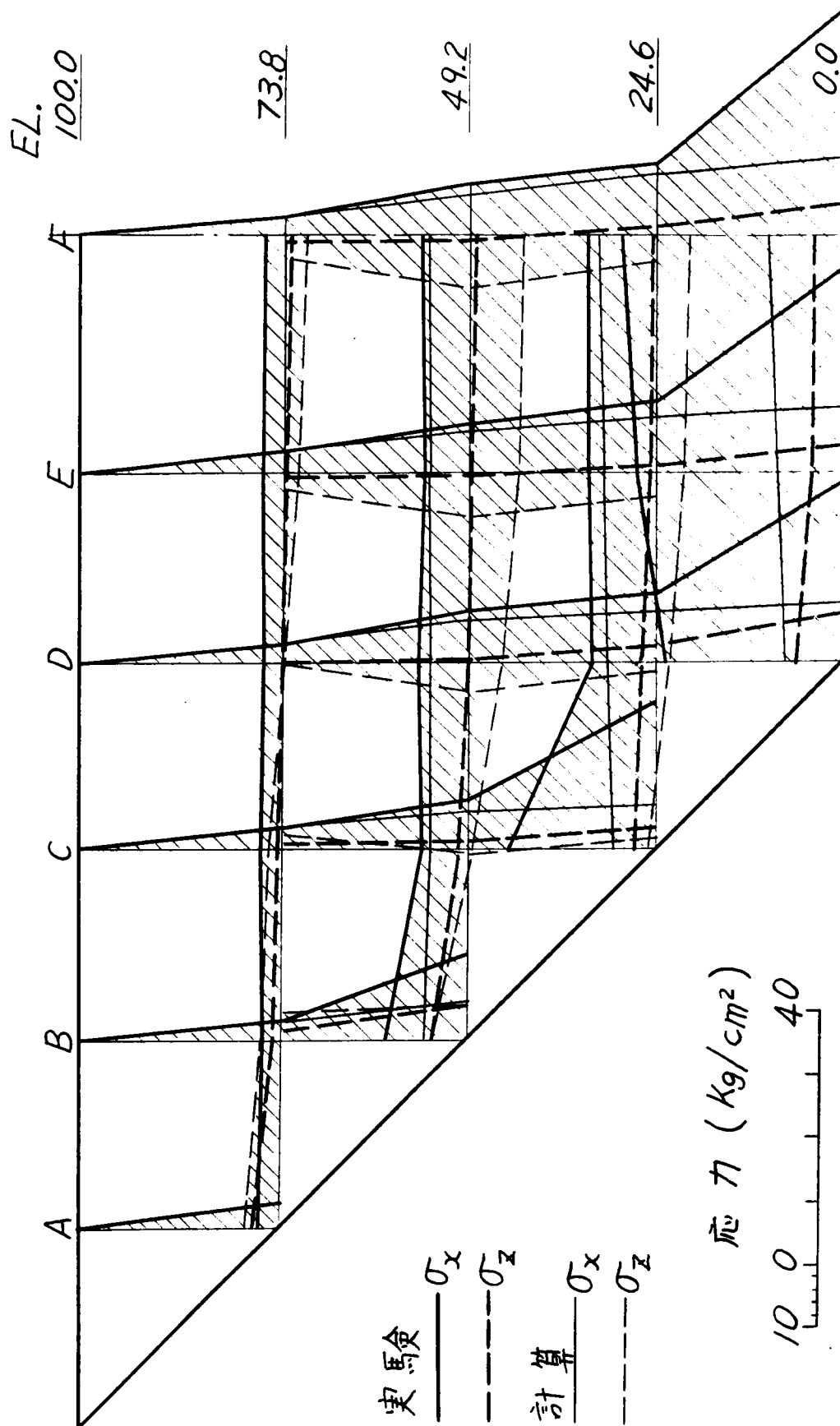
附図-I・3・19 ダムBの変形状態



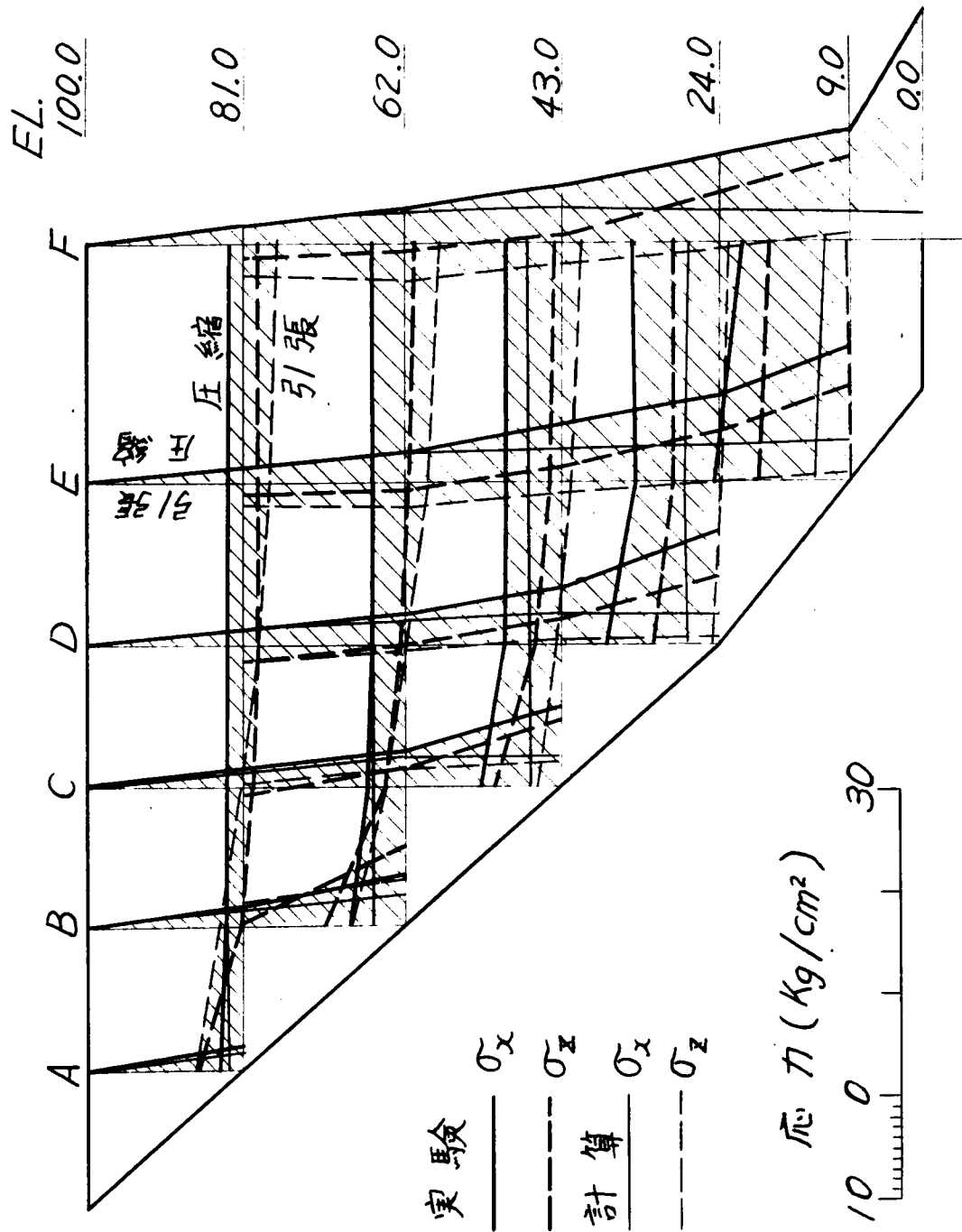
(b) 片持梁F断面



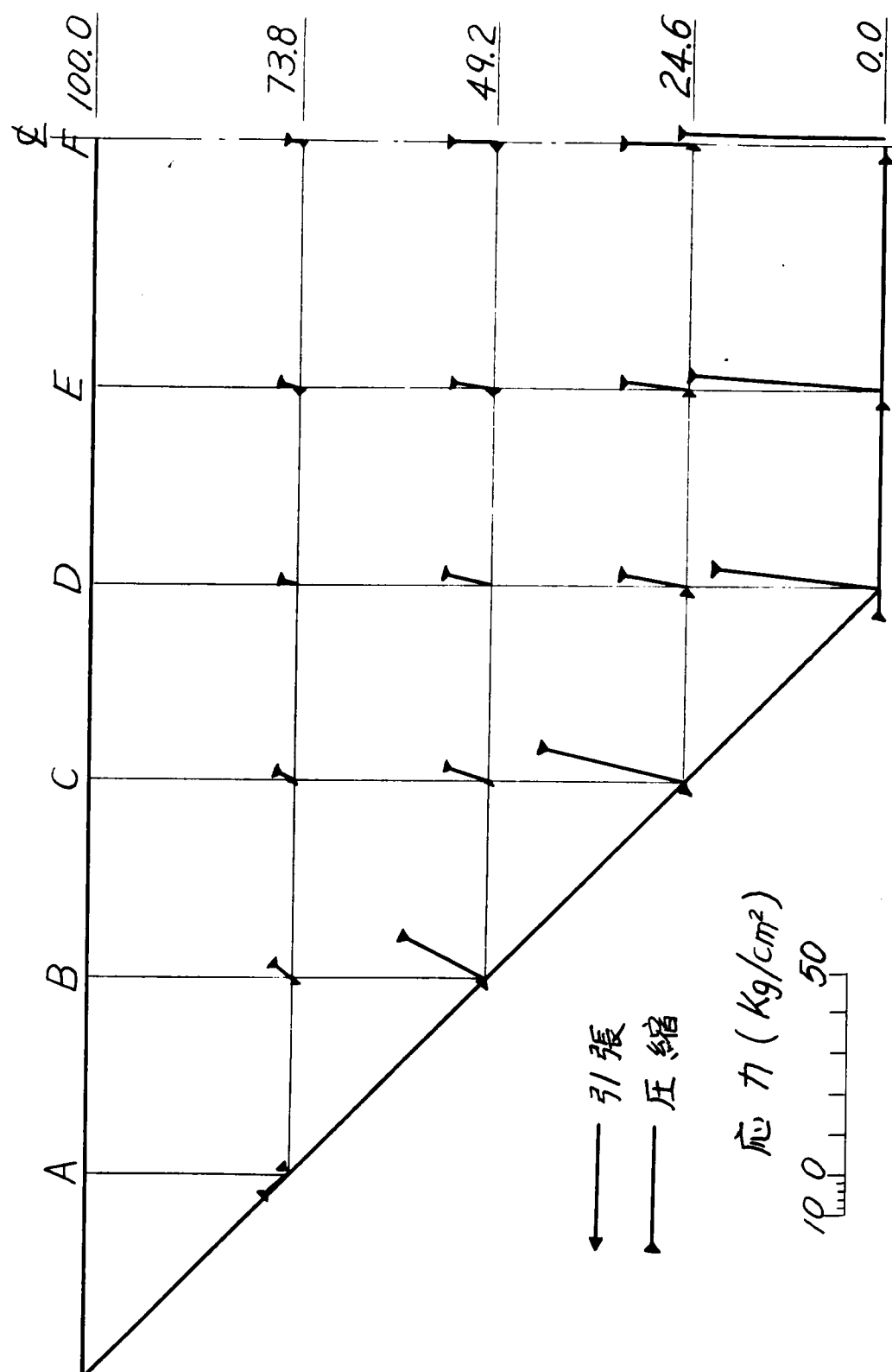
附図-I-3-20 ダムAの下流表面直応力



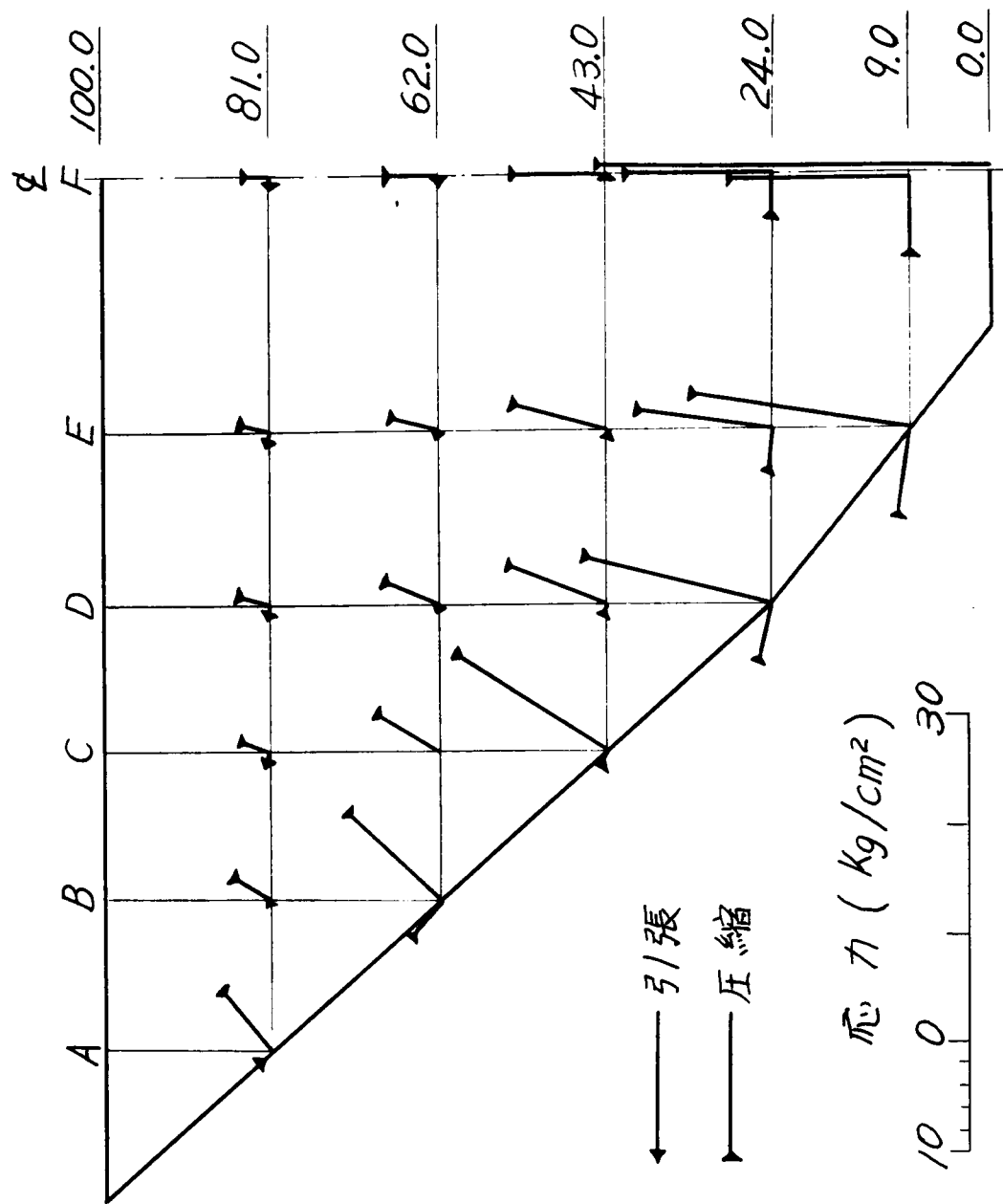
附図-I.3.21 ダムBの下流面直応力



附圖-I・3・22 ダムAの下流面主応力



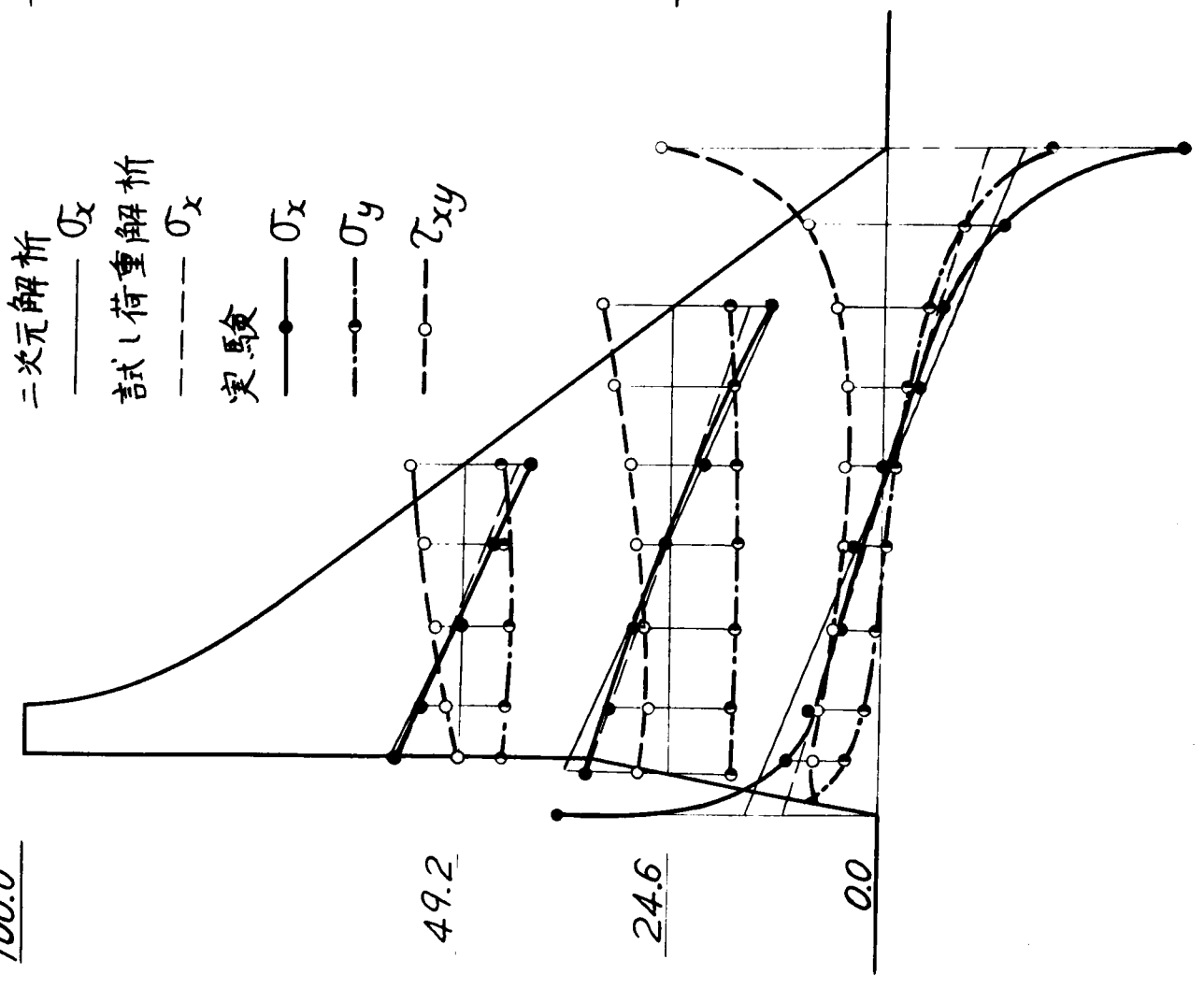
附図-I・3・23 ダムBのF流面主応力



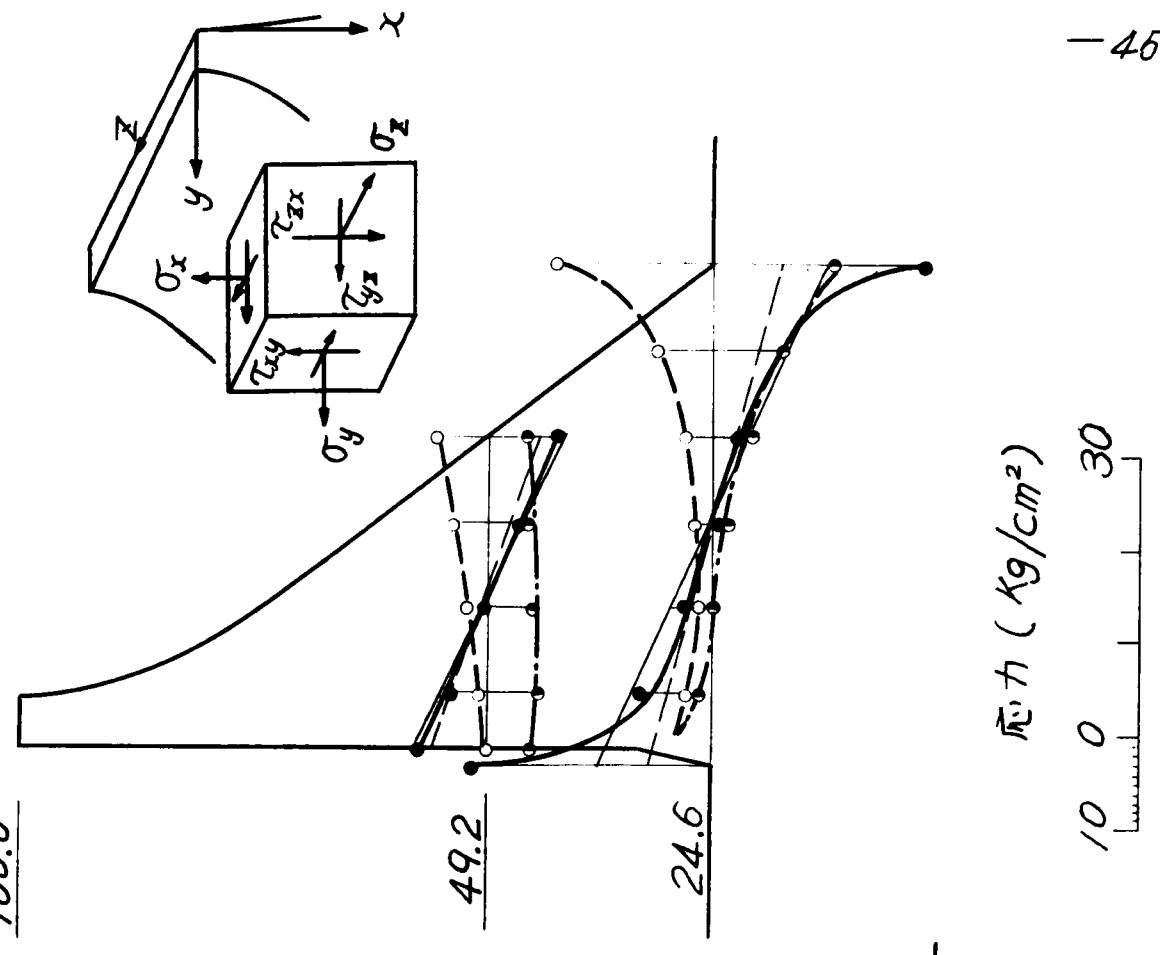
附図-I.3.24 ダムA 片持梁の応力状態

(a) 片持梁 F

EL. 100.0

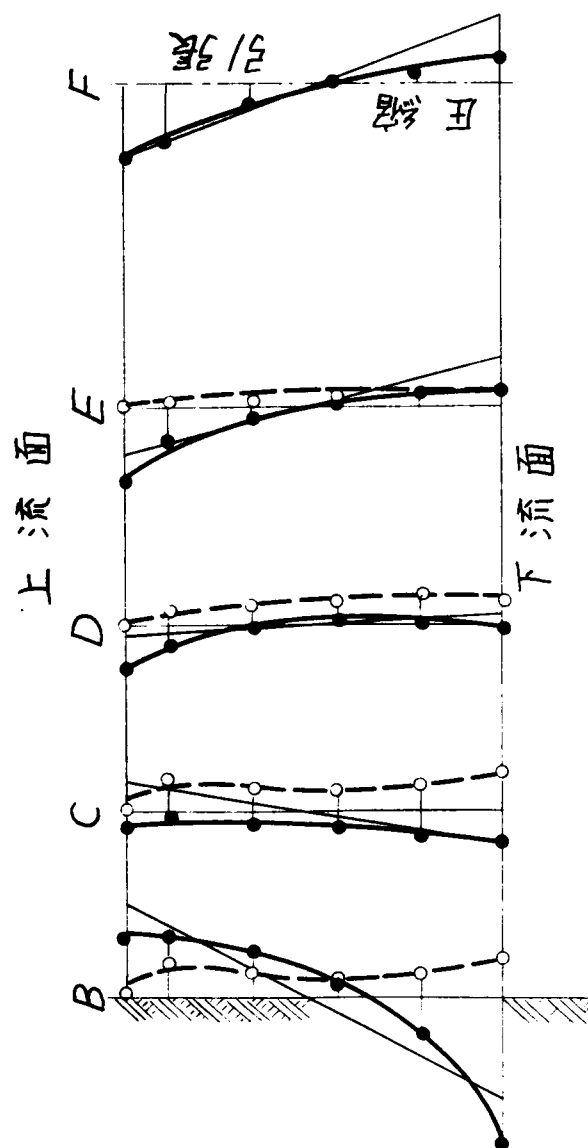


EL. 100.0
(b) 片持梁 C



附図-I-3-25 ダムA 水平梁の応力状態

(a) 水平梁 EL. 62.0

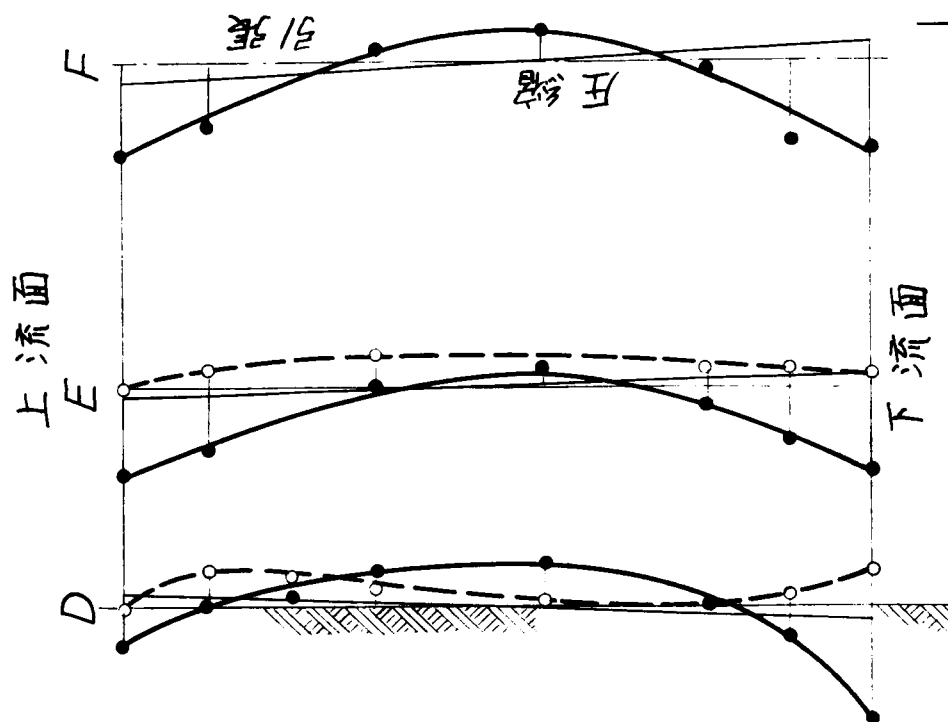


実験値 σ_z τ_{yz}

計算値 σ_z

応力 (kg/cm²)

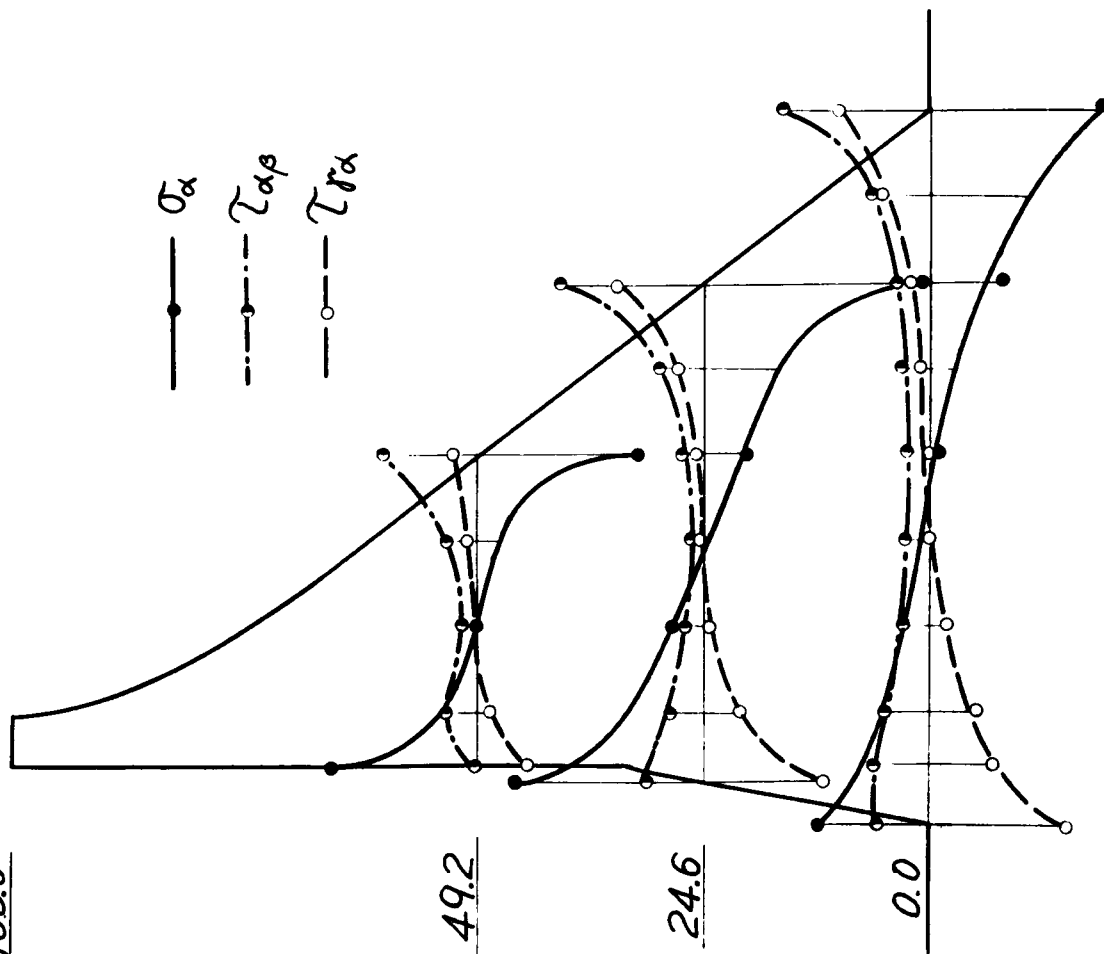
(b) 水平梁 EL. 24.0



附図-I・3・26 アバットメントにおける応力状態

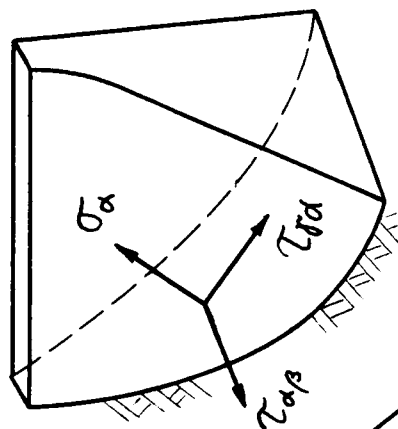
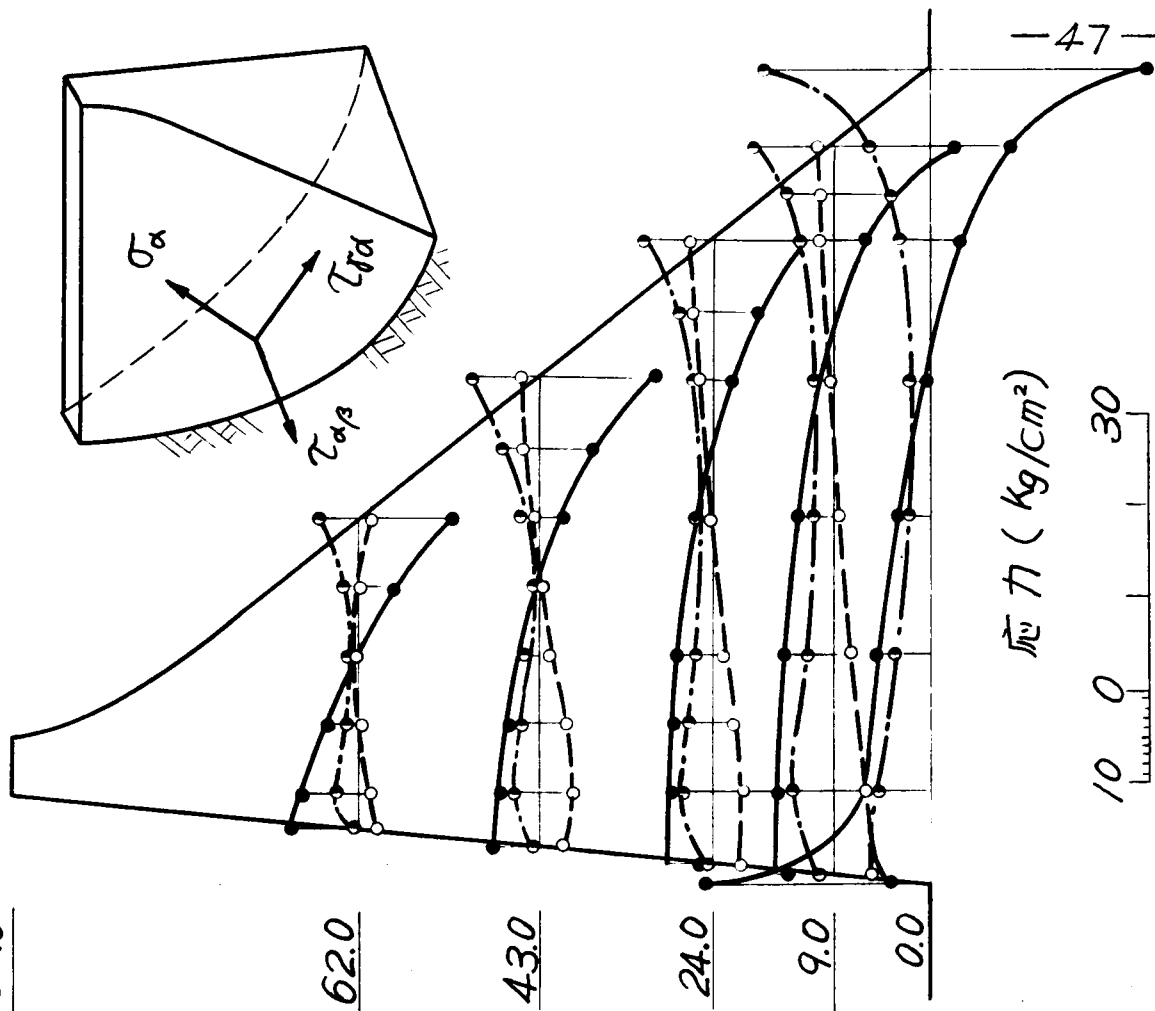
(a) ダム A

EL.
100.0



(b) ダム B

EL.
100.0

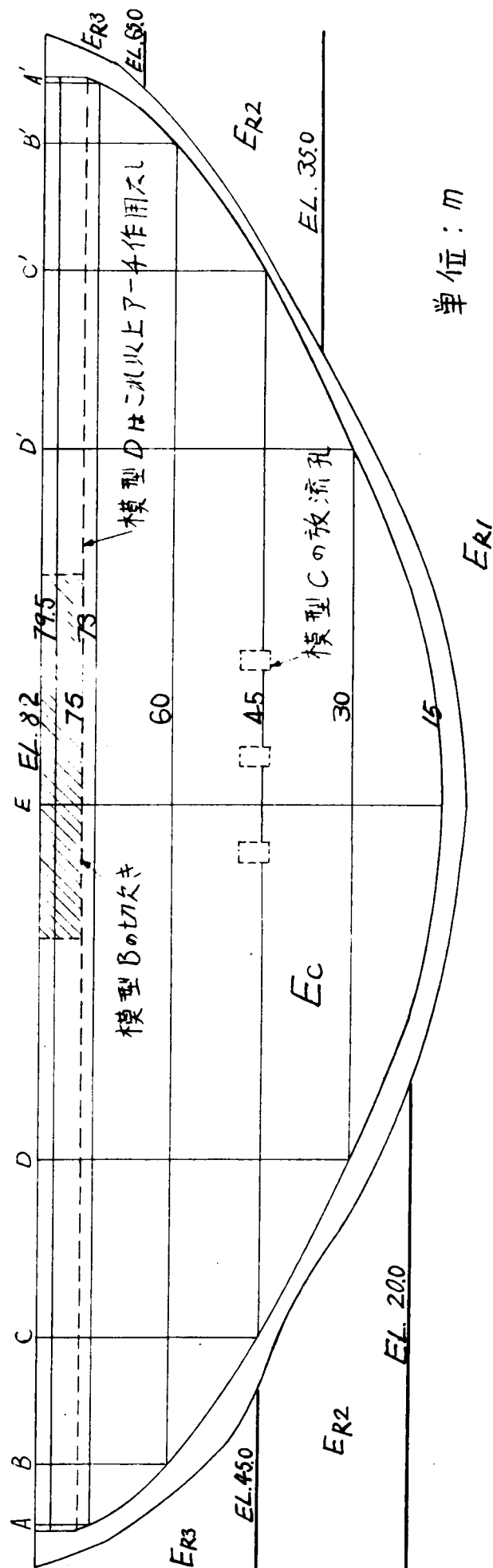


応力 (kg/cm²)

10 0 30

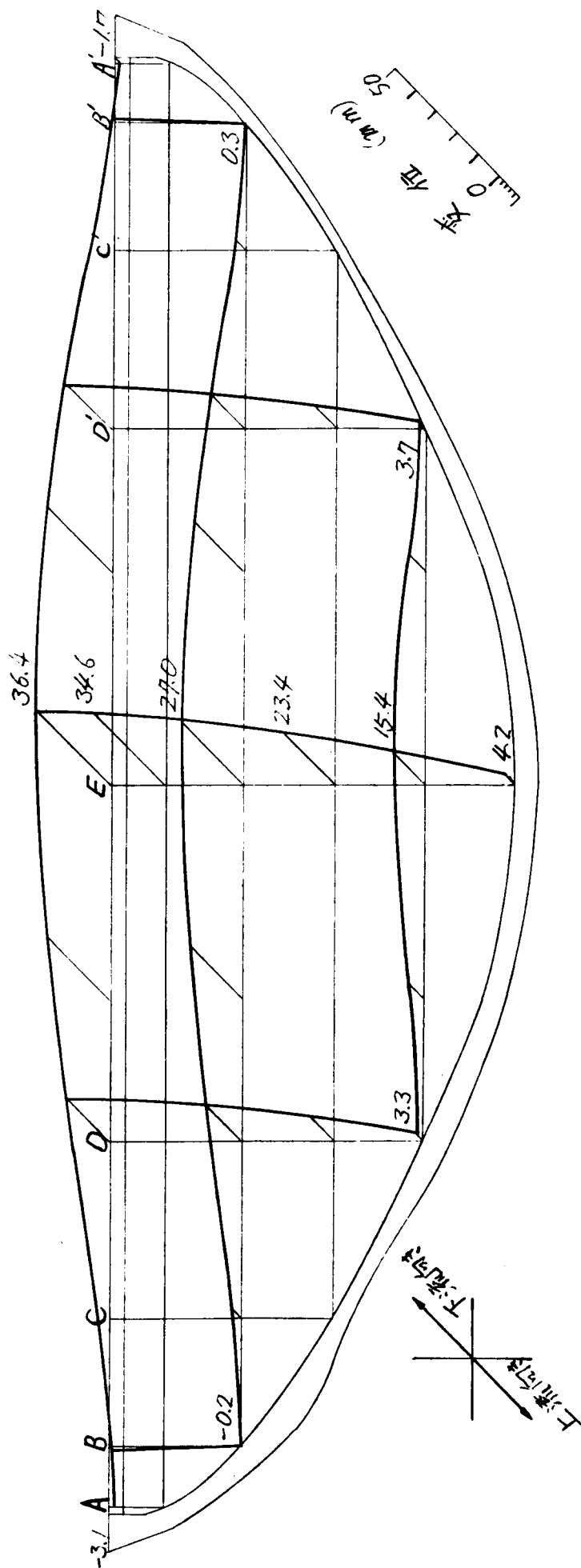
-47-

附図-I-3-27 ダムの形と弾性係数

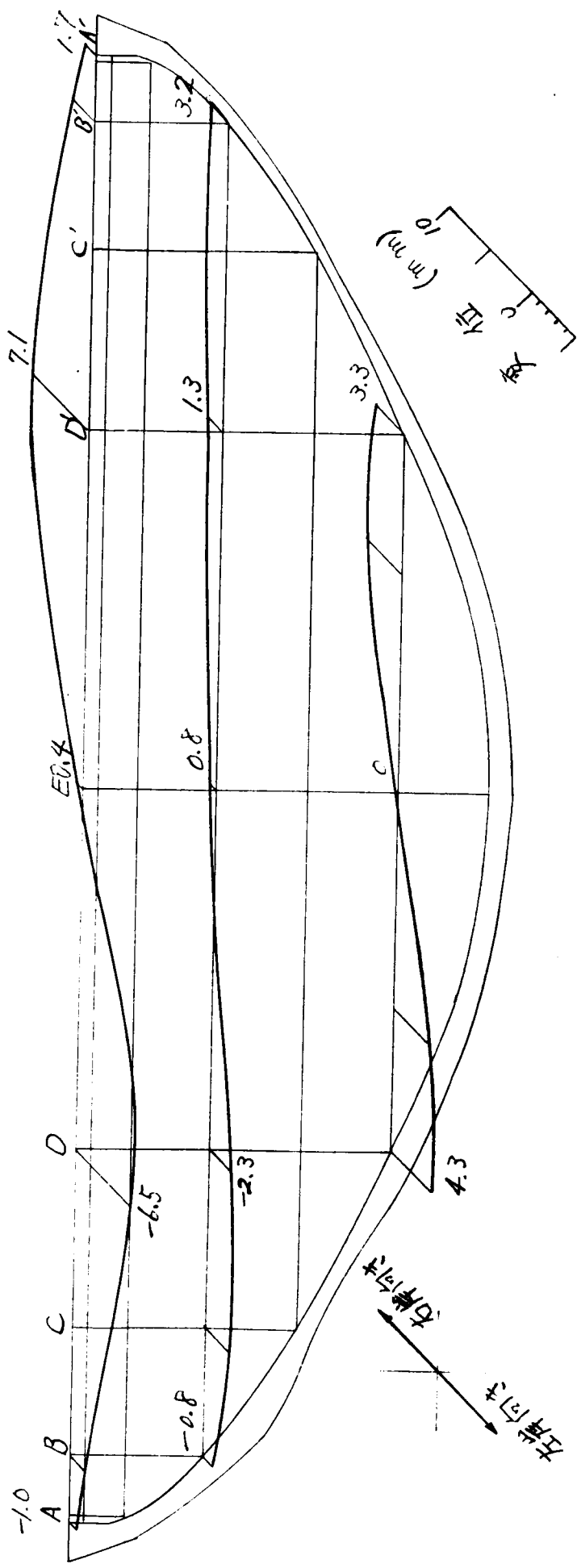


単位: m

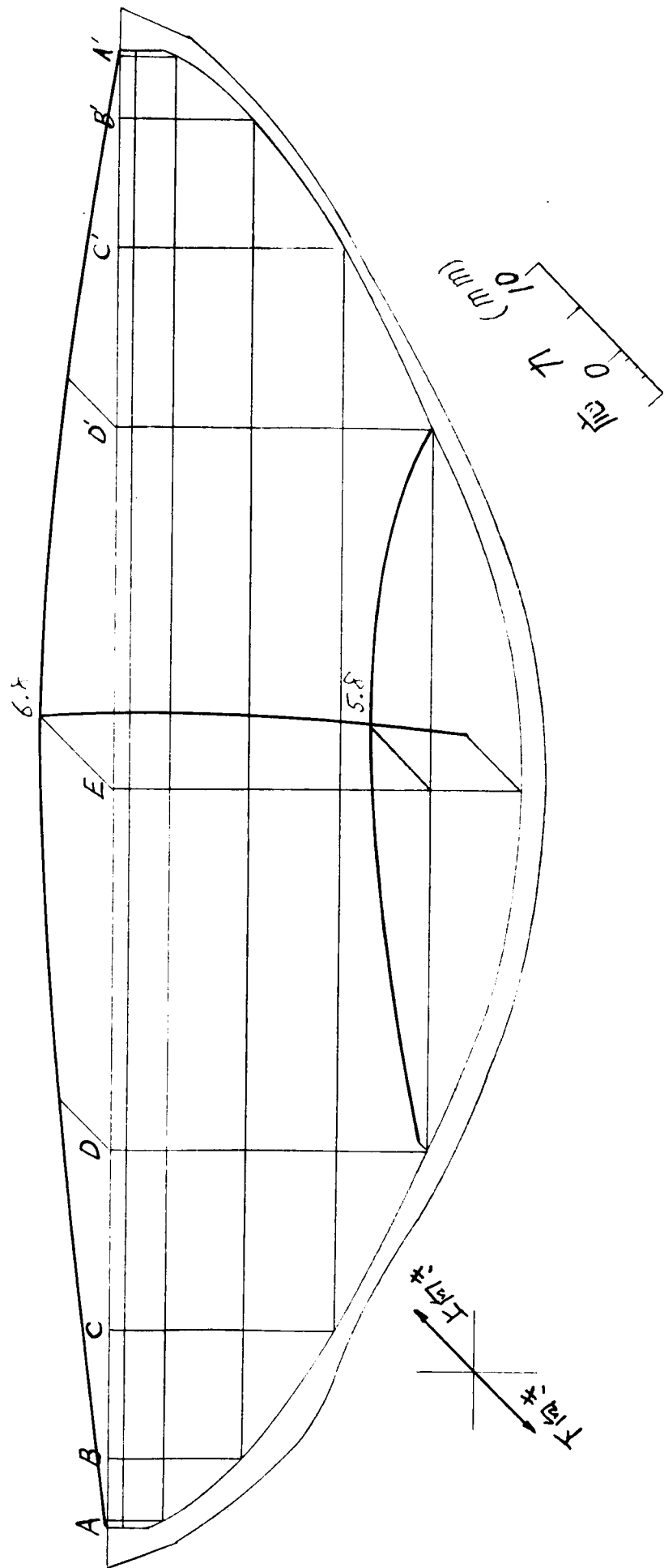
附圖-I.3.28 模型Aの半径方向変位



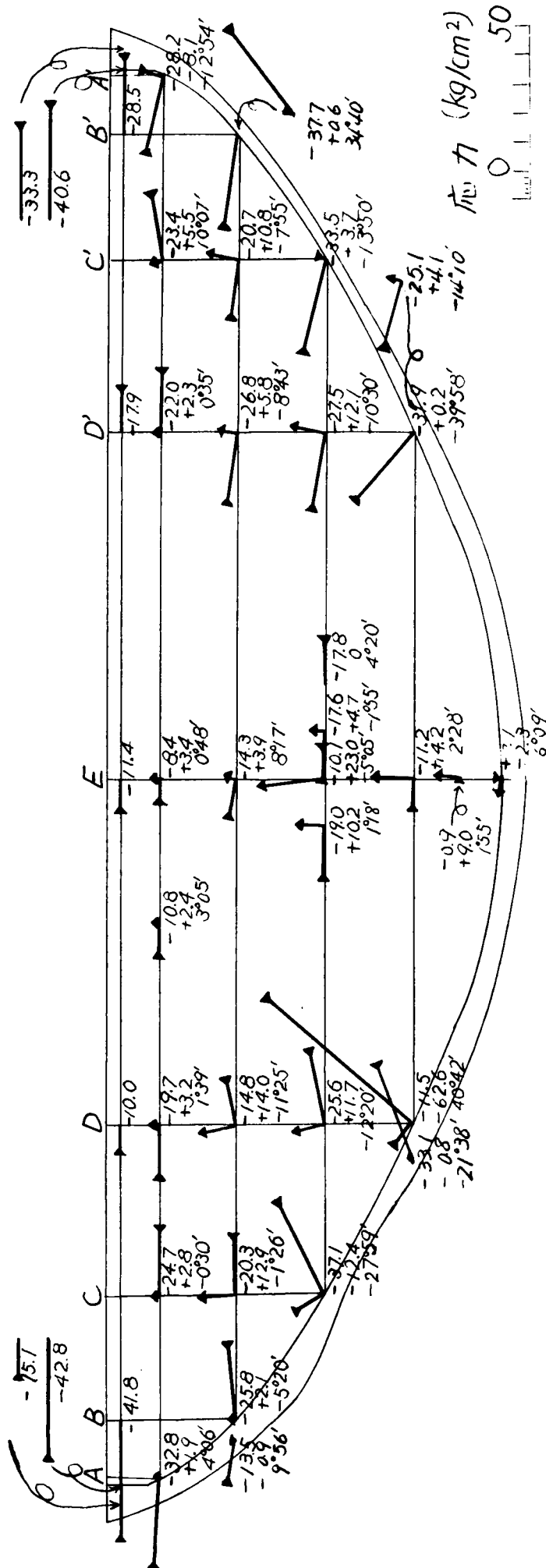
附圖-I.3.29 模型 A の撓線方向変位



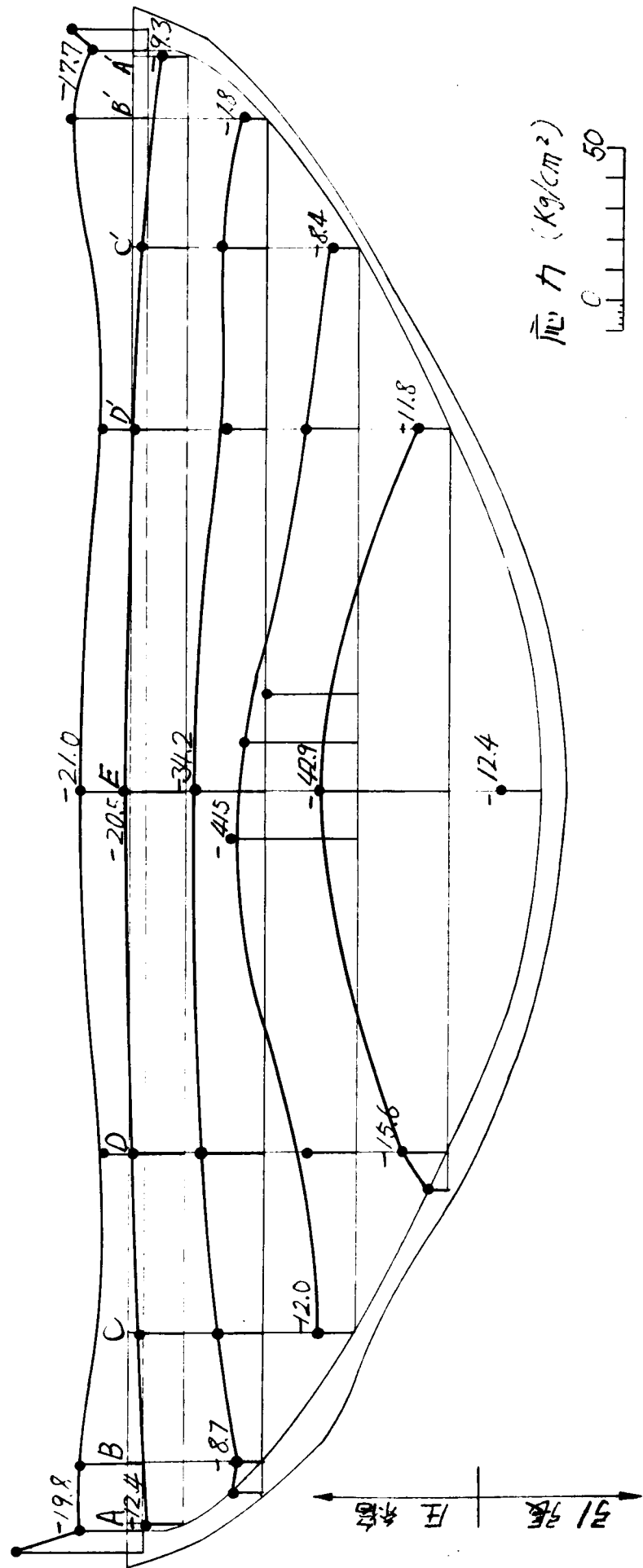
附圖-I-330 模型 A 的鉛直向變位



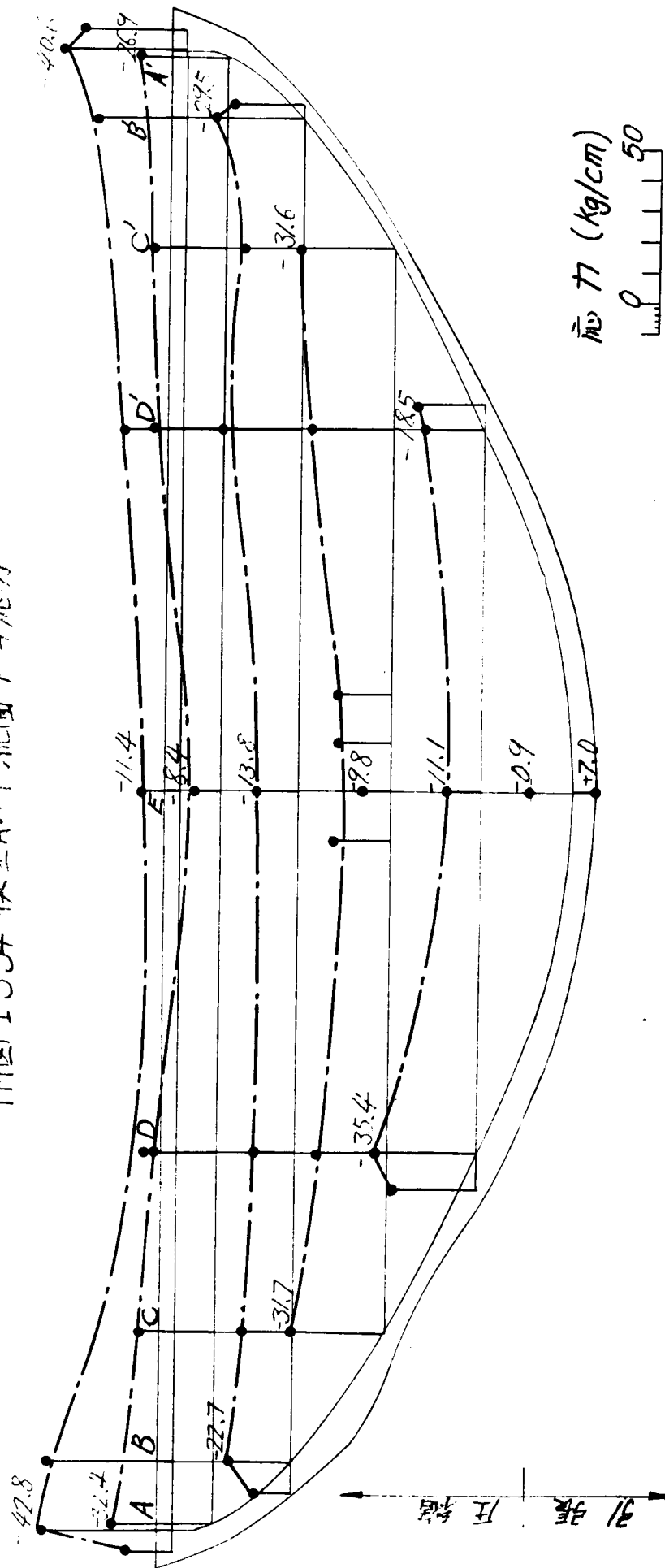
附図-7.3.32 模型Aの下流面主応力



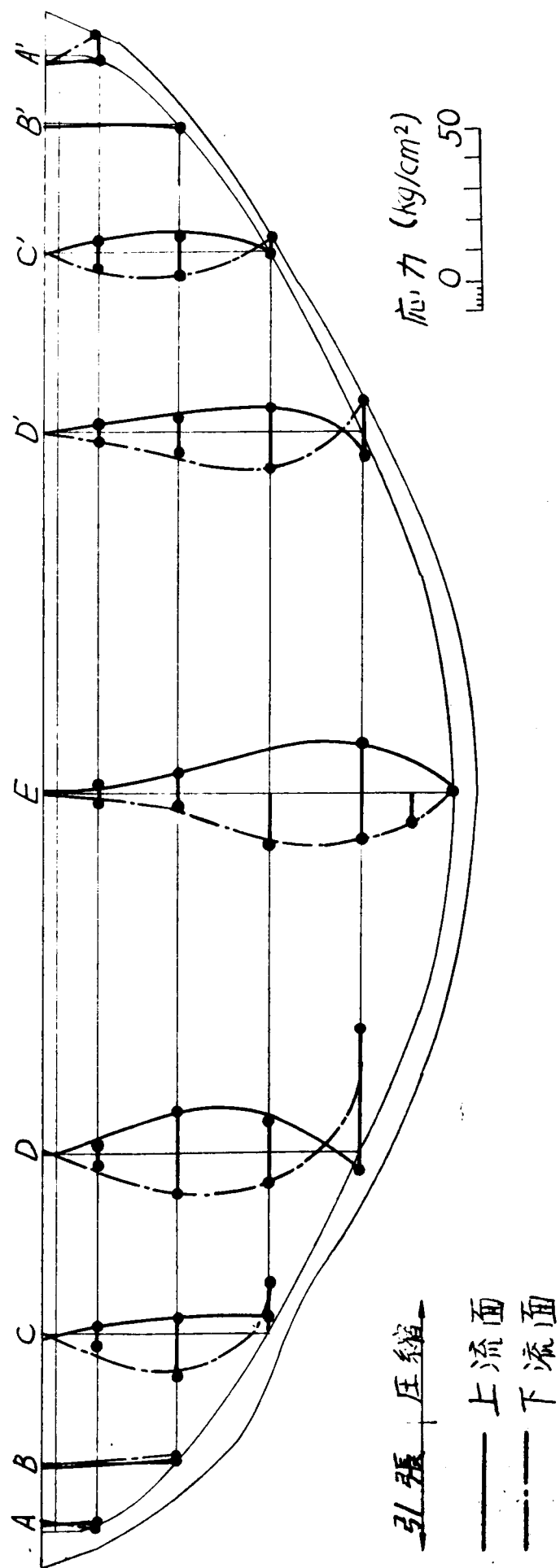
附圖-I·3·33 模型 A 上之應力



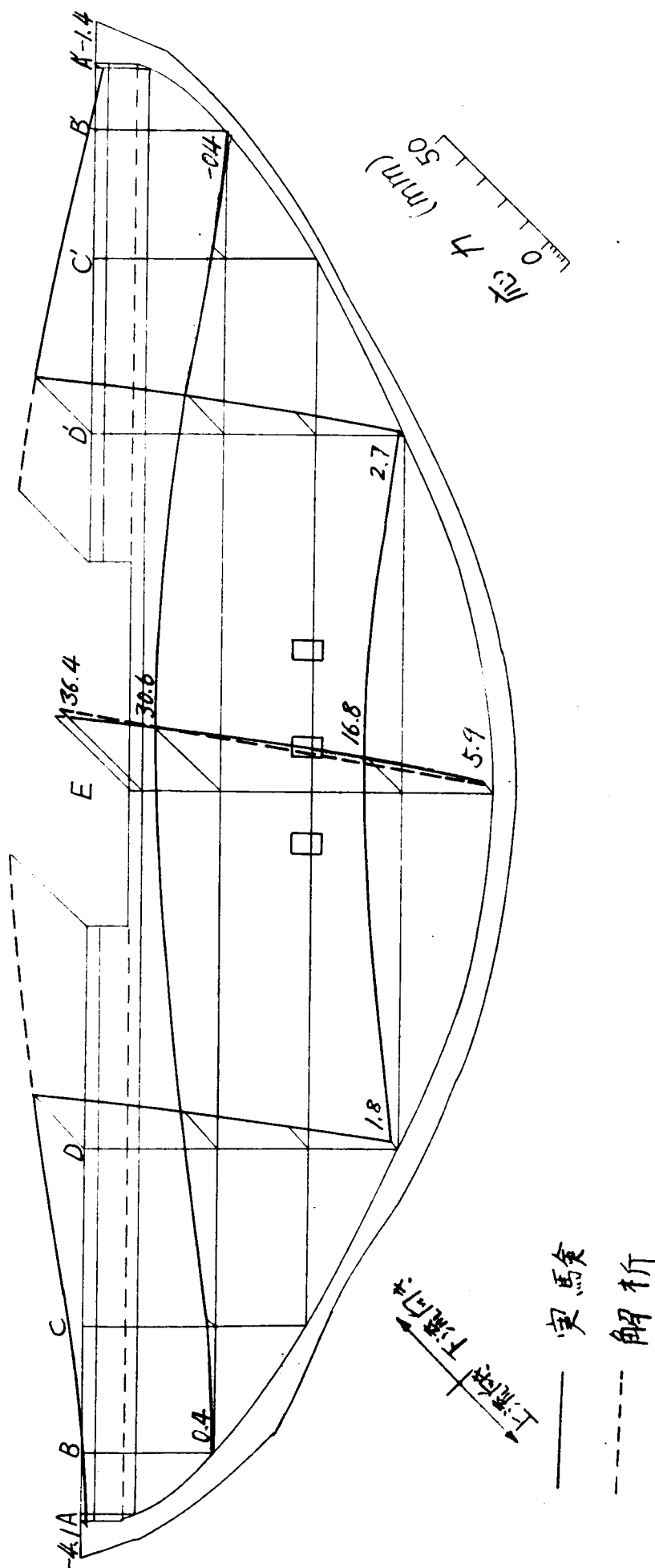
附圖-I.3.34 模型A的下流面P-4底力



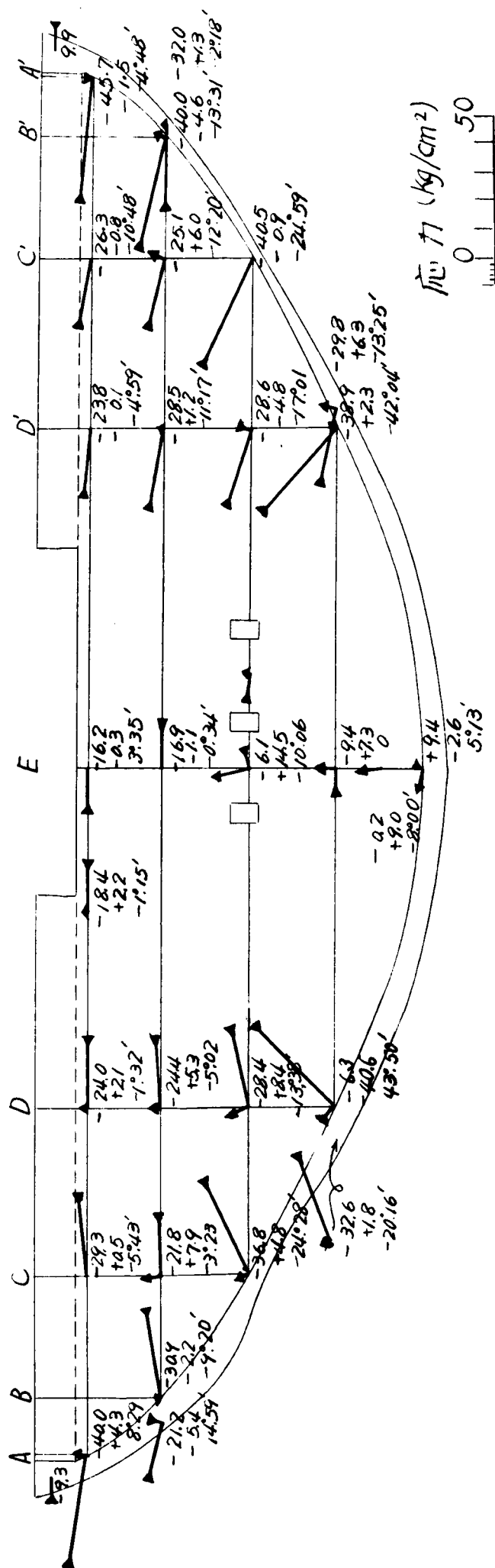
附圖-I-3-35 模型Aの片拍梁応力



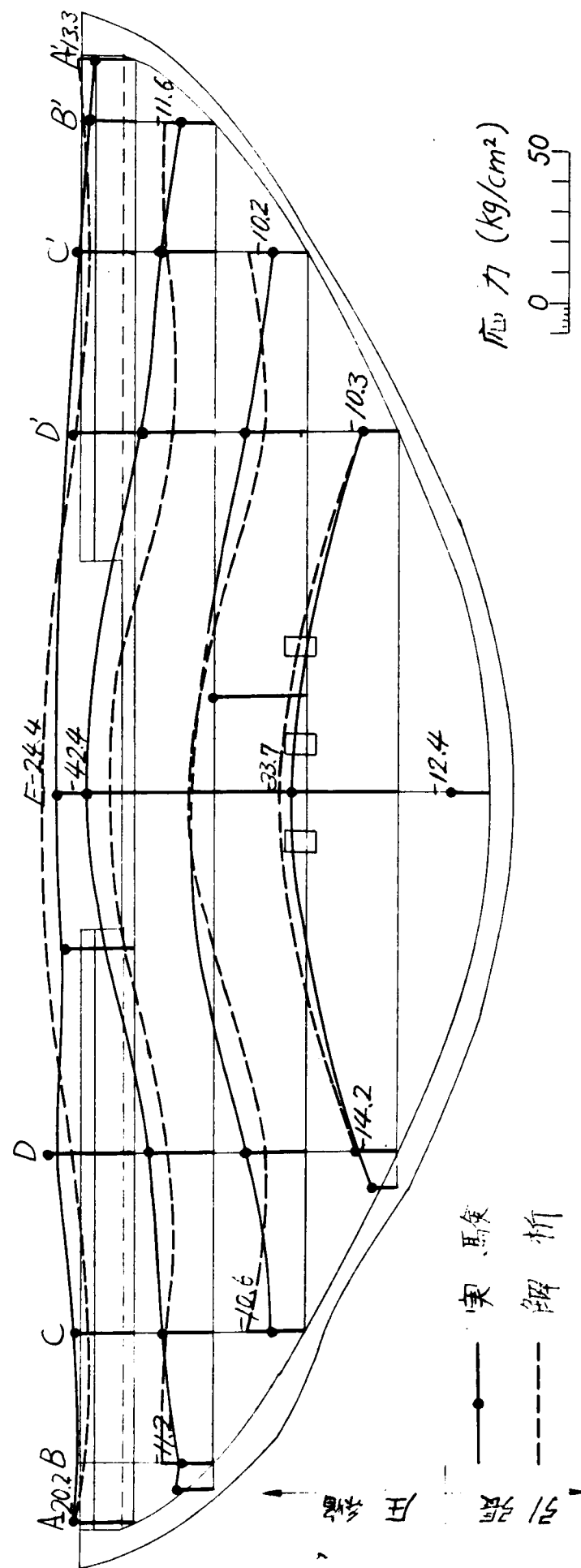
附圖-I·3·36 模型 D の半径方向変位



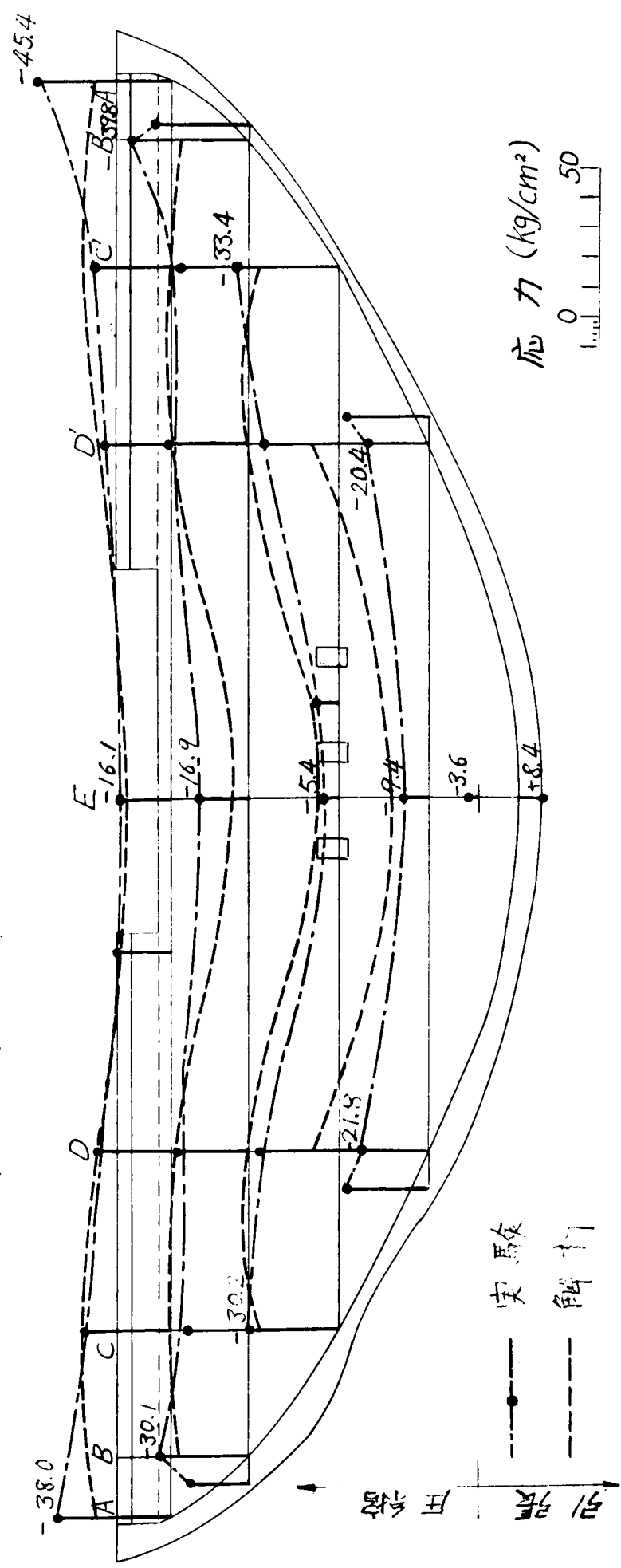
附圖-I-8.38 模型 D_m 下流面主应力



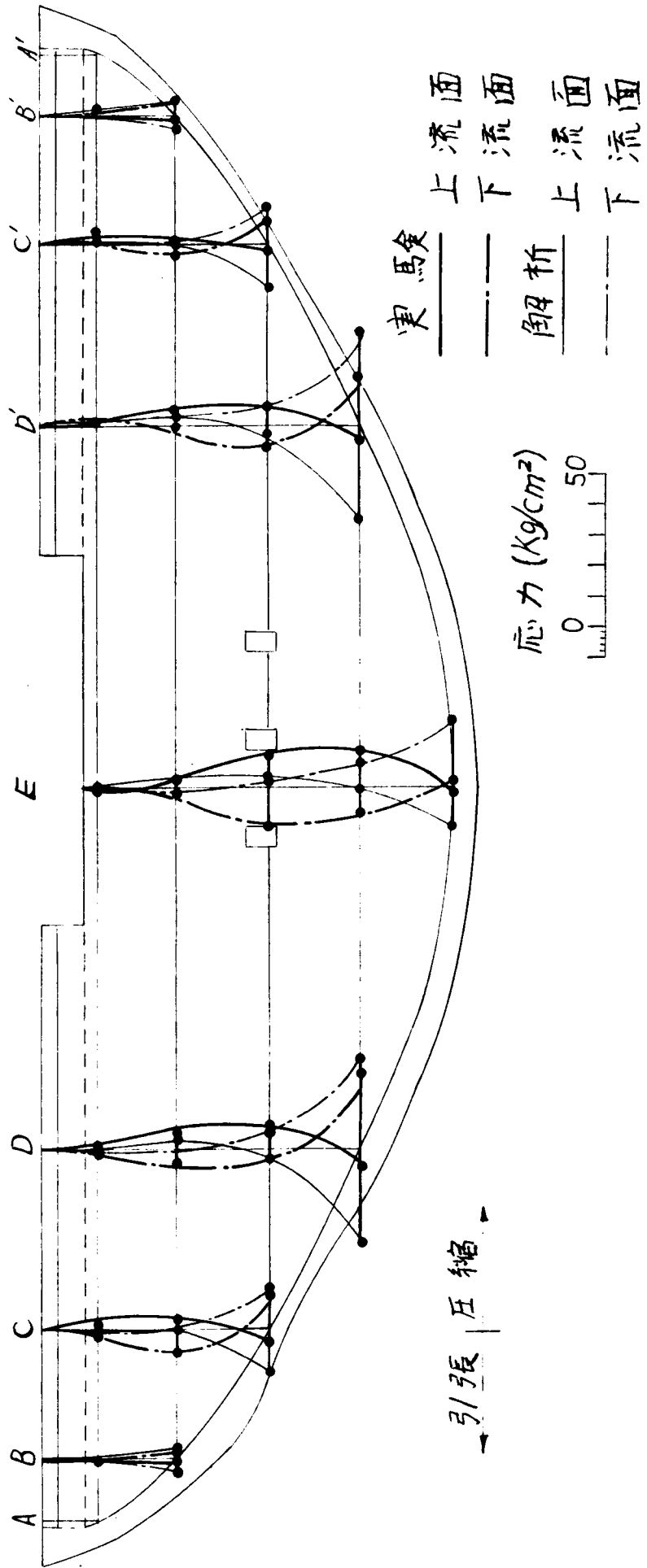
附圖-I·3·39 模型 D の上流面ア-4 応力



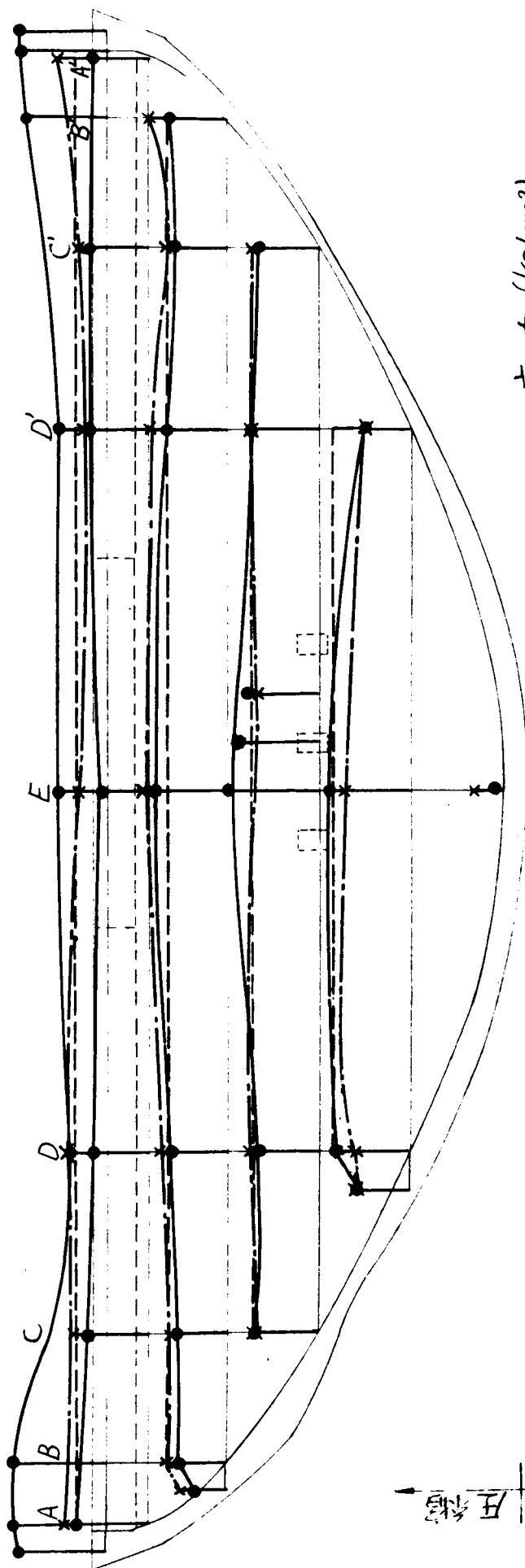
附圖-1.3.40 模型 D の下流面ア-4 応力



附圖-I·3·4/ 模型Dの片持梁応力



附圖-I.3.42 Y-40平均軸應力

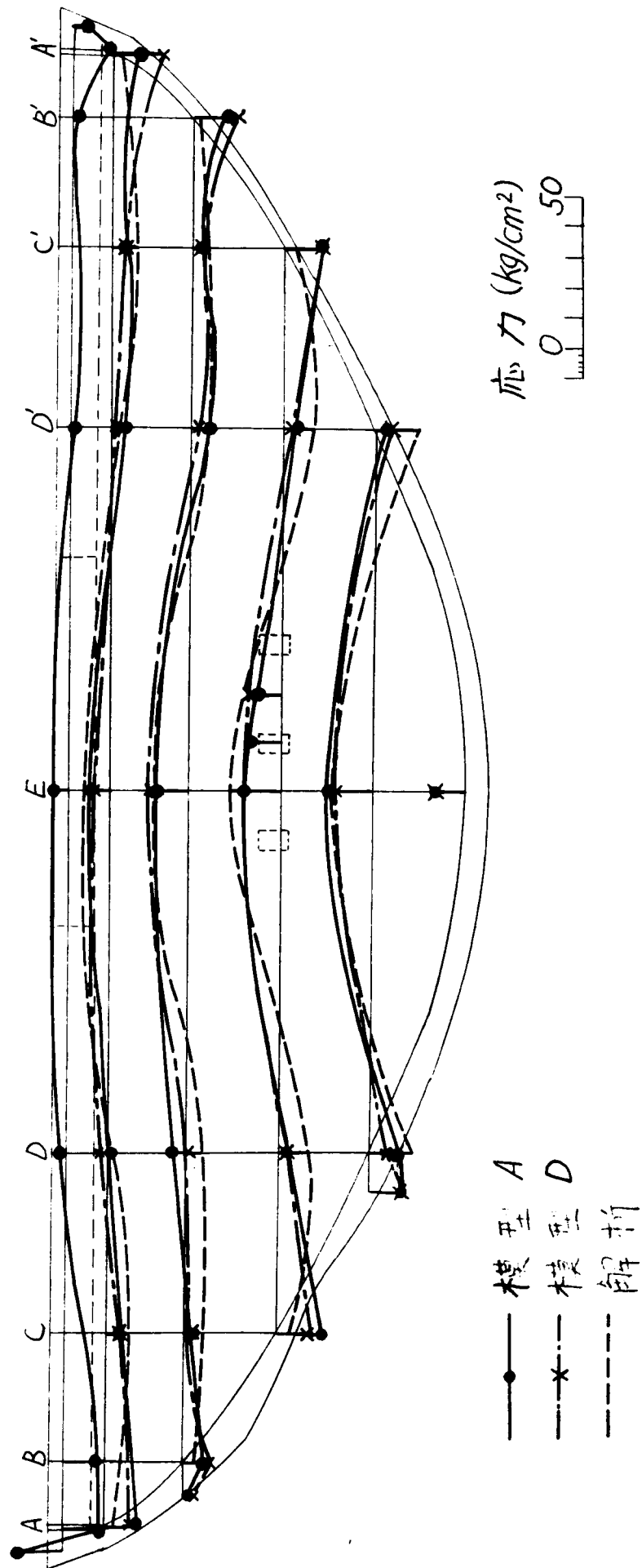


应力 (kg/cm²)
0 50

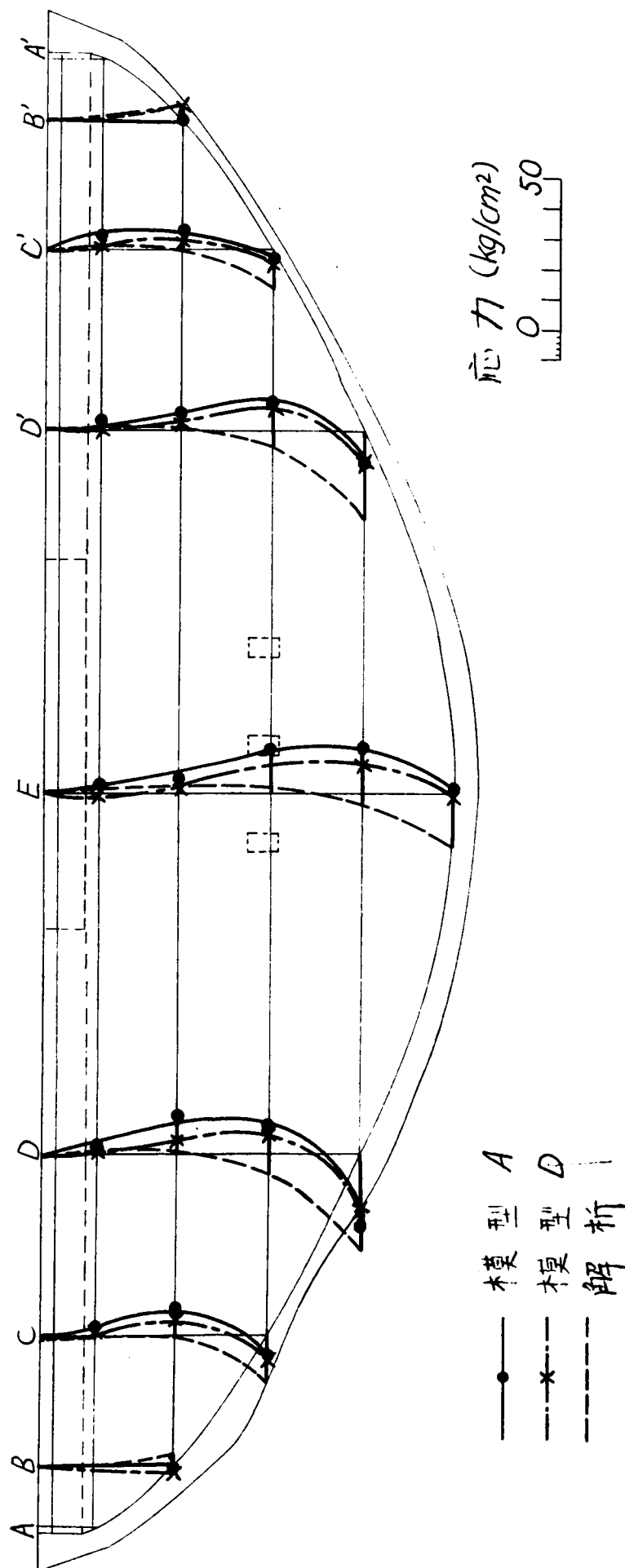
—●— 模型 A
—*— 模型 D
—— 解析

引張 圧縮

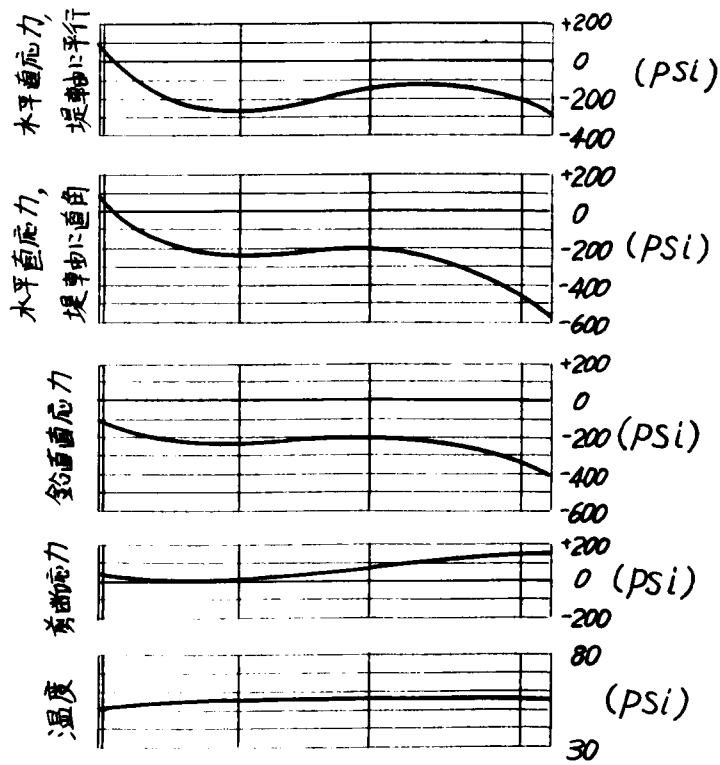
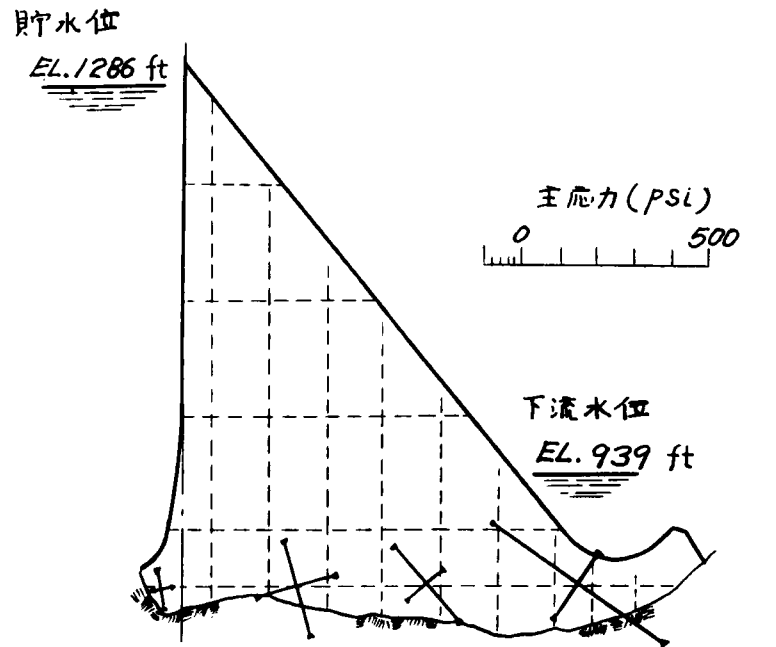
附圖-I.3.43 曲げモーメントによる上流面のアーチ応力



附圖-I.3.44 曲ゲモノ-Xントによる上流型の片橋梁死力



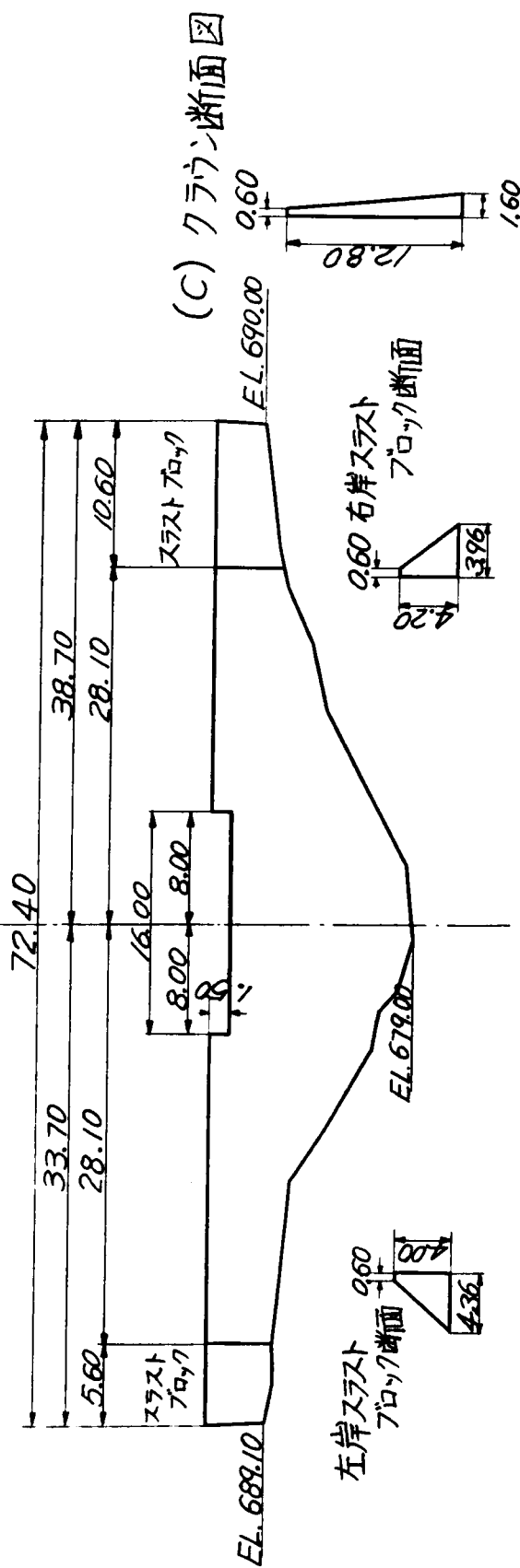
附図-I.4.1 Grand Coulee ダムの応力状態
(1952年7月1日)



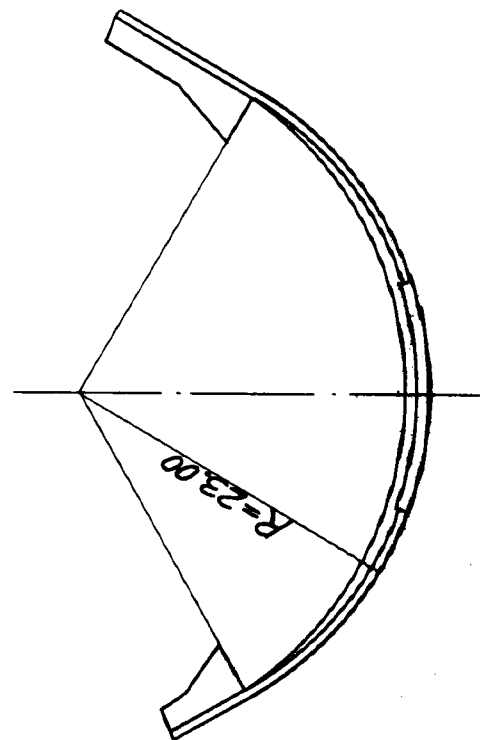
長さ (ft)
40 0 40 80 100 120

附圖-I.4.2 櫛俣ア-4ダム

(a) 上流面展開図

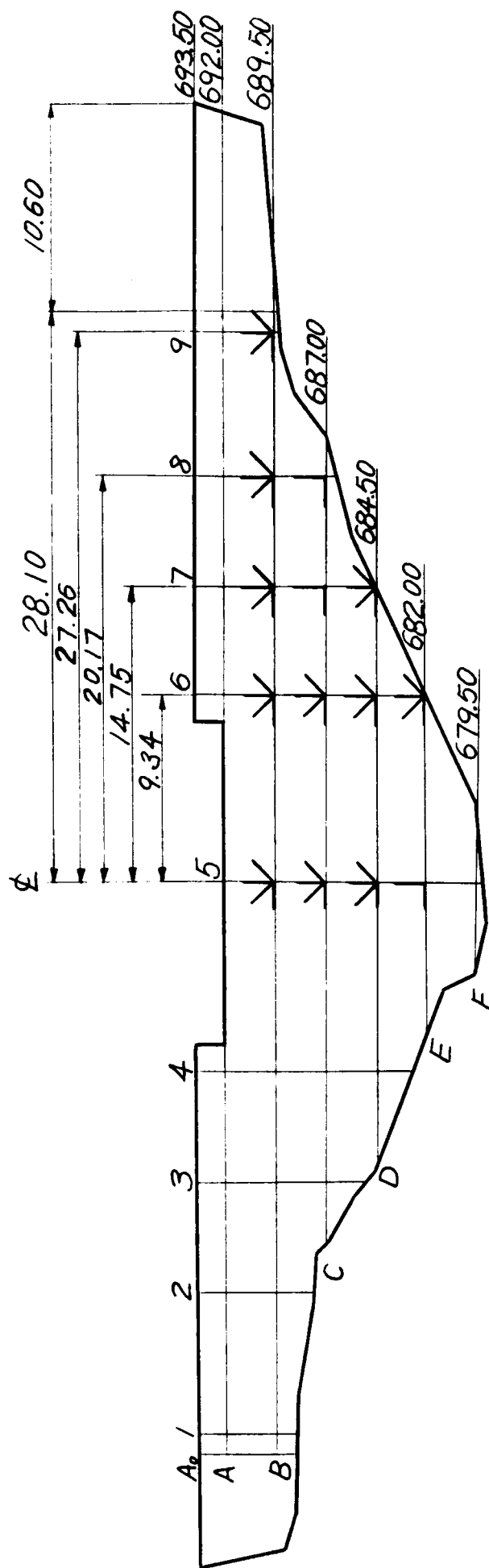


图面(6)平面

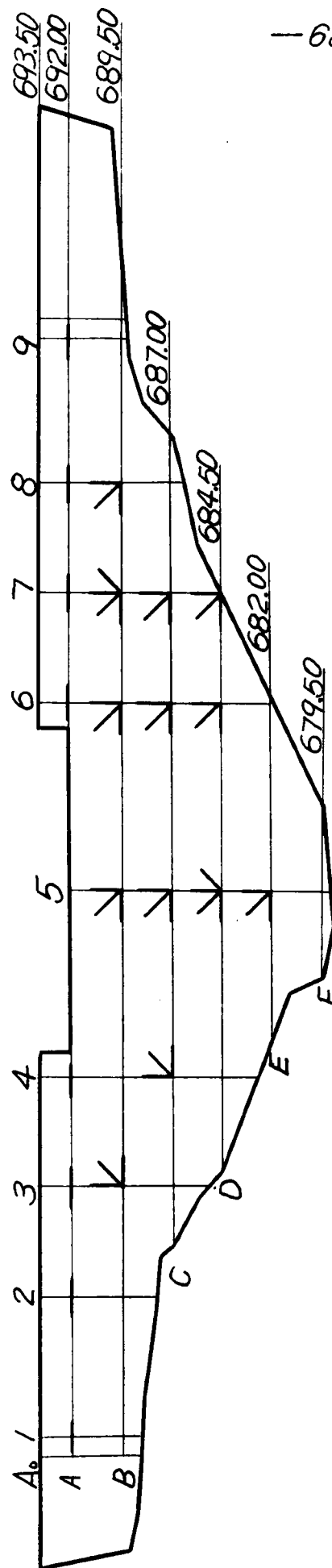


縮尺 (mm)

附図-I.4.3 埋設歪計の位置

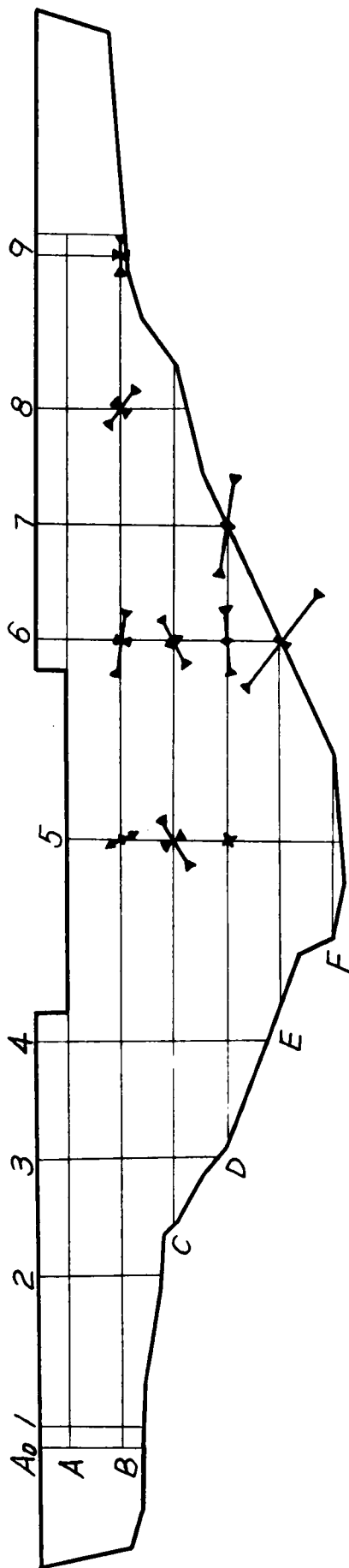


附図-I.4.4 下流表面取付け歪計の位置

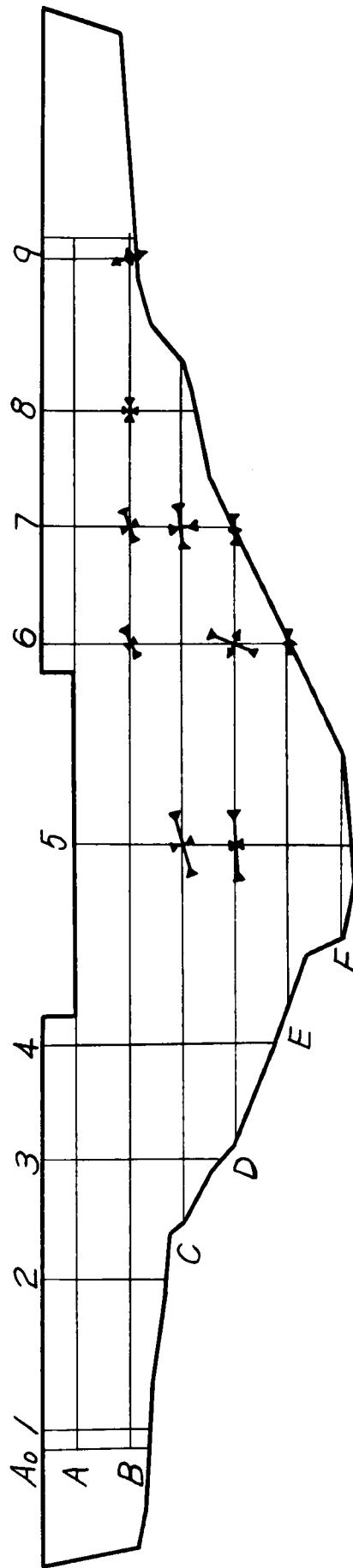


附図-1.4.5 埋設歪計位置における主応力

(a) 下流側



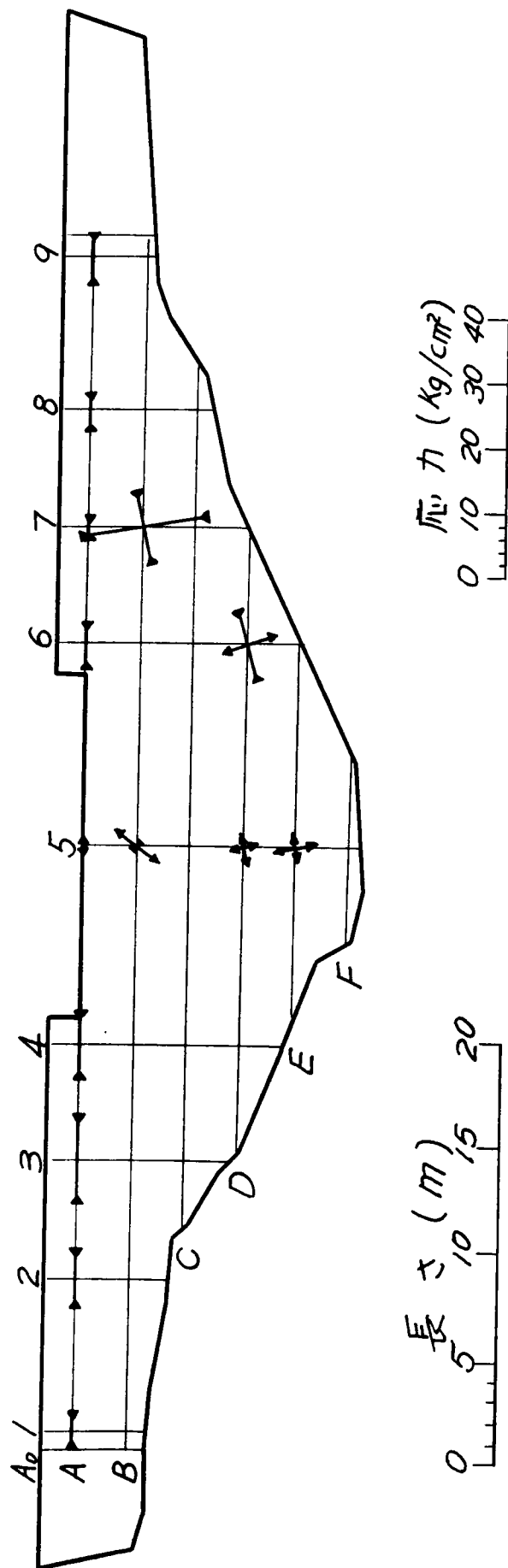
(b) 上流側



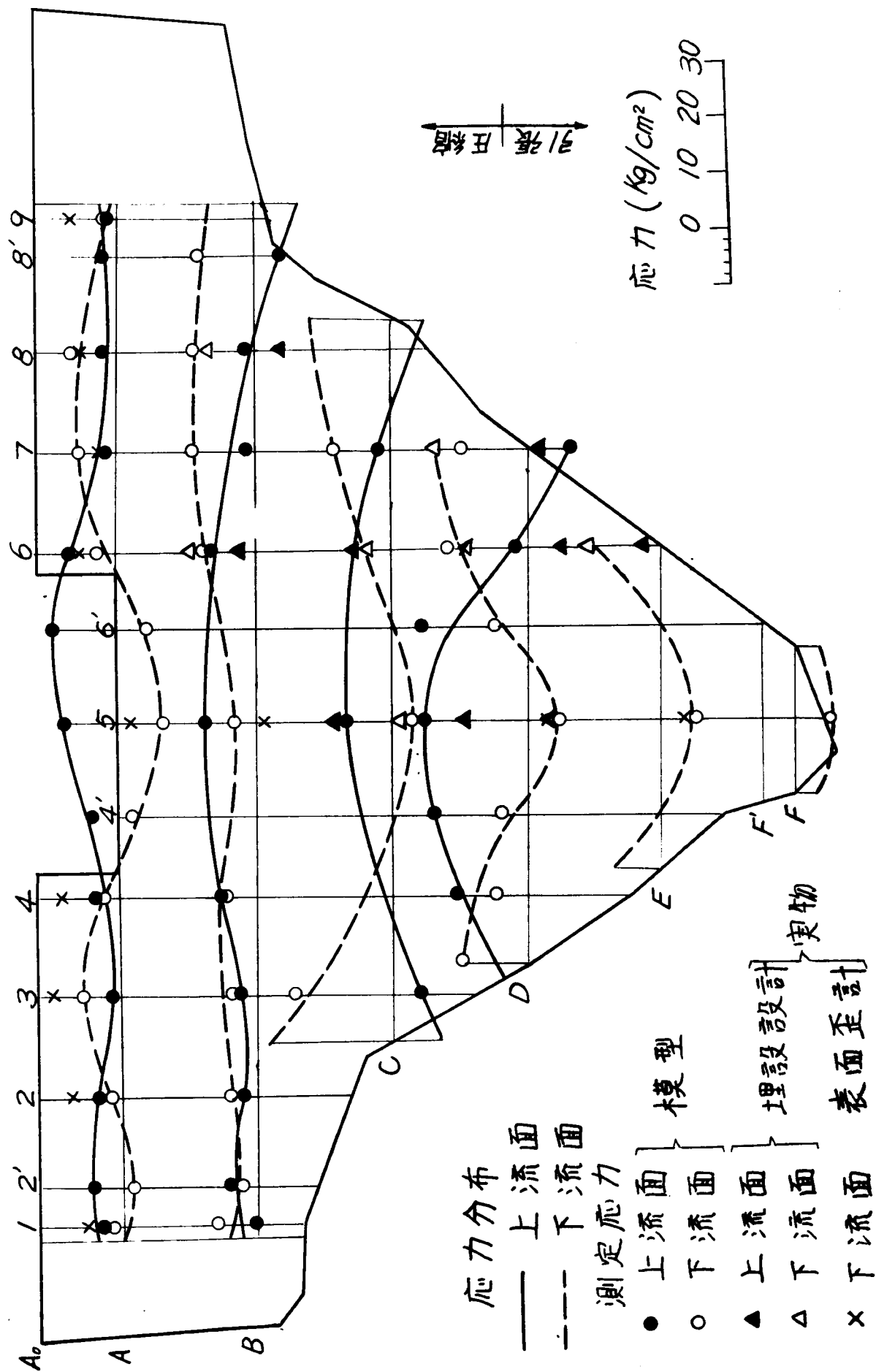
長さ (m)
0 5 10 15 20

応力 (kg/cm^2)
0 10 20 30 40

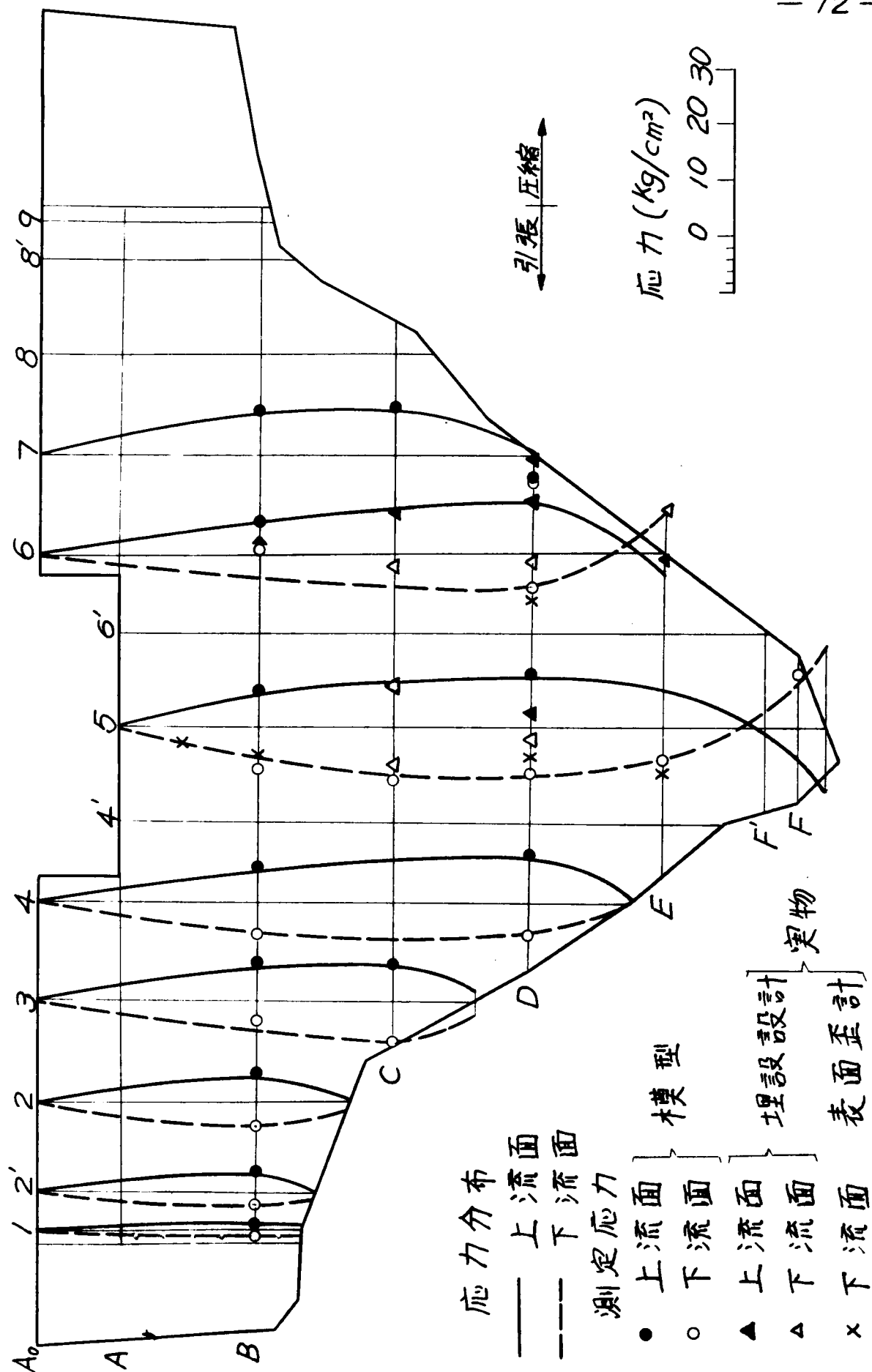
付図-1.4.6 下流面における主応力



附図-I.4.7 石膏模型実験および実測によるアーチ応力

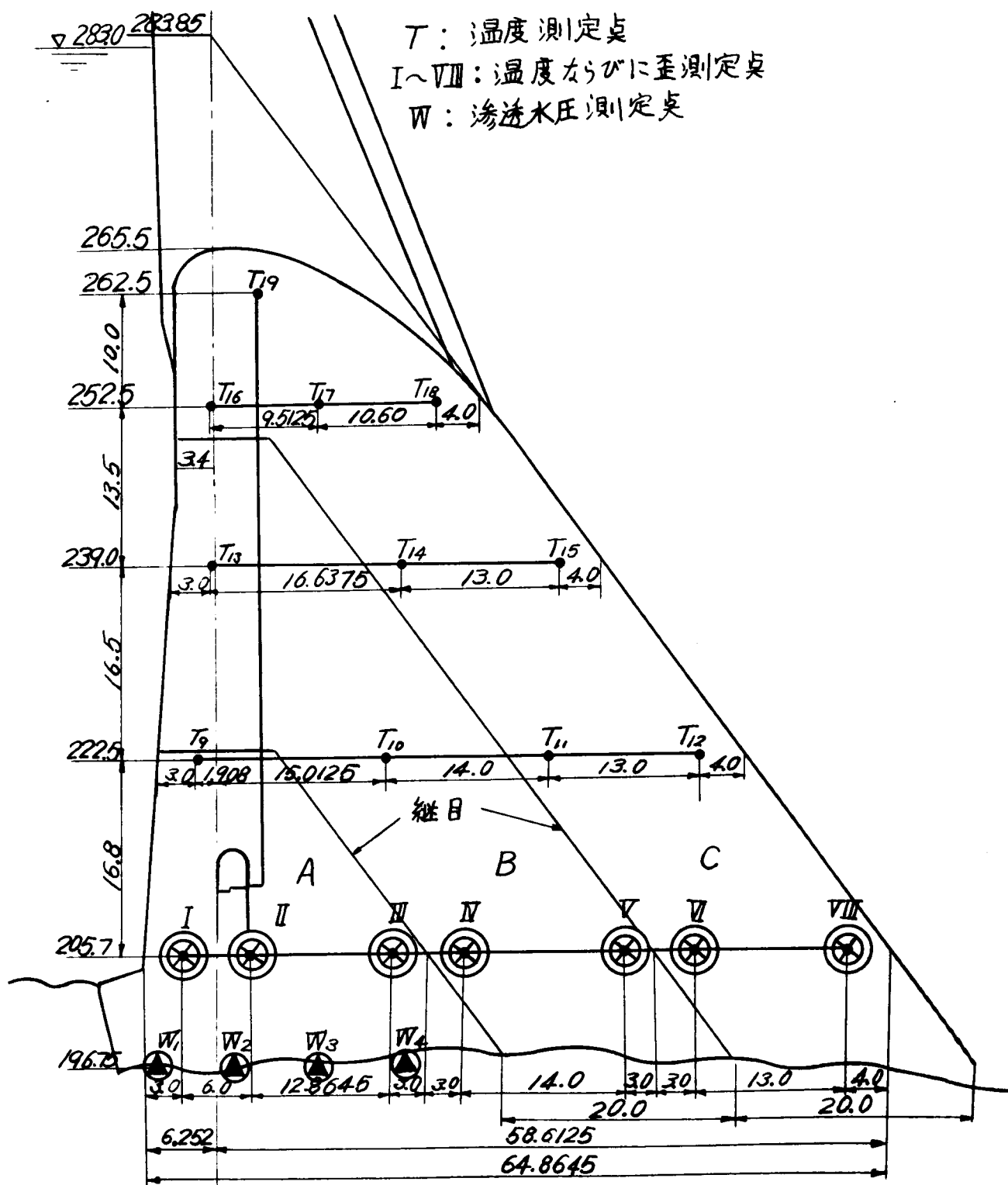


附圖-I.4.8 石膏模型実験および実測による片持梁応力



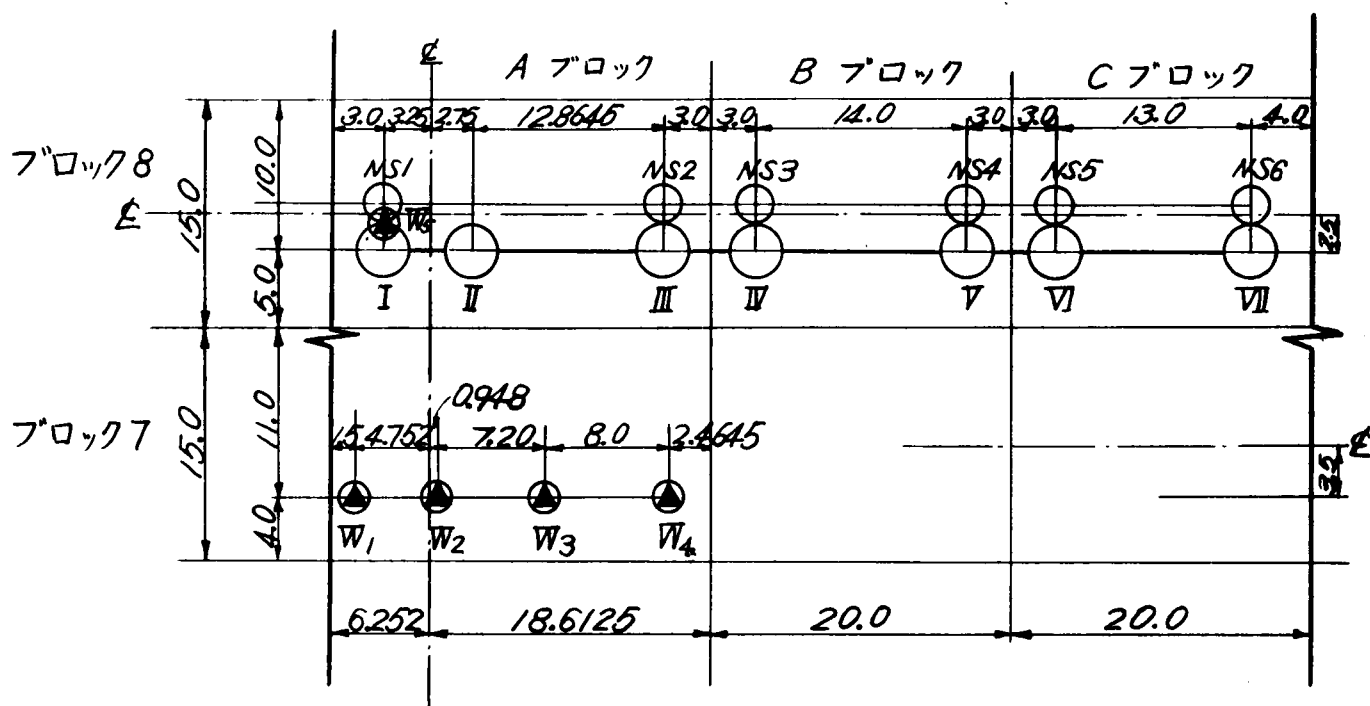
附図-I・4・9 測定計器の配置

(a) 断面図

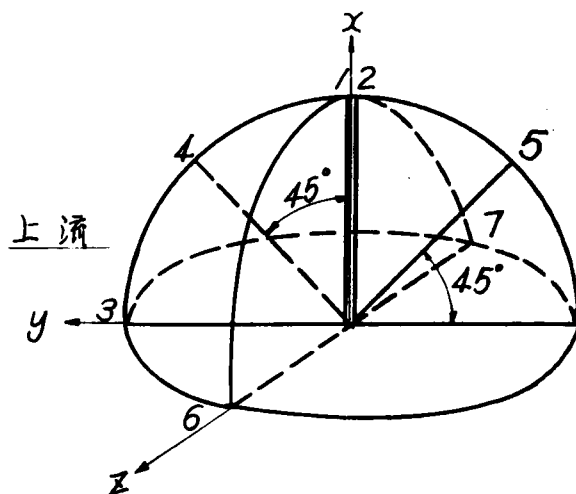


附図 - I・4・9

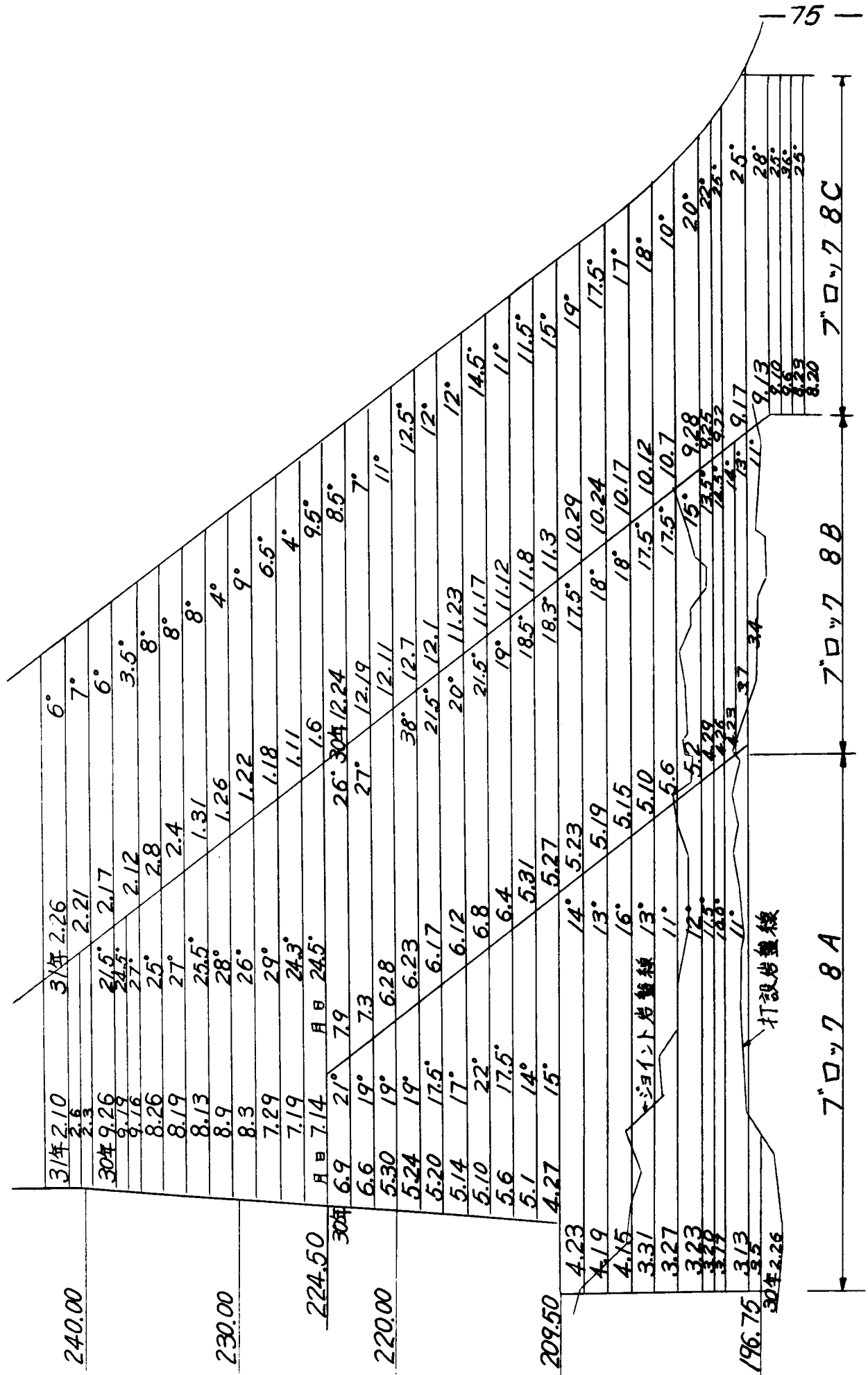
(b) 平面図



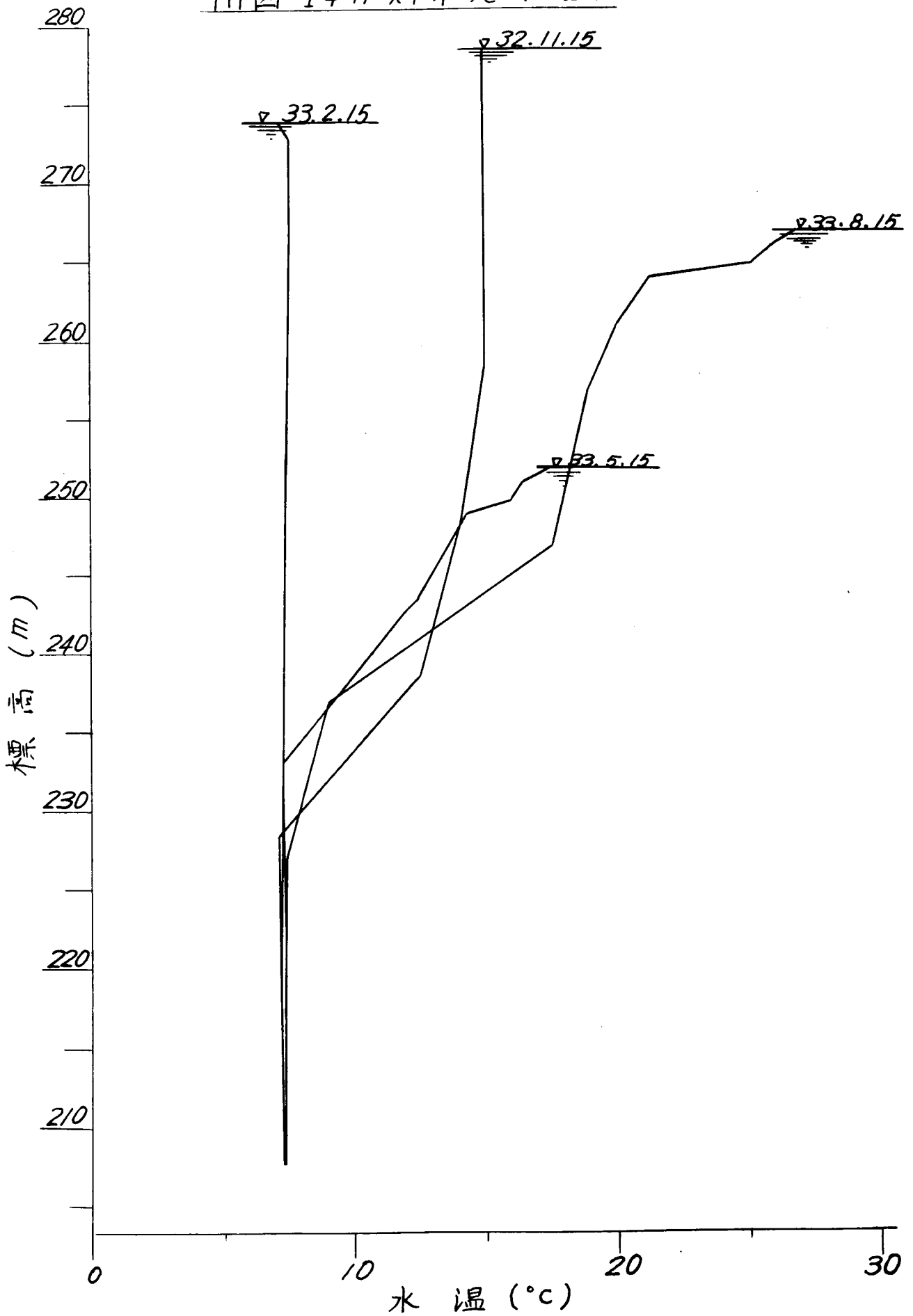
(c) 測定成分の方向



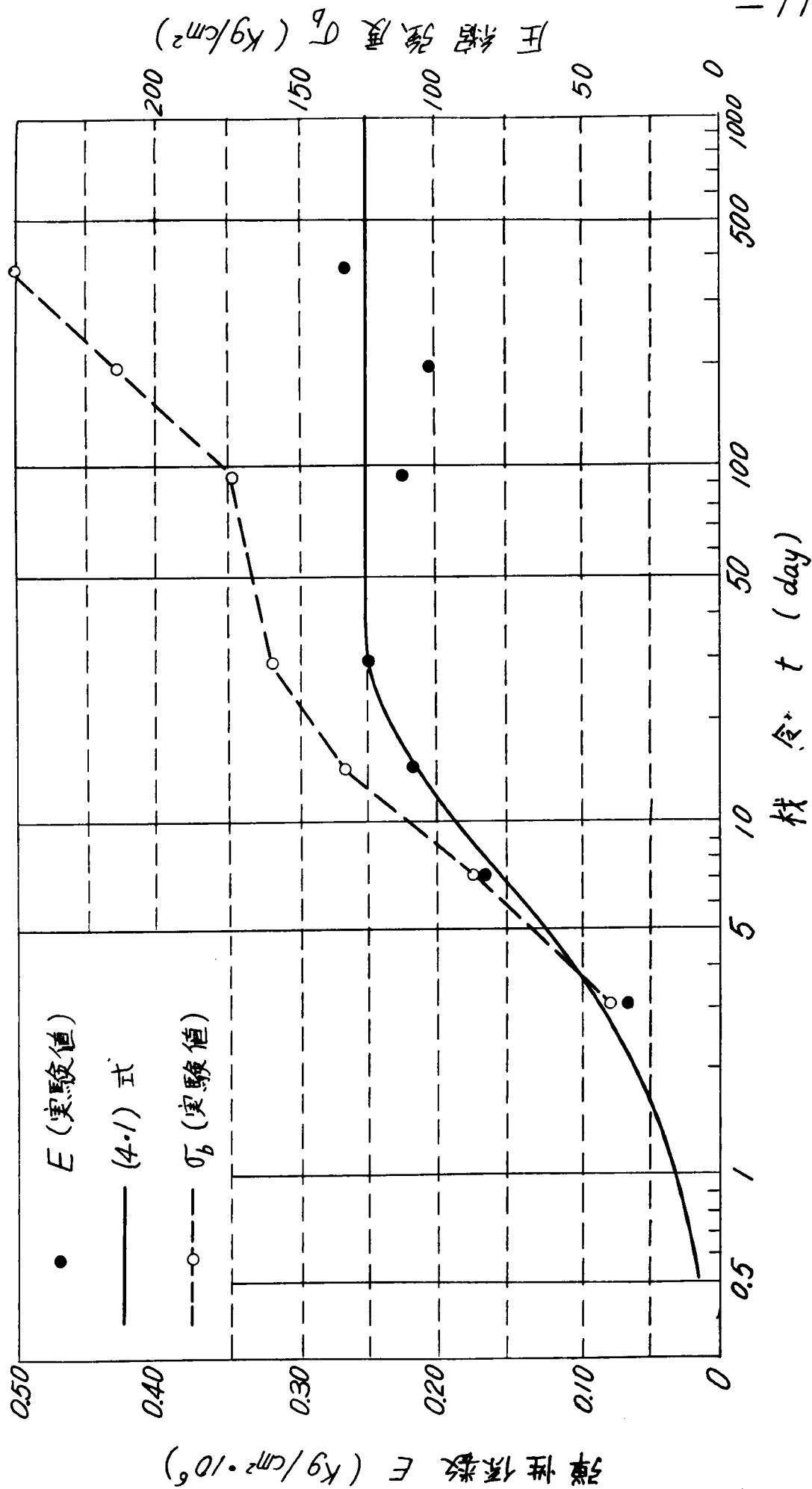
附図-I・4・10 ブロック 8 打設記録



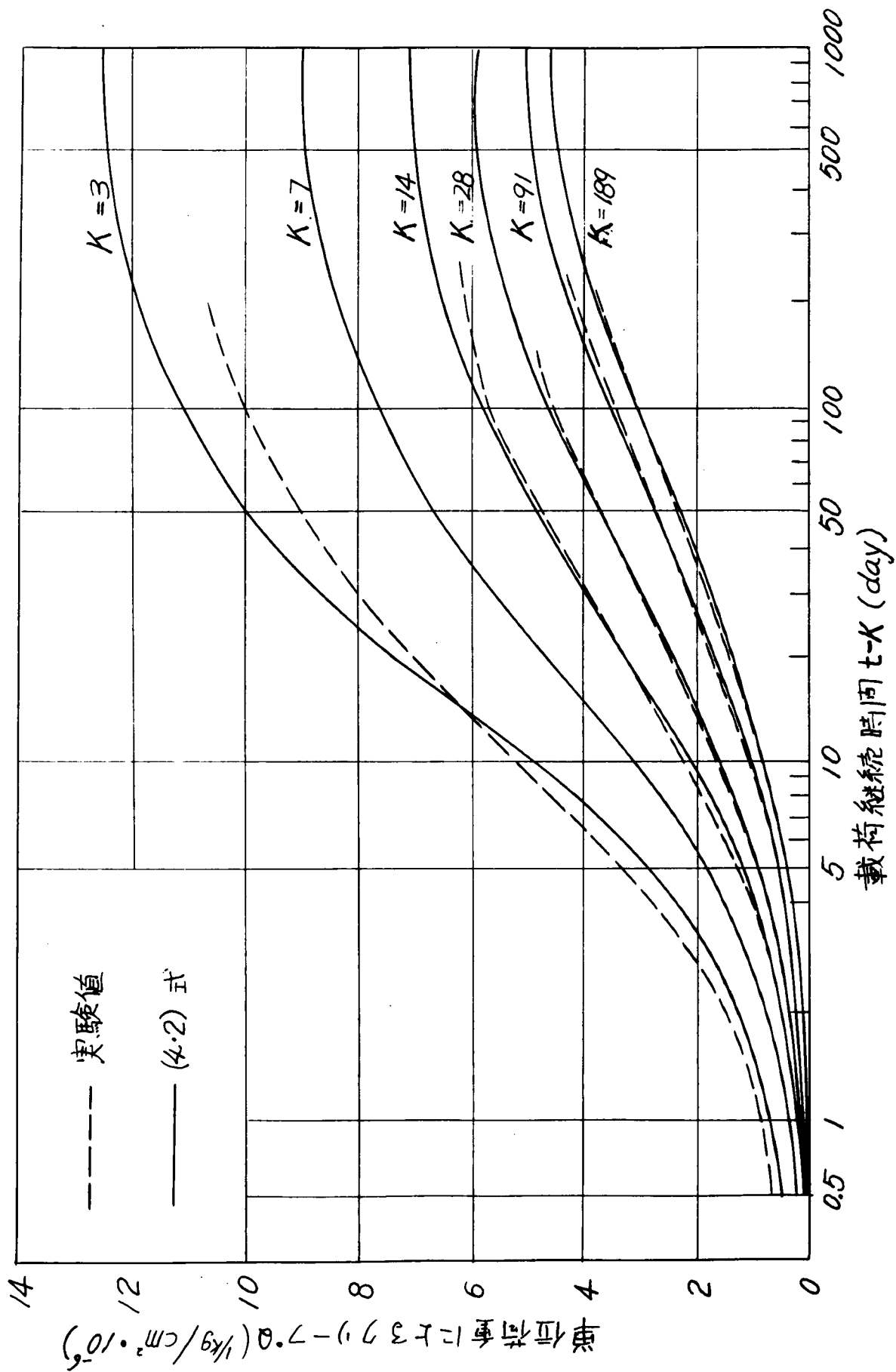
附圖-I.4.11 貯水池水溫



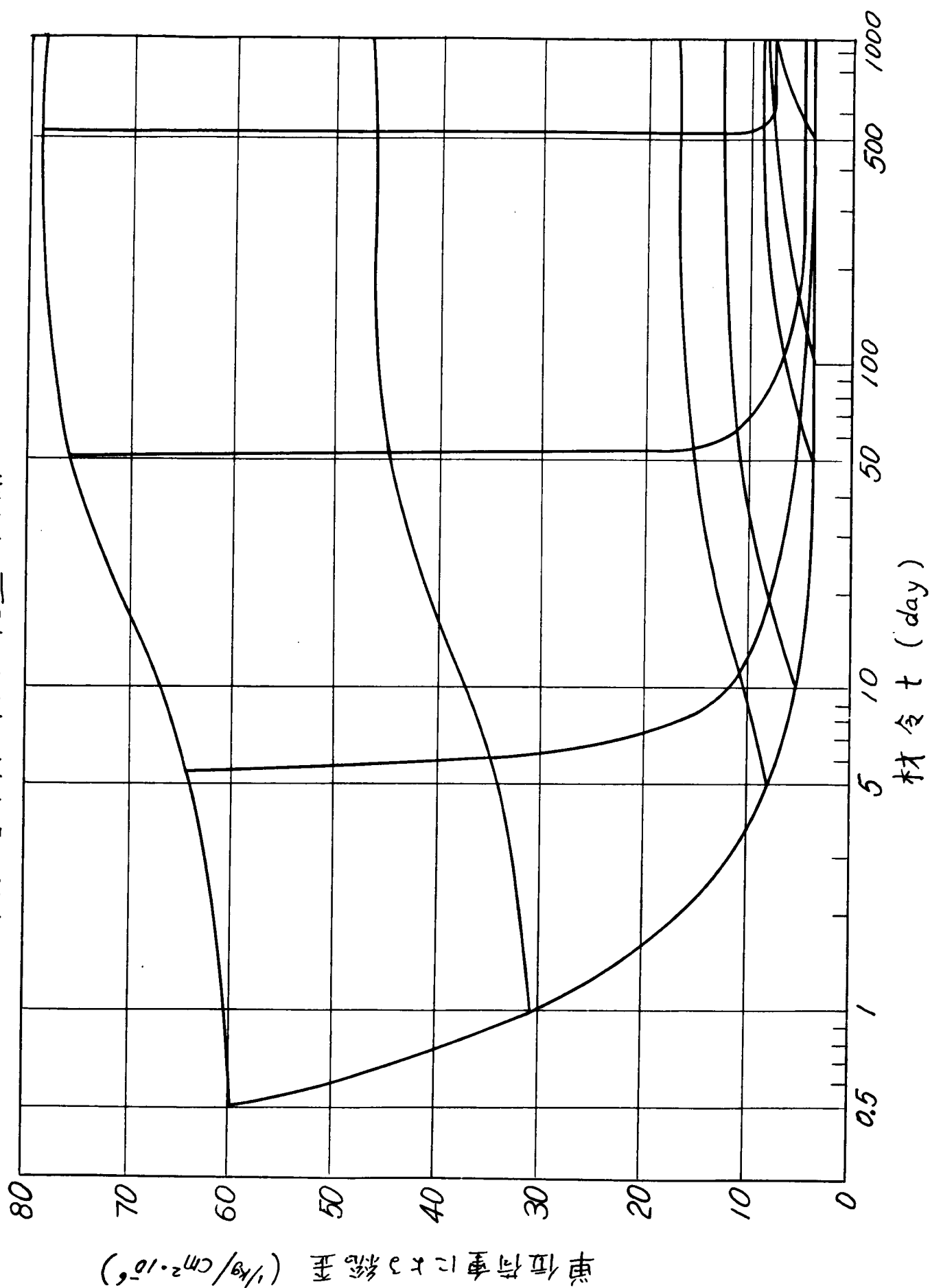
附図-I.4.12 強度および弾性係数と杭令との関係



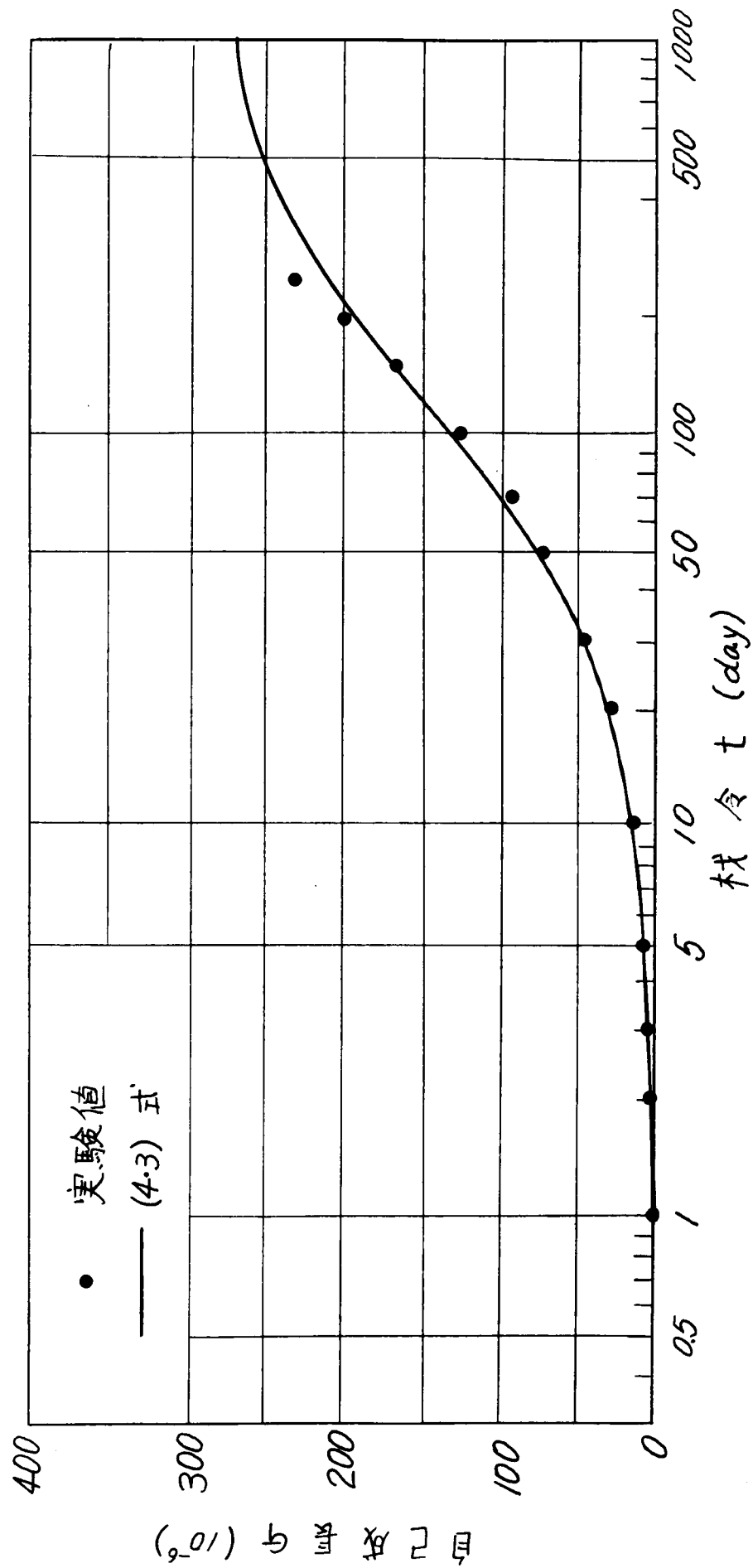
附圖-I.4.13 載荷開始材冷 χ ワリ- 7°C の肉係



附図-I.4.14 材令と総歪の関係



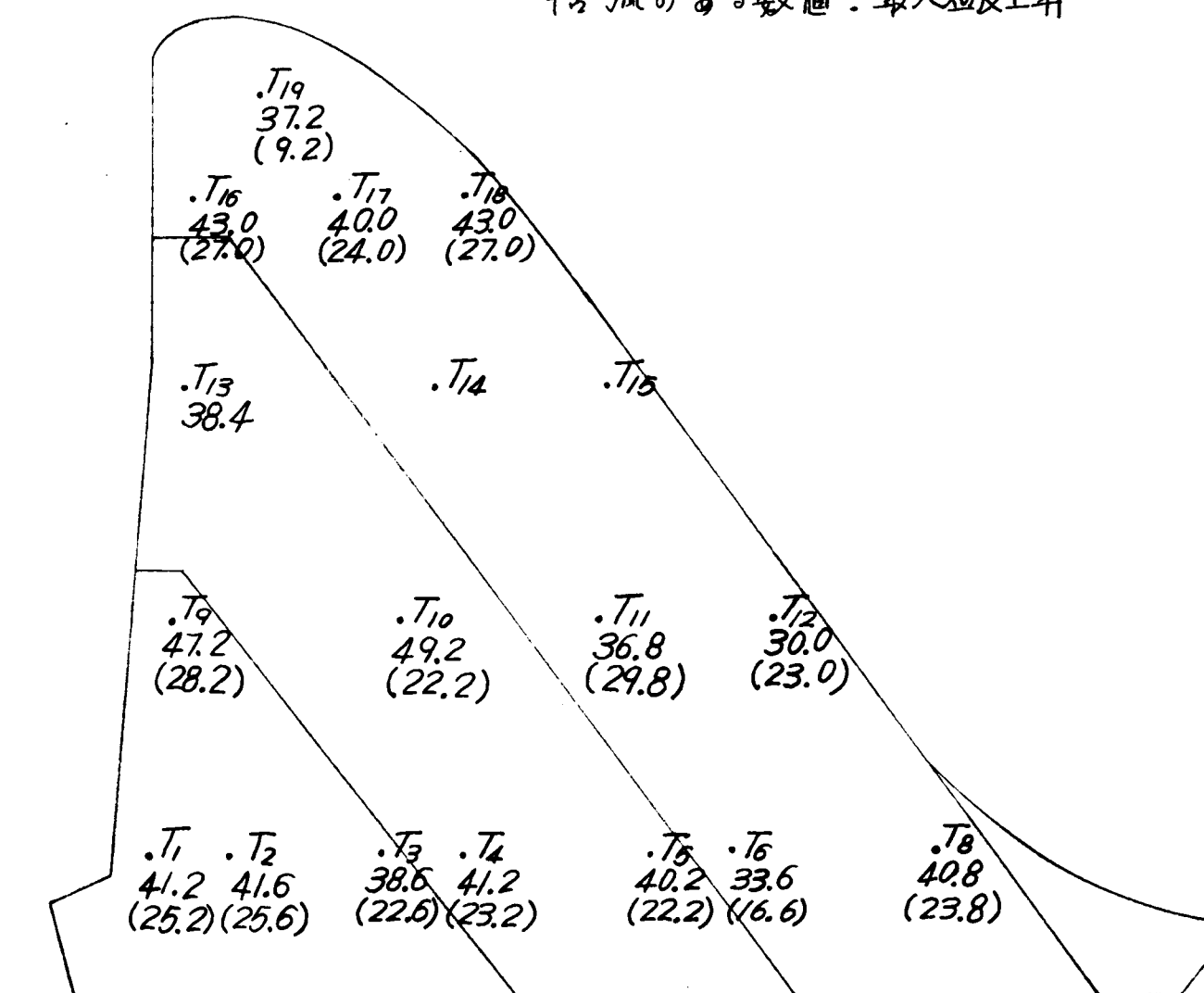
附圖-I.4.15 自己成長量



附図-I.4.16 最高温度と最大温度上昇(°C)

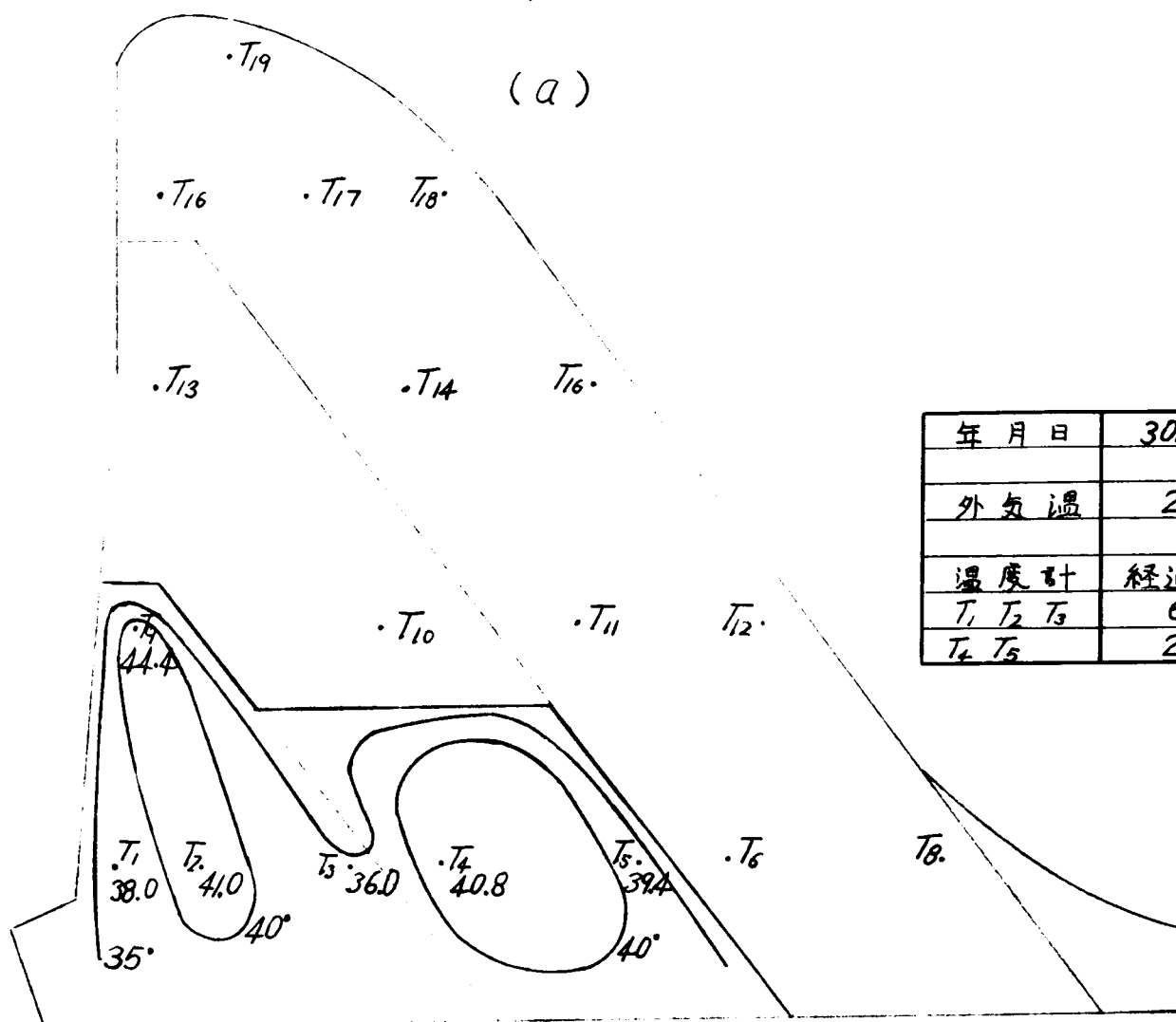
括弧のない数値：最高温度

括弧のある数値：最大温度上昇



附圖-I·4·17 温度分布

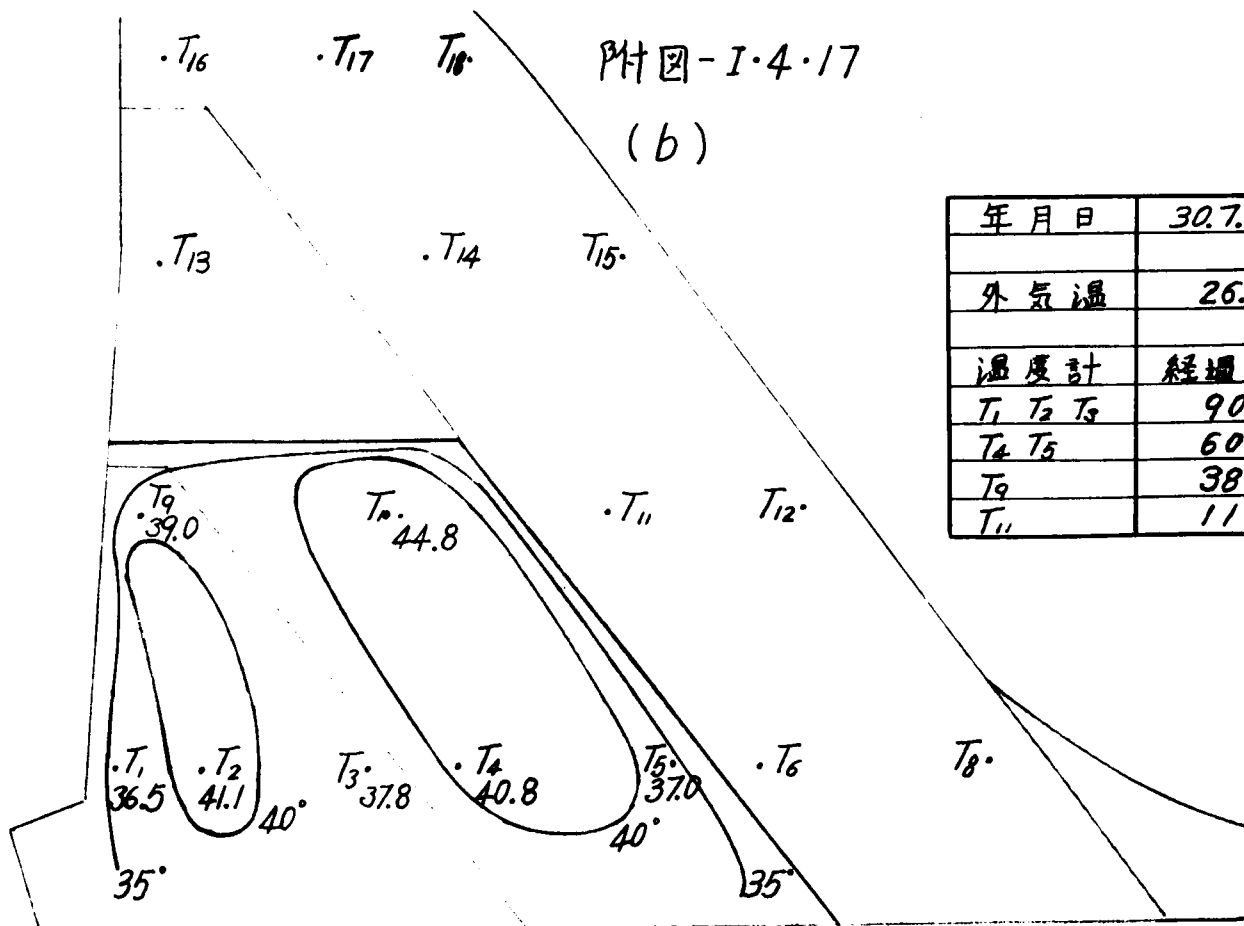
(a)



年月日	30.6.12
外気温	22.8°C
温度計	経過日数
T ₁ T ₂ T ₃	68
T ₄ T ₅	28

附圖-I·4·17

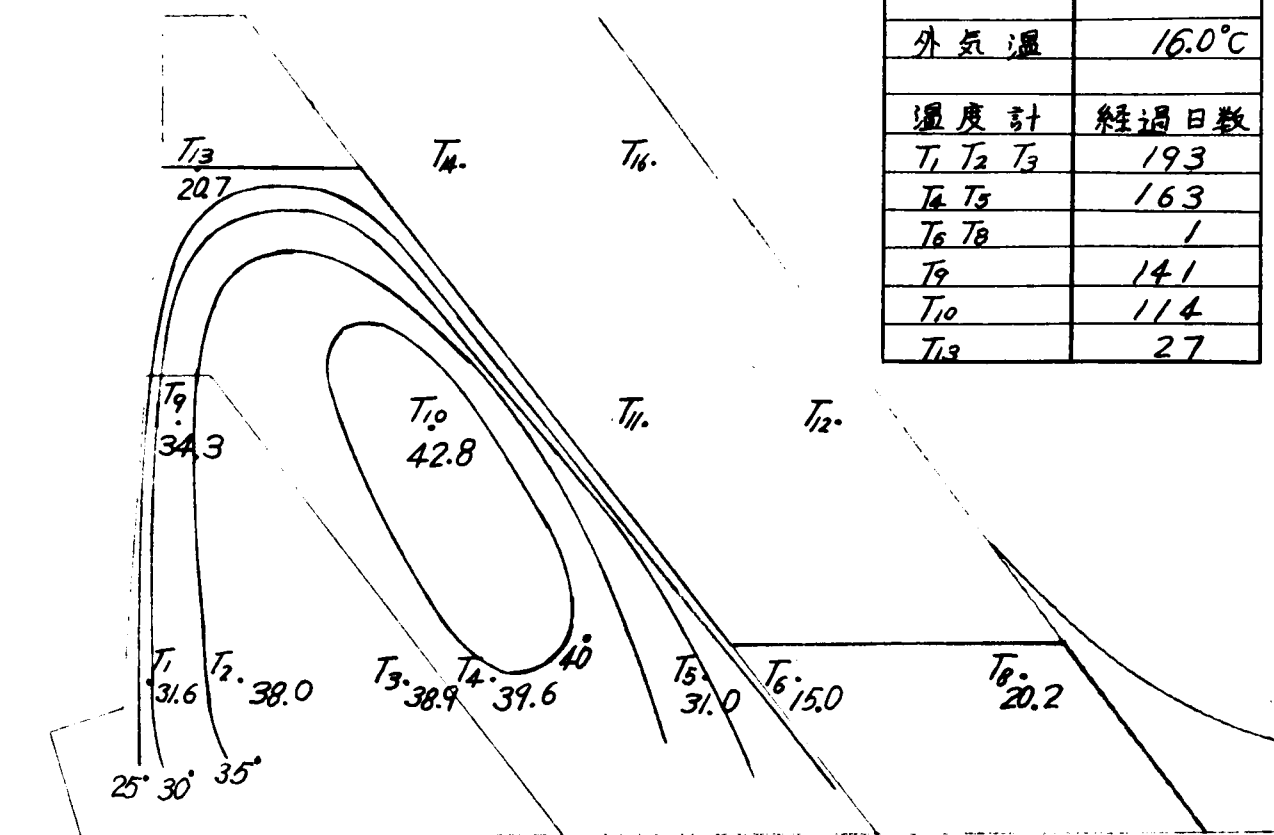
(b)



年月日	30.7.14
外気温	26.6°C
温度計	経過日数
T ₁ T ₂ T ₃	90
T ₄ T ₅	60
T ₉	38
T ₁₁	11

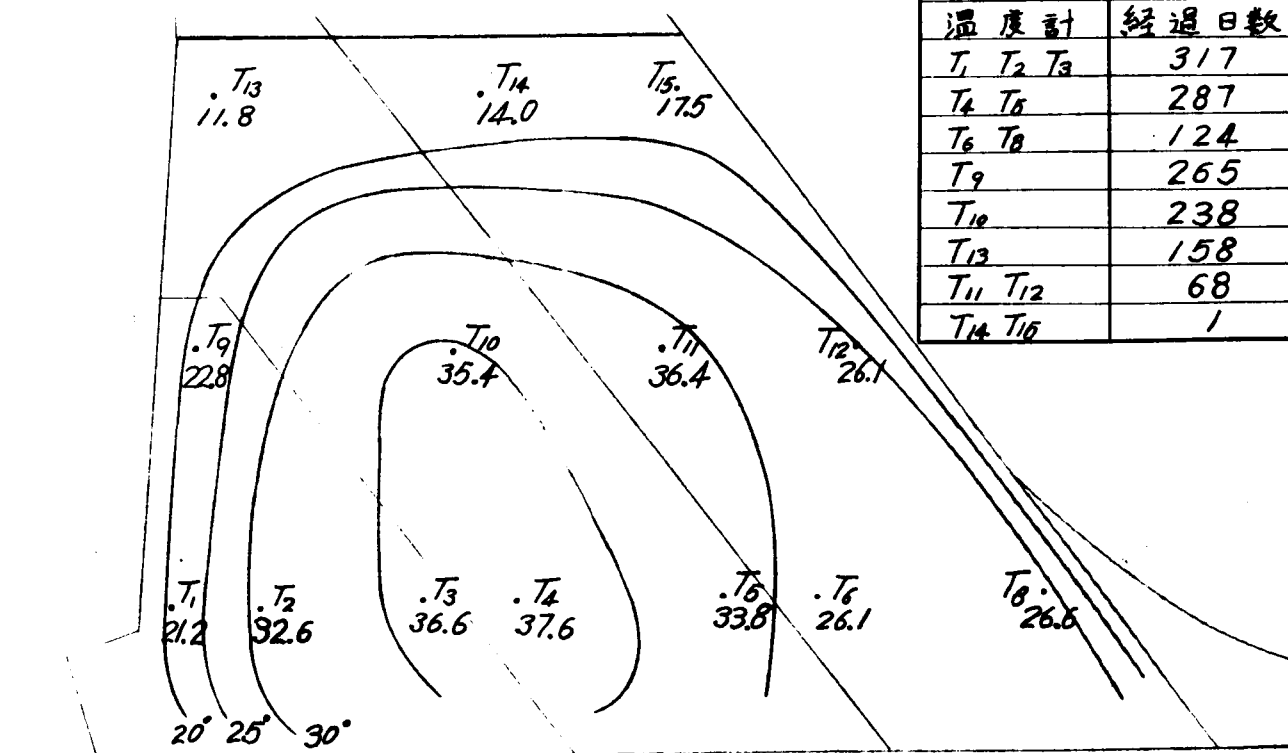
附図-I.4.17

(C)



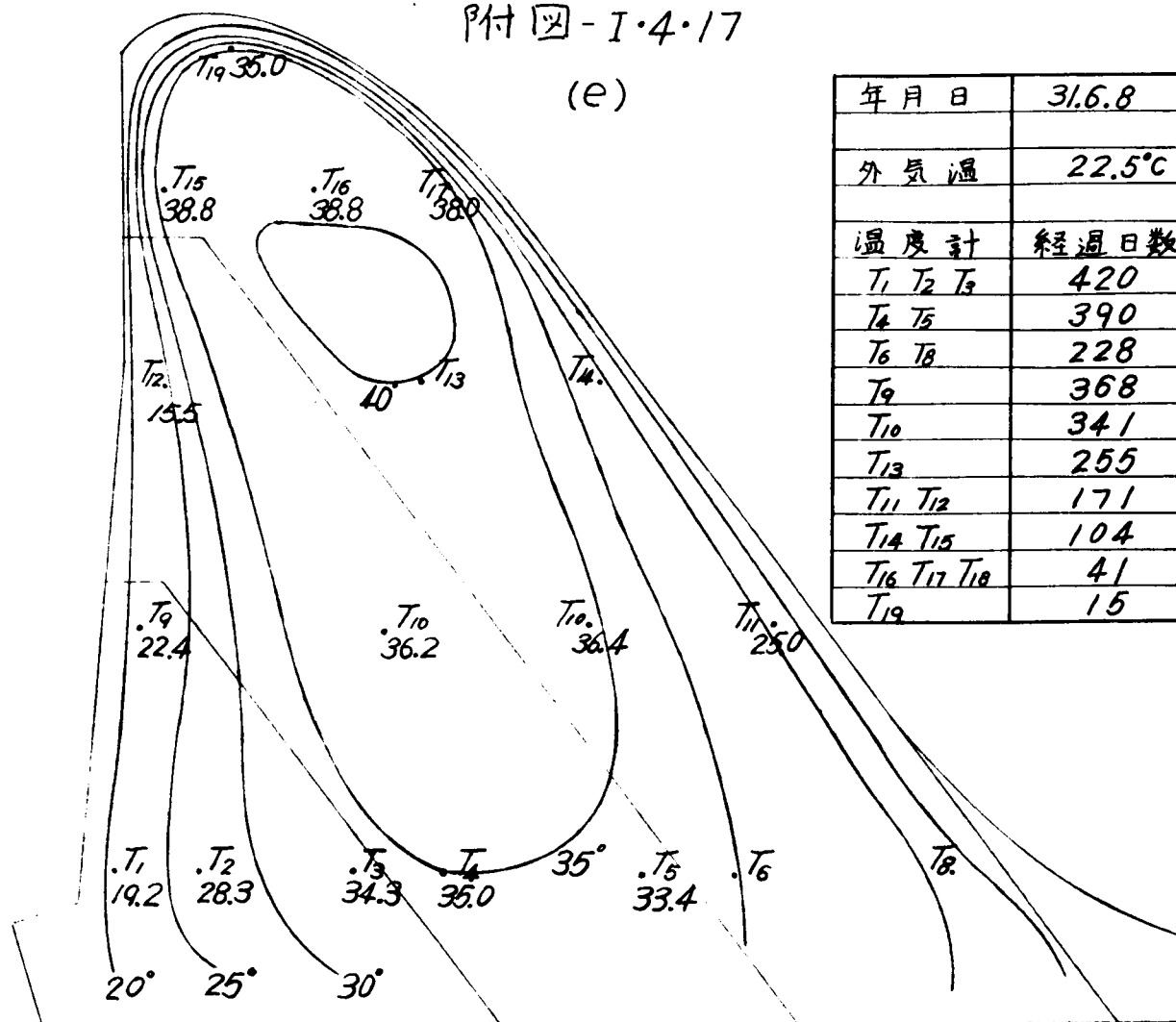
附図-I.4.17

(d)



附図-I.4.17

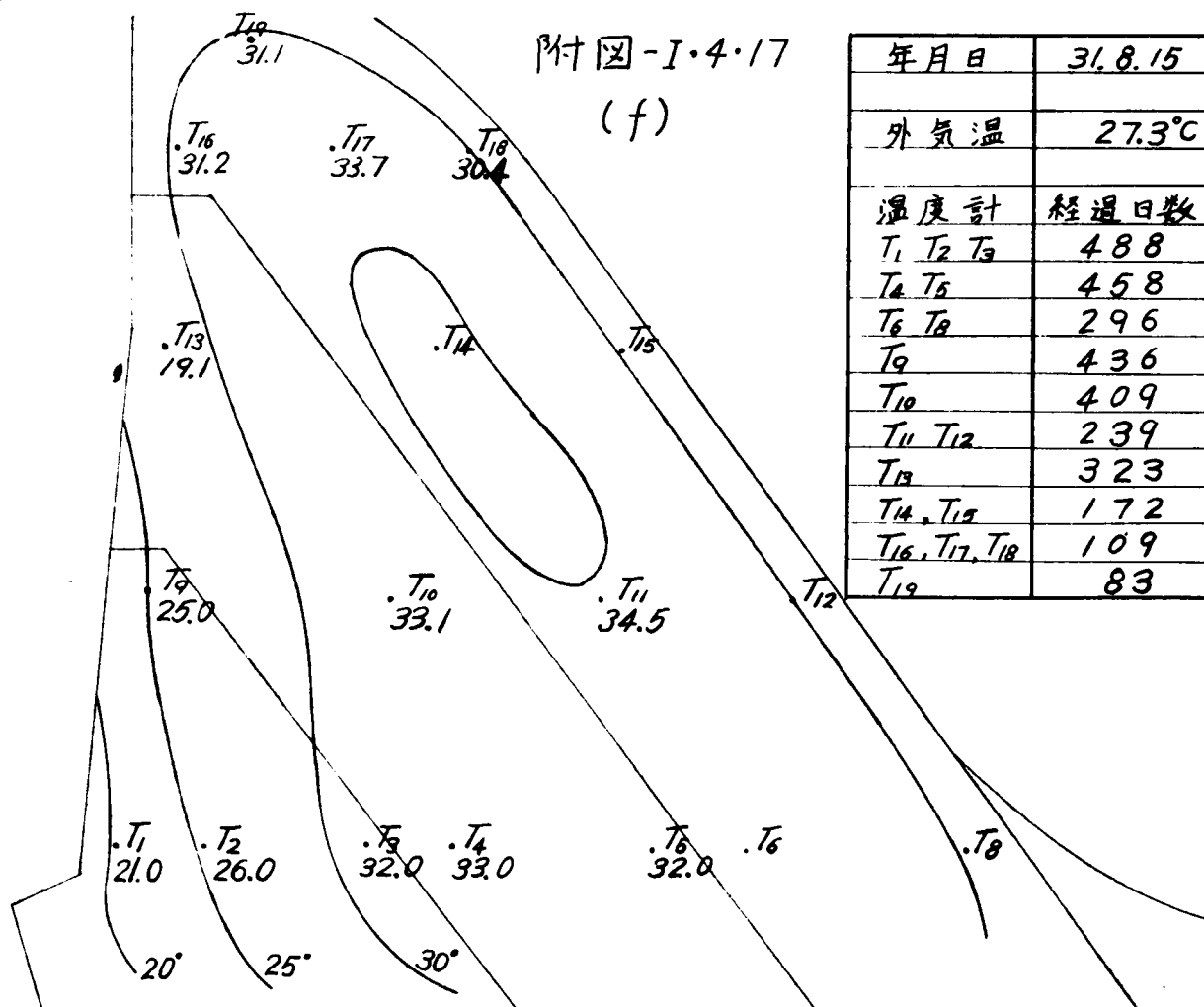
(e)



年月日	31.6.8
外気温	22.5°C
温度計	経過日数
T ₁ T ₂ T ₃	420
T ₄ T ₅	390
T ₆ T ₈	228
T ₉	368
T ₁₀	341
T ₁₃	255
T ₁₁ T ₁₂	171
T ₁₄ T ₁₅	104
T ₁₆ T ₁₇ T ₁₈	41
T ₁₉	15

附図-I.4.17

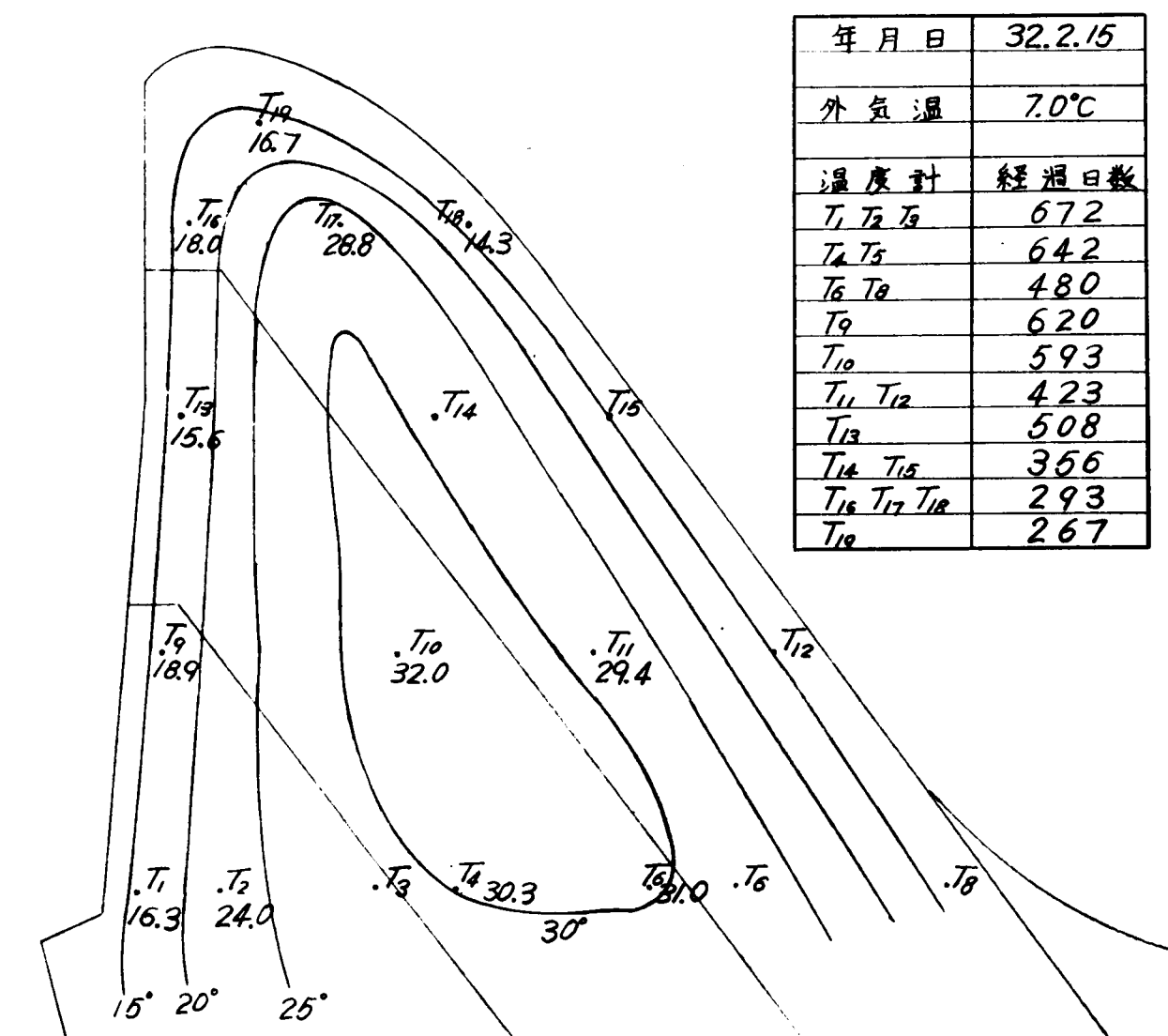
(f)



年月日	31.8.15
外気温	27.3°C
温度計	経過日数
T ₁ T ₂ T ₃	488
T ₄ T ₅	458
T ₆ T ₈	296
T ₉	436
T ₁₀	409
T ₁₁ T ₁₂	239
T ₁₃	323
T ₁₄ T ₁₅	172
T ₁₆ T ₁₇ T ₁₈	109
T ₁₉	83

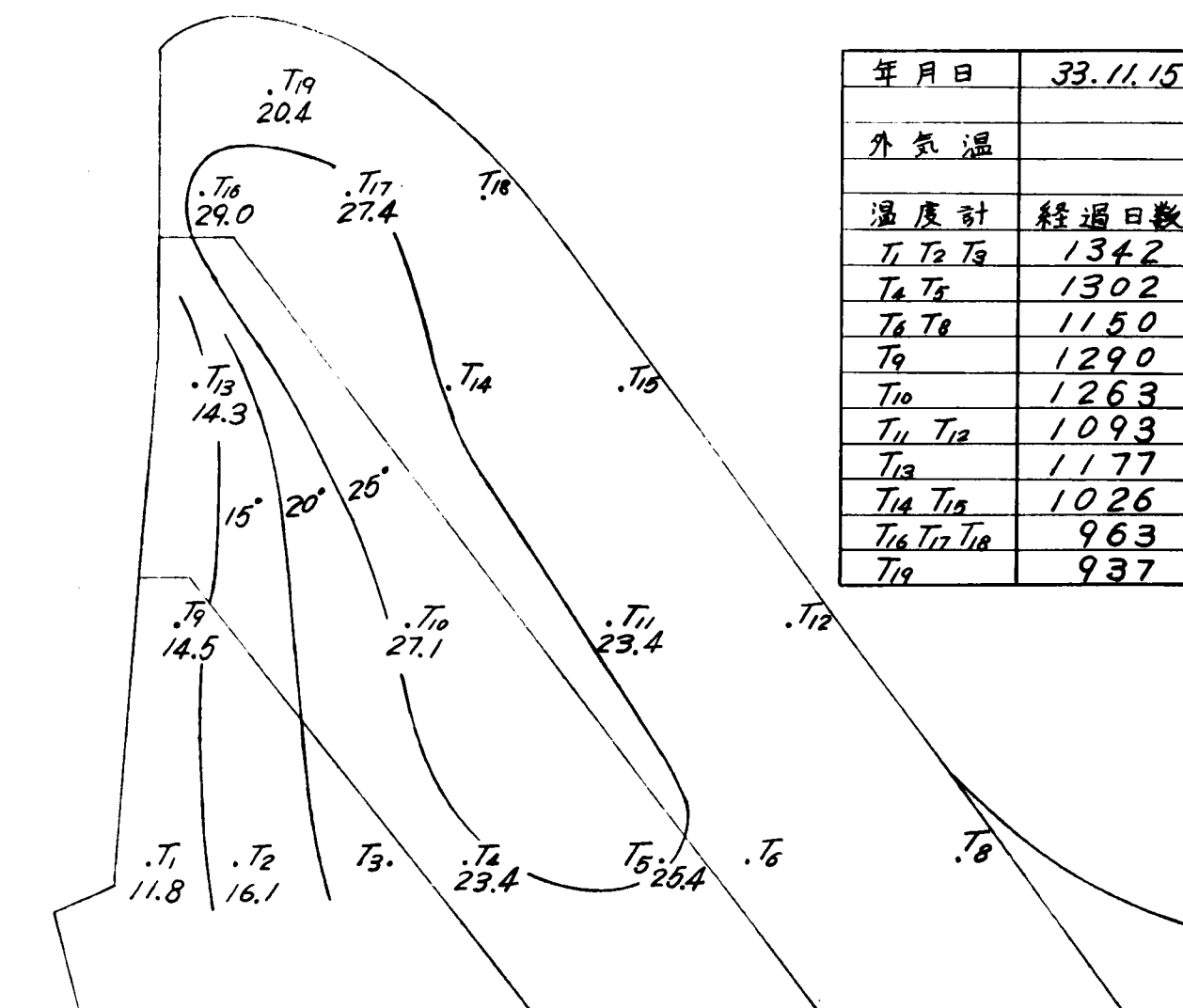
附図 - I・4・17

(9)



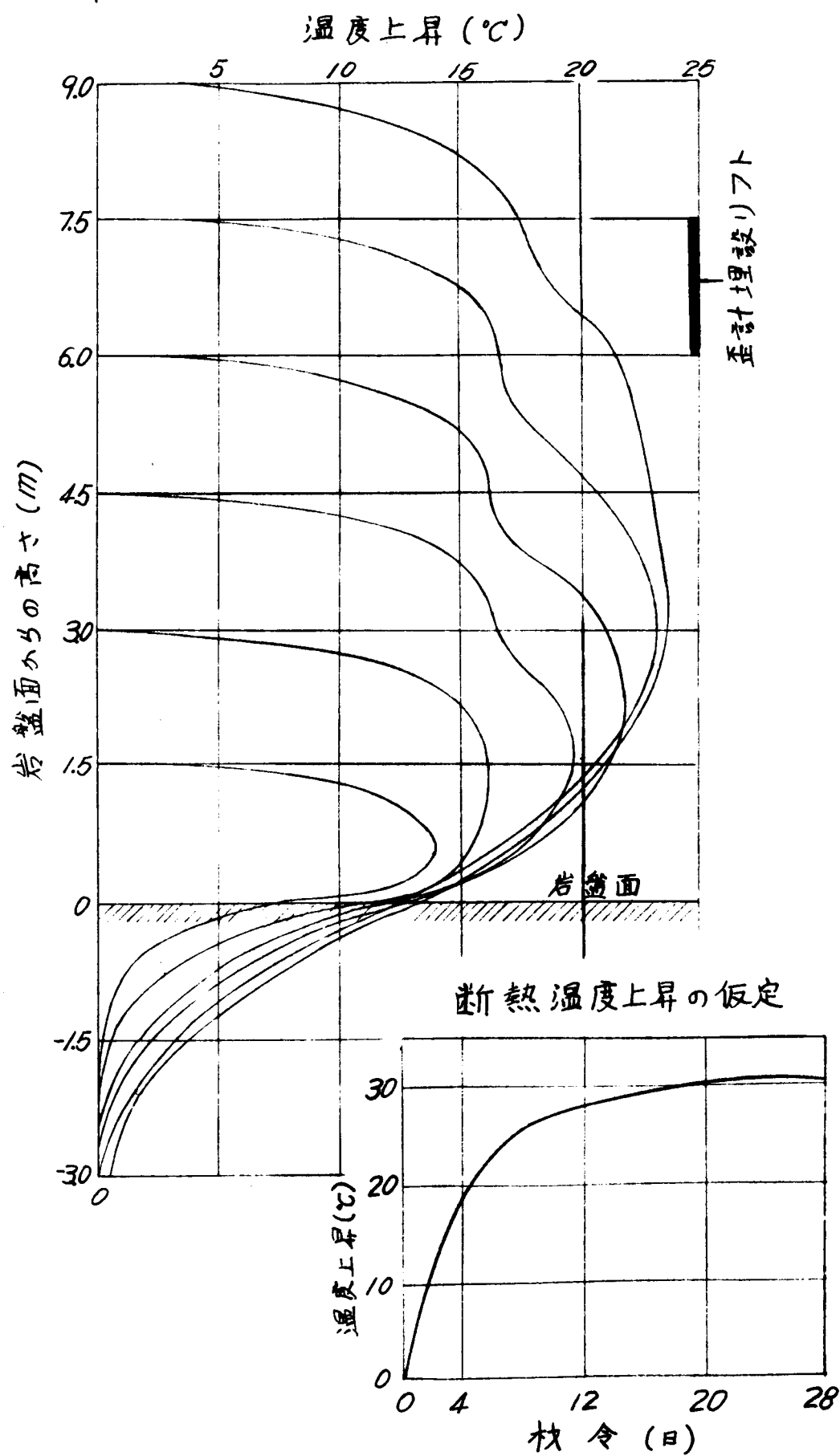
附図-I.4.17

(h)



年月日	33.11.15
外気温	
温度計	経過日数
T ₁ T ₂ T ₃	1342
T ₄ T ₅	1302
T ₆ T ₈	1150
T ₉	1290
T ₁₀	1263
T ₁₁ T ₁₂	1093
T ₁₃	1177
T ₁₄ T ₁₅	1026
T ₁₆ T ₁₇ T ₁₈	963
T ₁₉	937

附図-I.4.18 打設層の湿度分布



附図-I.4.19 応力状態

測点 I II III IV V VI VII

(a) 30年5月4日
A 7'ロックのみ

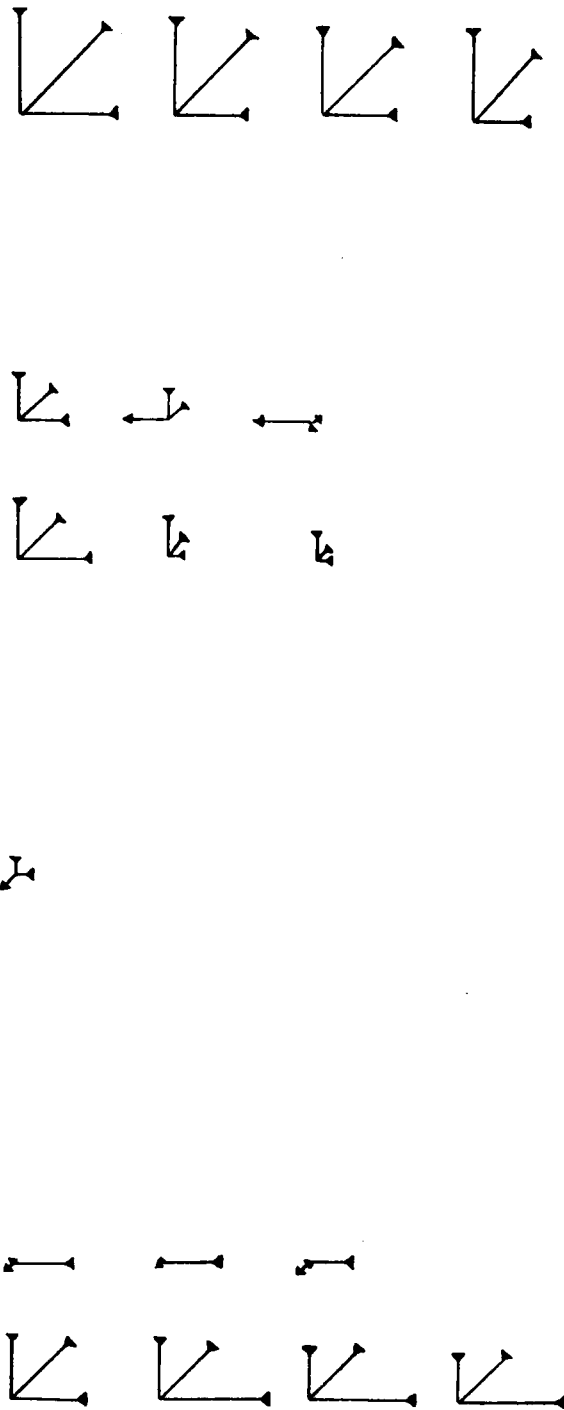
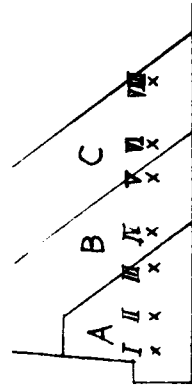
(b) 30年10月24日
A, B 7'ロックのみ

(c) 31年6月8日
A, B, C 7'ロック

(d) 32年2月15日
A, B, C 7'ロック

(e) 32年8月15日
A, B, C 7'ロック

(f) 33年5月15日
A, B, C 7'ロック

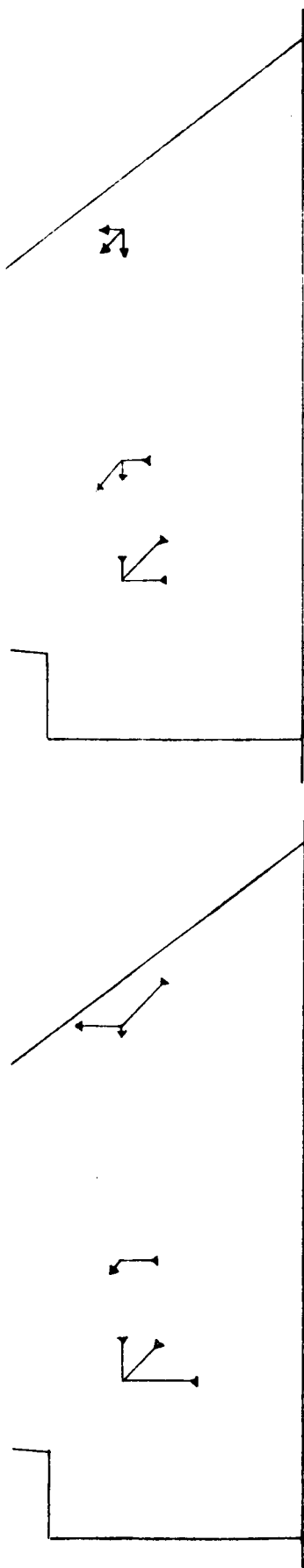


応力 (Kg/cm²)
— 40 — 20 — 0 — 20 — 40 — 88 —

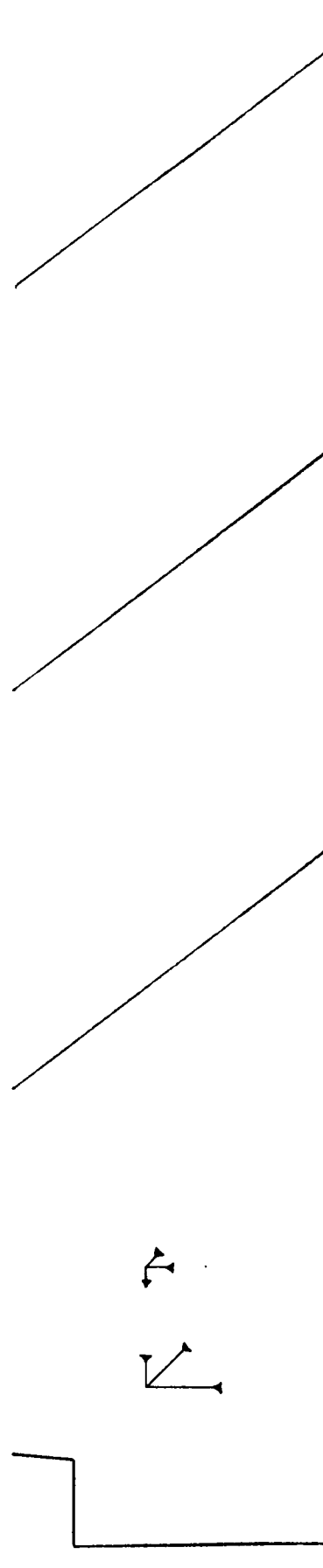
附図-I・4・20 昭和30年5月14日よりの応力増加

(a) 30年10月24日

(b) 31年6月8日



(c) 31年8月15日

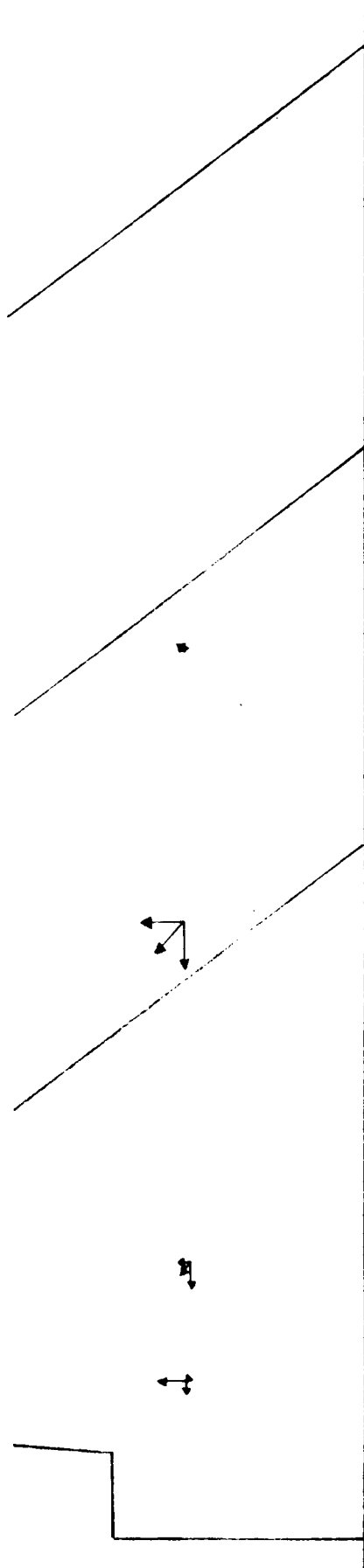


応力 (Kg/cm^2)

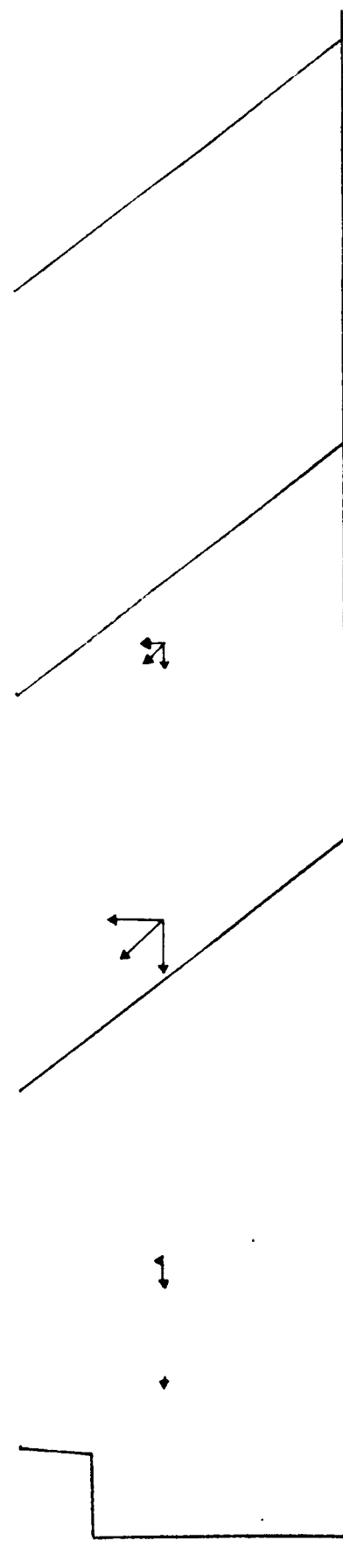
40 20 0 20 40

附図-I.4.2/ 昭和30年10月24日の応力増加

(a) 31年6月8日

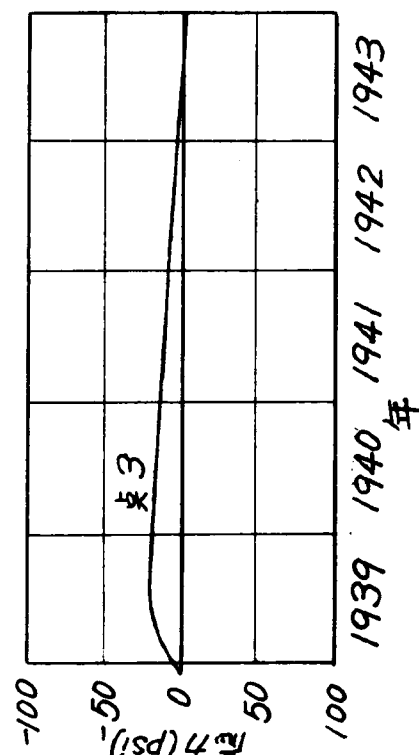
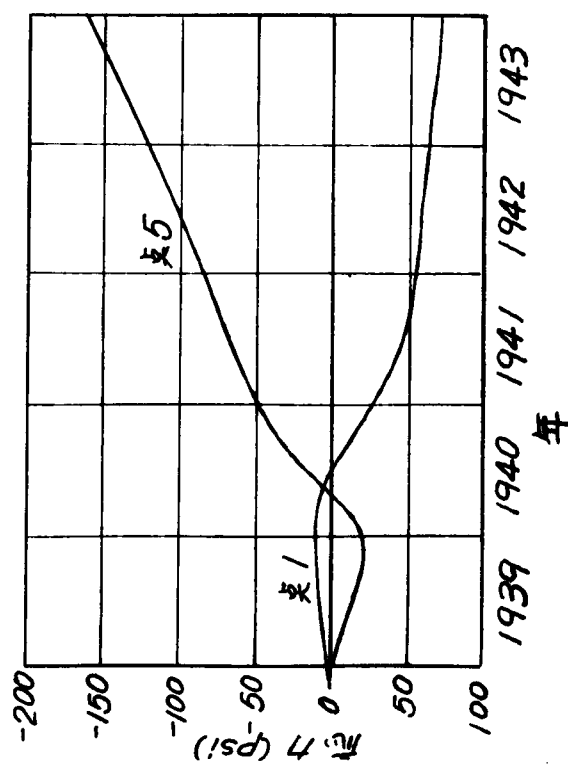
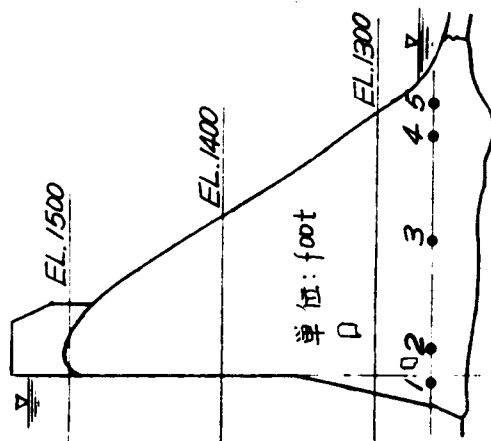
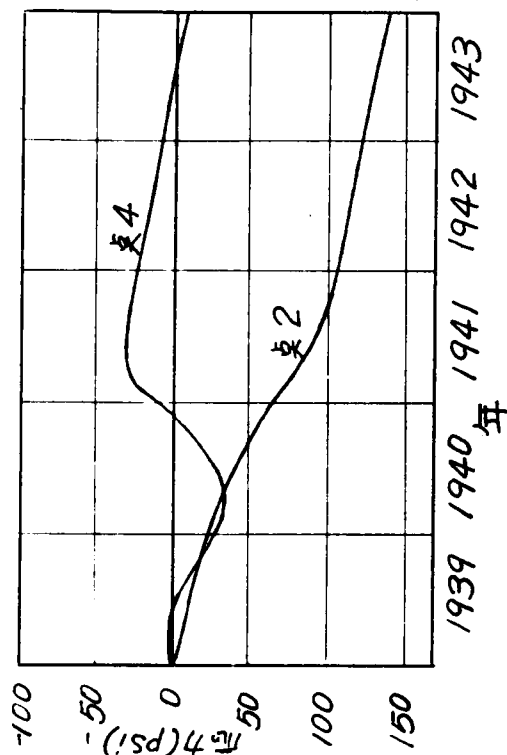
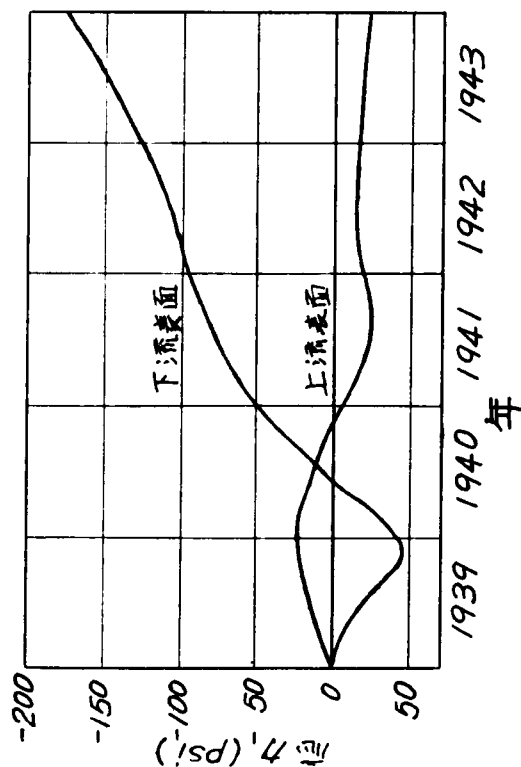


(b) 31年8月15日

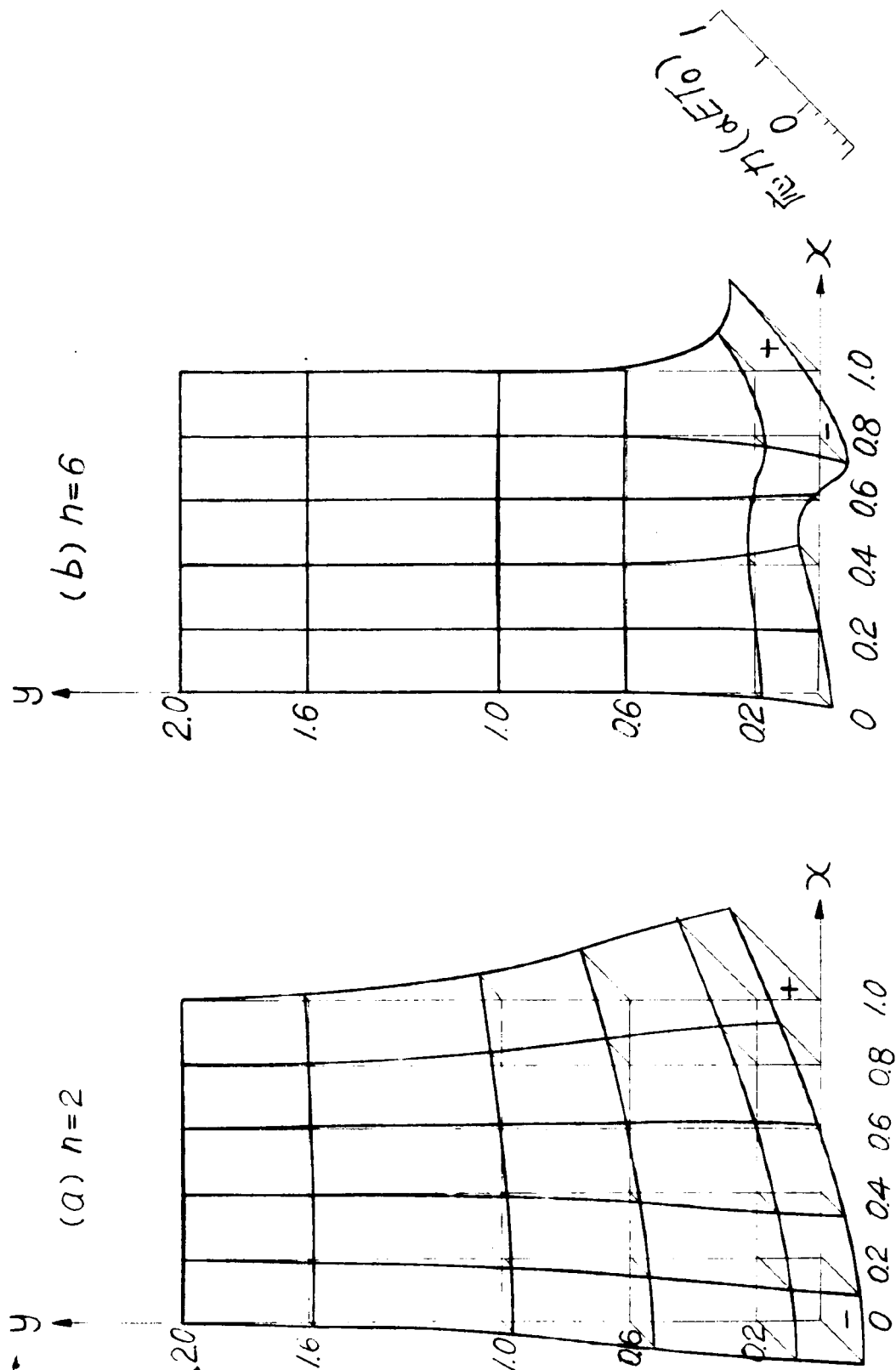


応力 (Kg/cm^2)
40 20 0 20 40

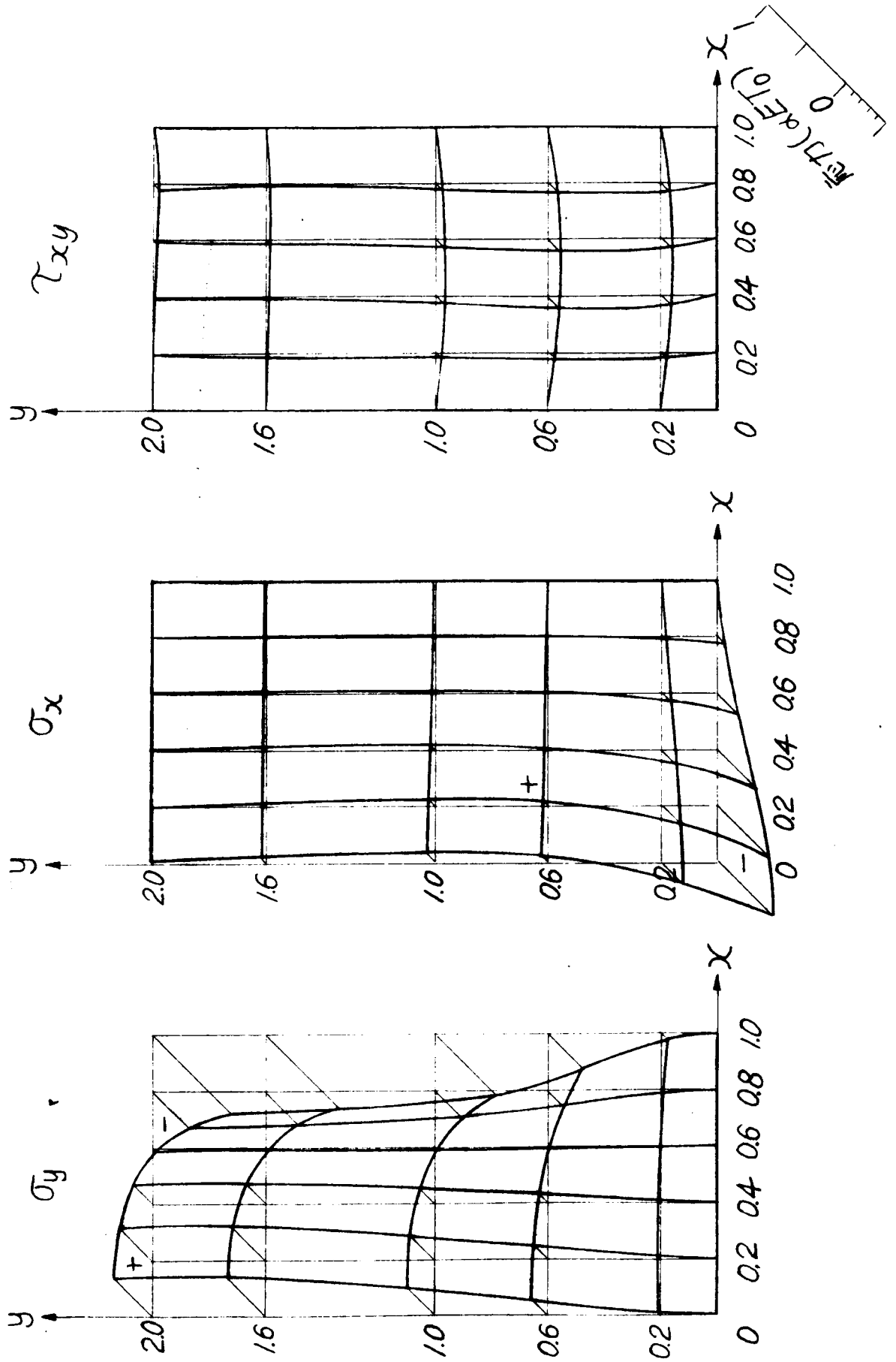
附図-I.4.22 Hiwassee ダムの熱応力(鉛直応力)



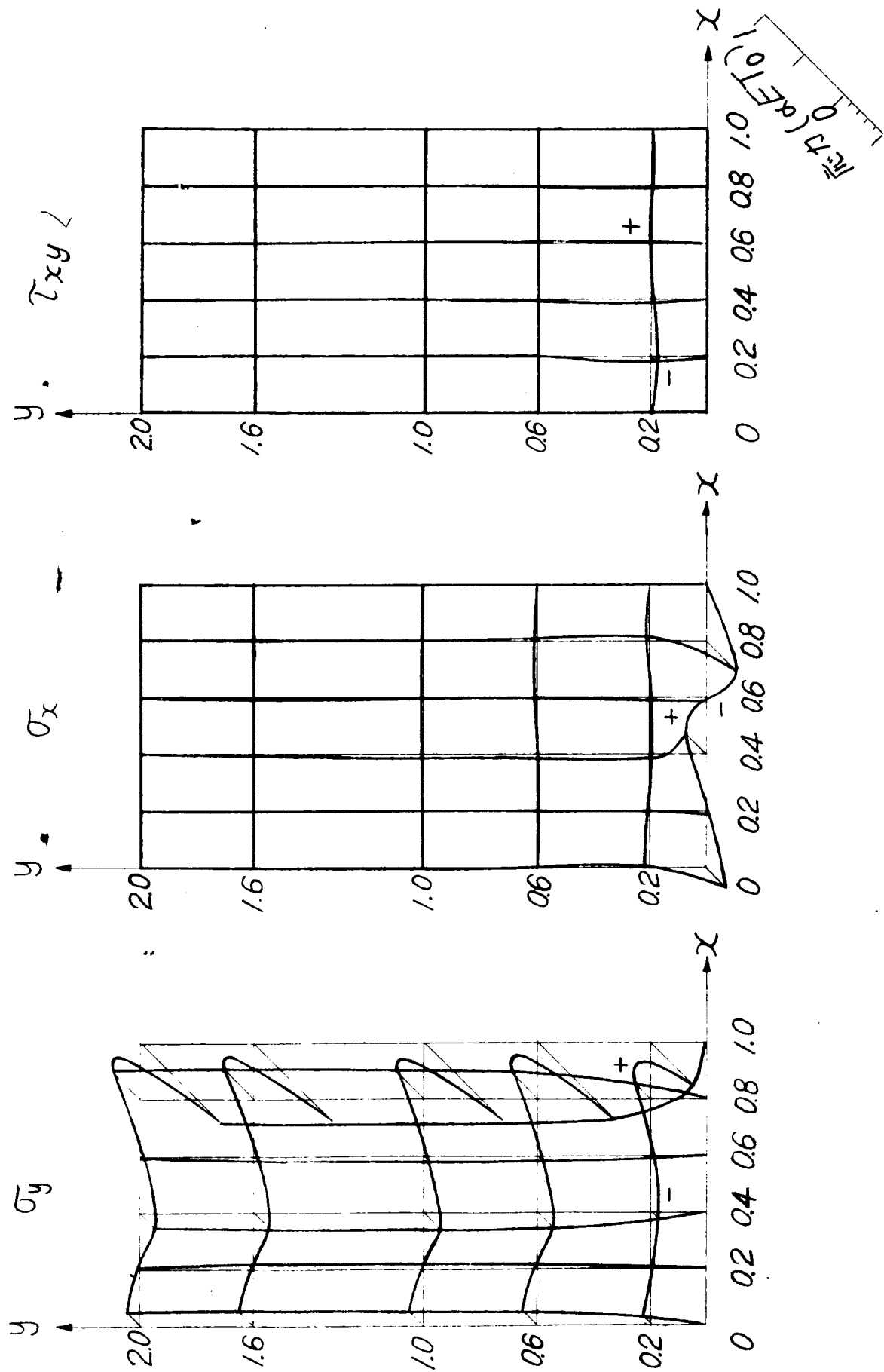
附圖-II-2.1 附加応力 σ_y の状態 ($h=\infty$)



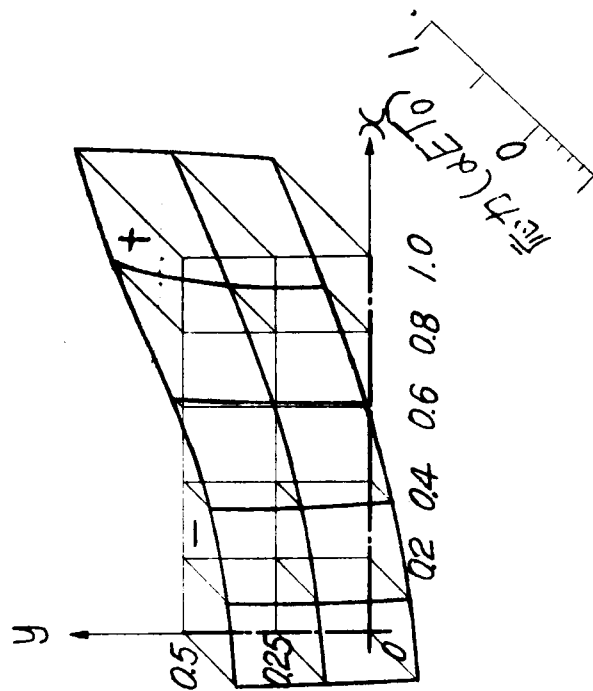
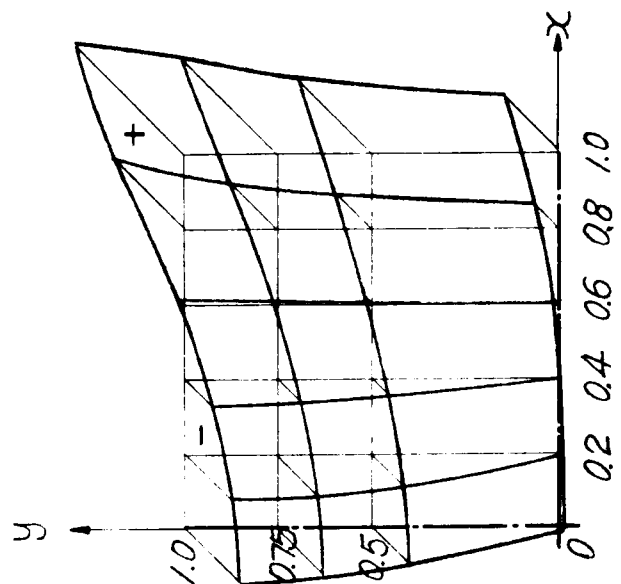
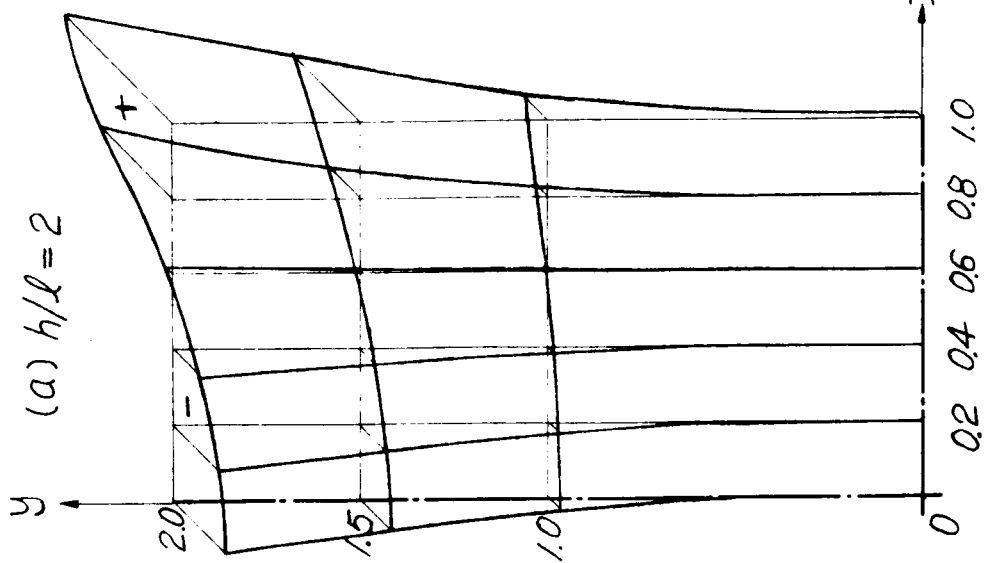
附图-II·2·2 热应力状态 ($h=\infty, n=2$)



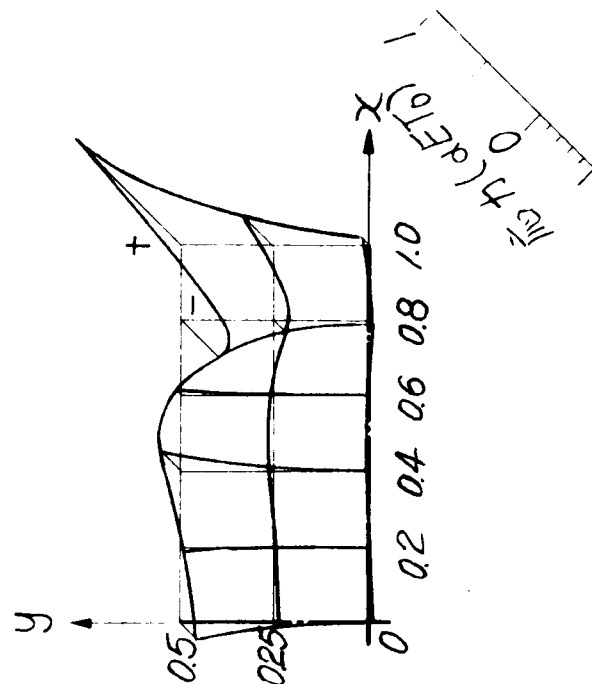
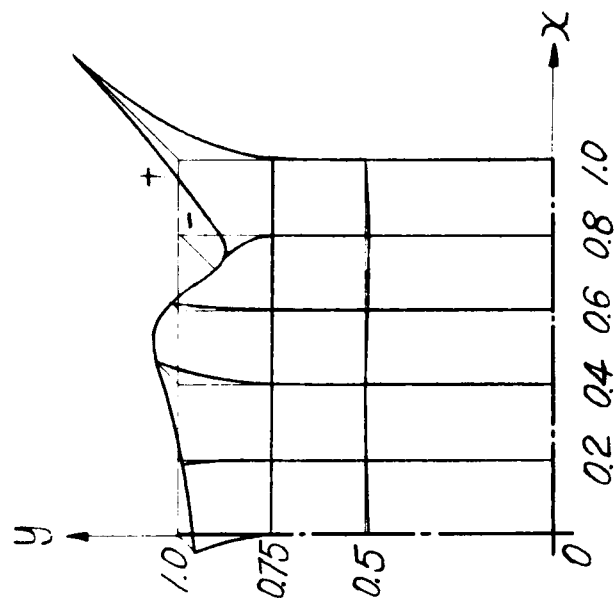
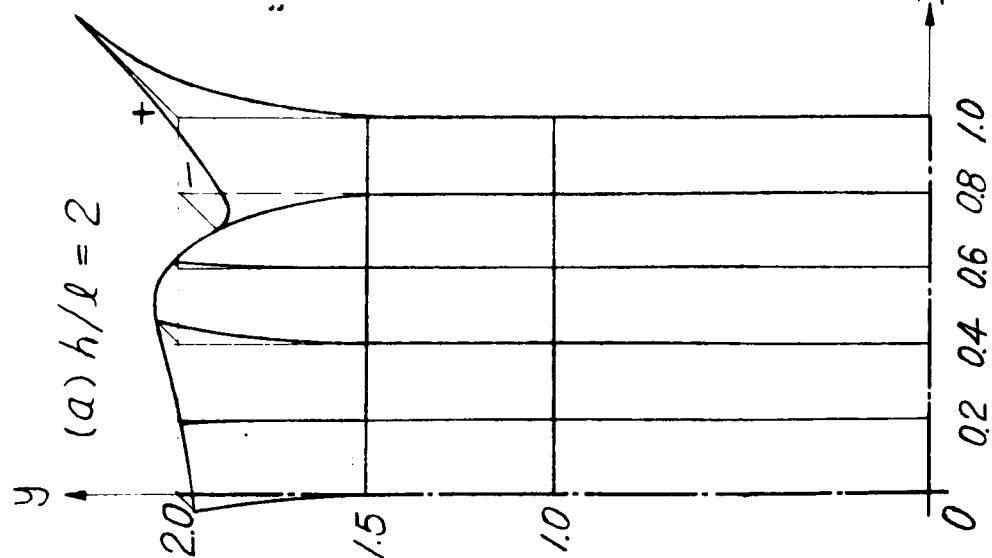
附圖-II·2·3 熱応力状態 ($h=\infty, n=6$)



附圖-II-2-4 附加应力 σ_y の状態 ($n=2$)



附圖-II-2.5 附加抵抗力 σ_y の状態 ($n=6$)



附図-II・2・6 矩形板の熱応力状態 ($n=2$)

(a) $h/l=2$

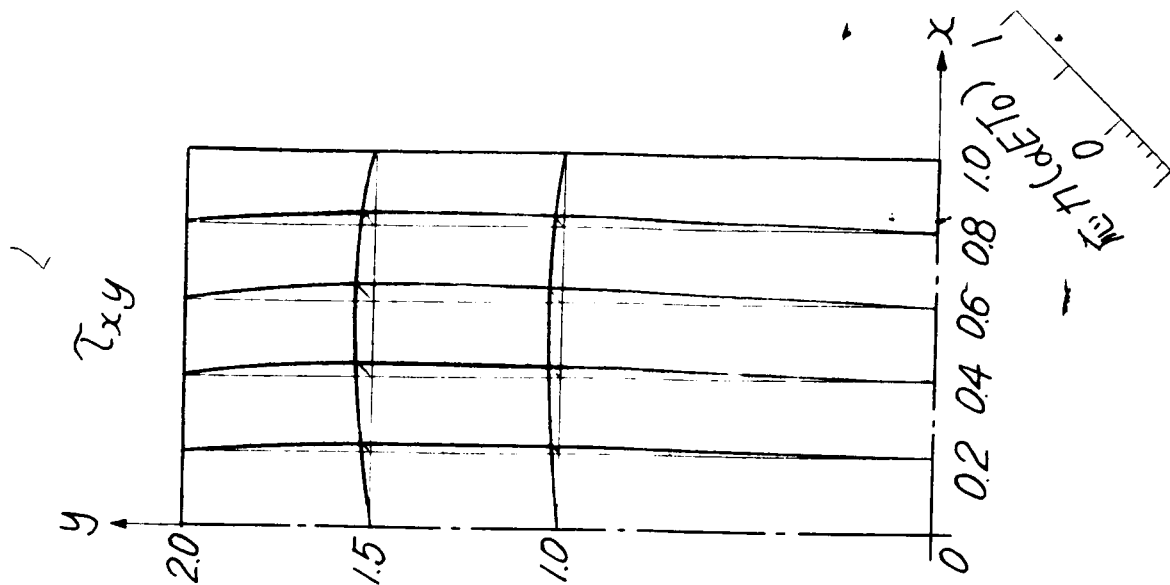
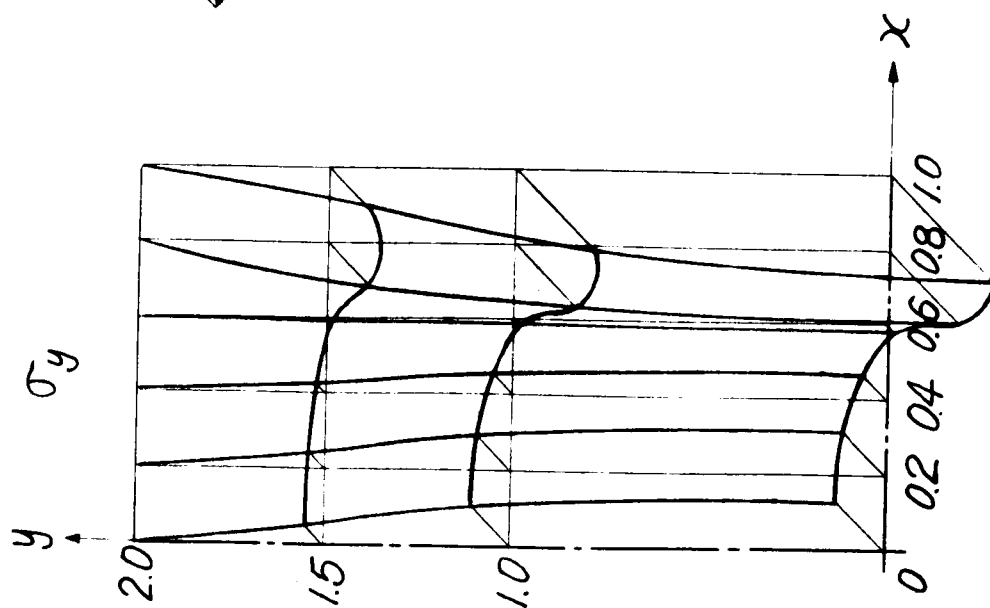


Рис. II-2.6 (b) $h/l = 1$

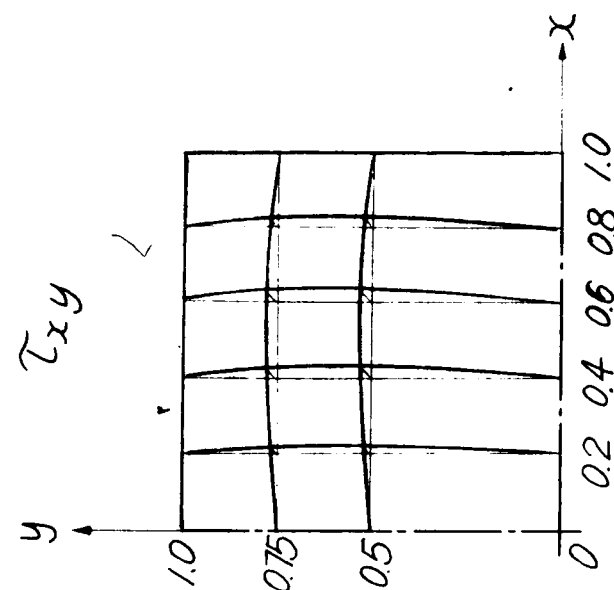
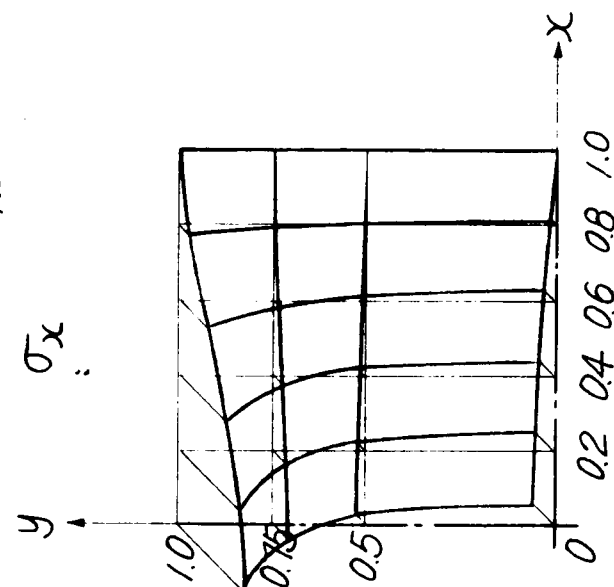
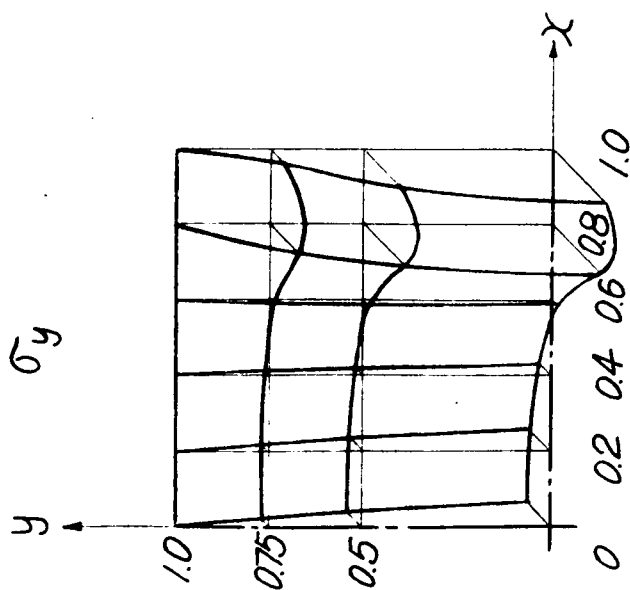
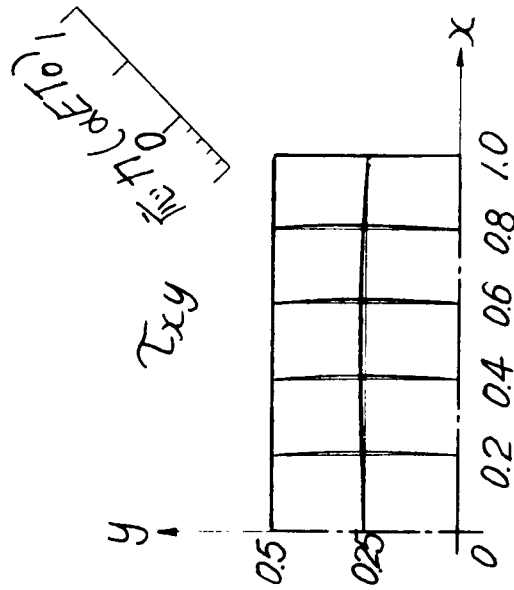
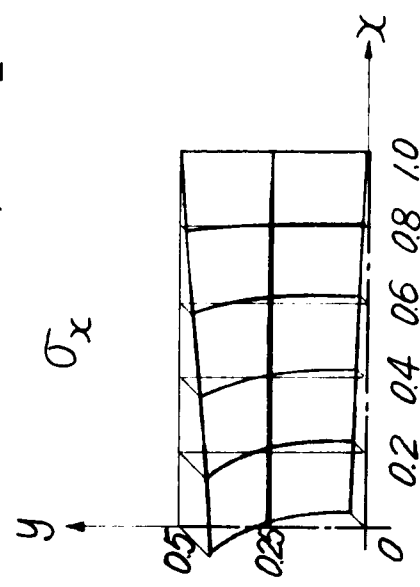
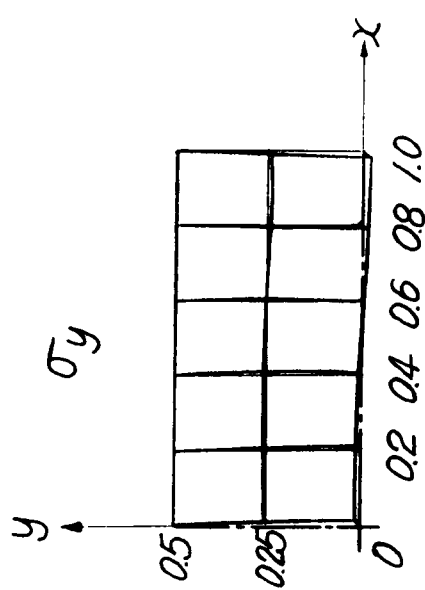
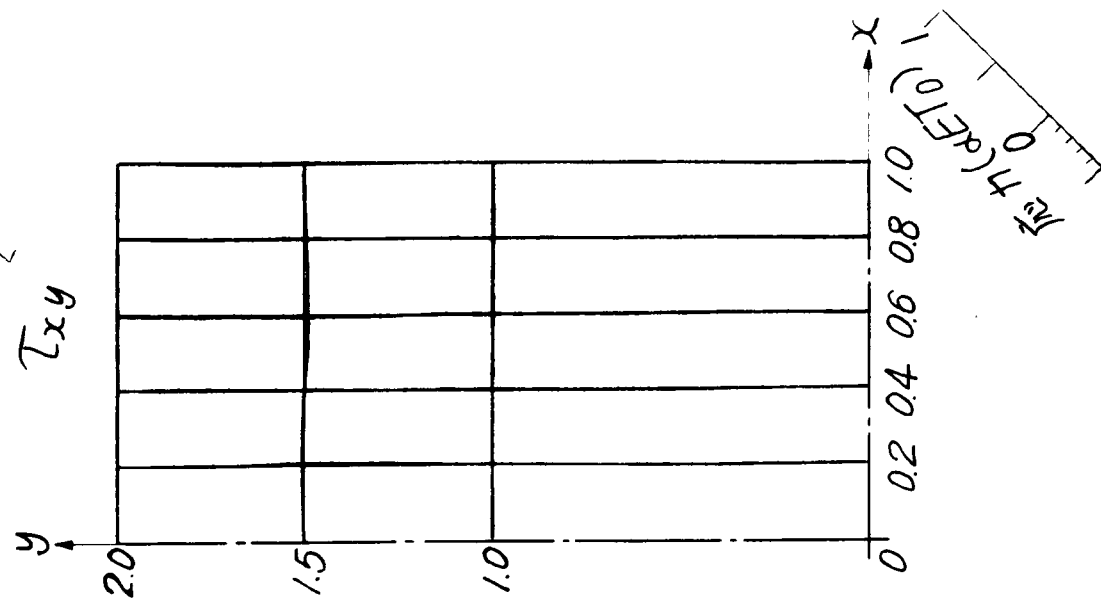
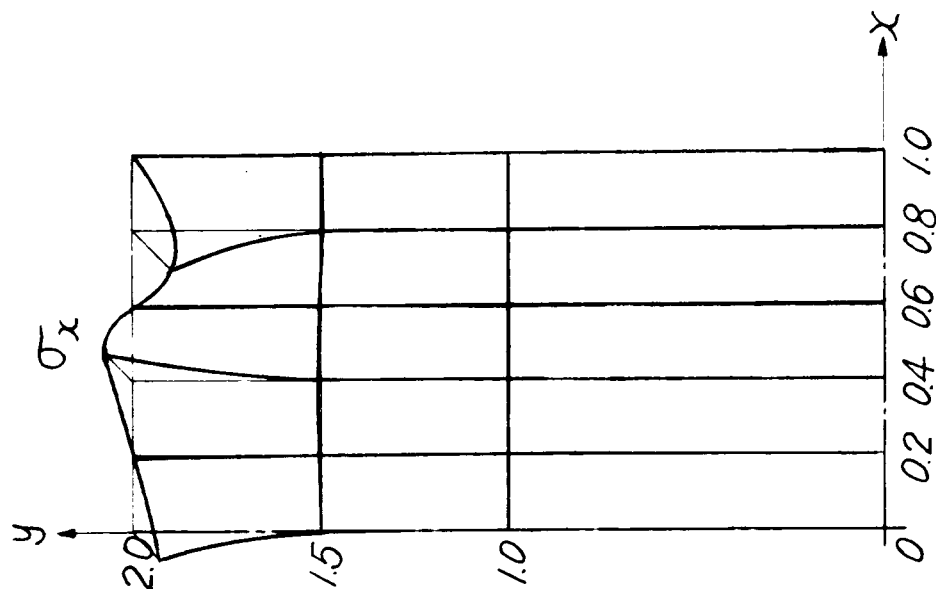
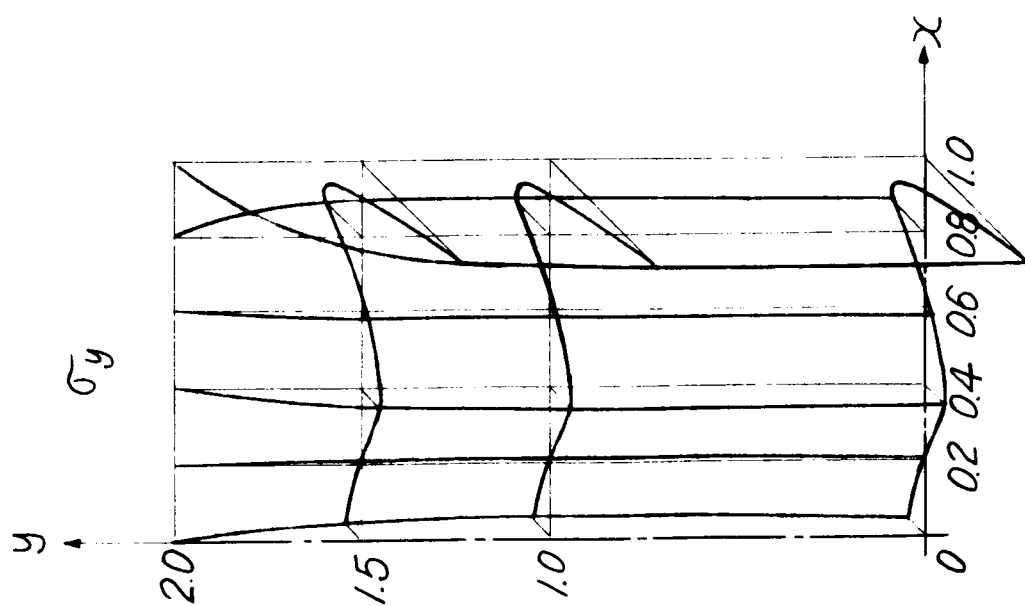


Рис. II-2.6 (c) $h/l = 1/2$

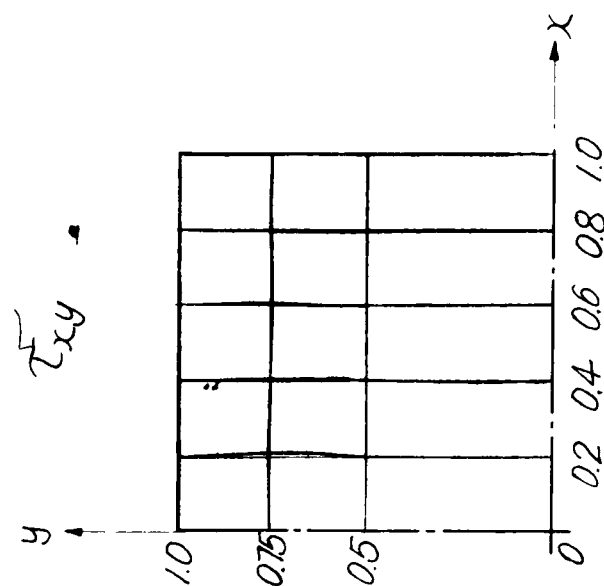
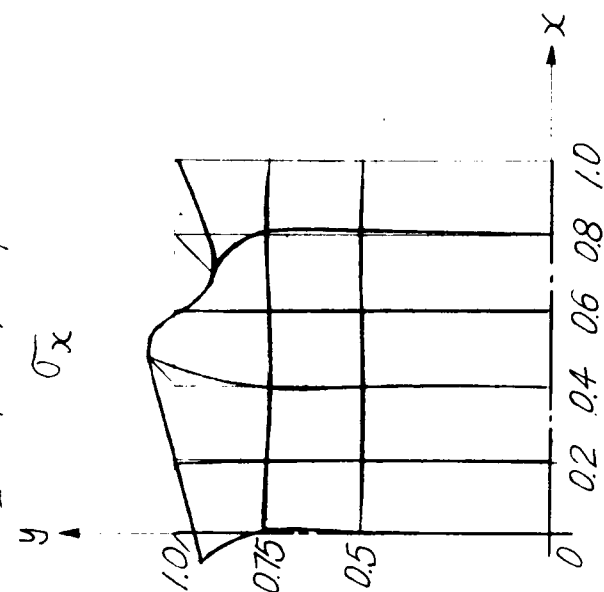
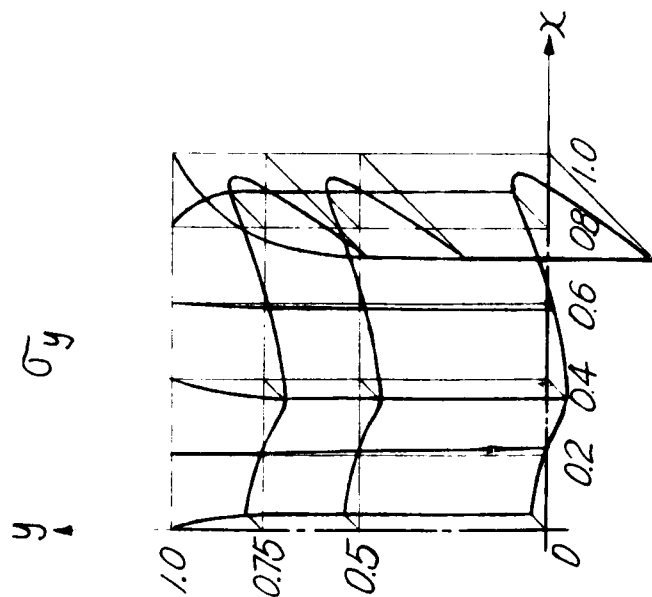
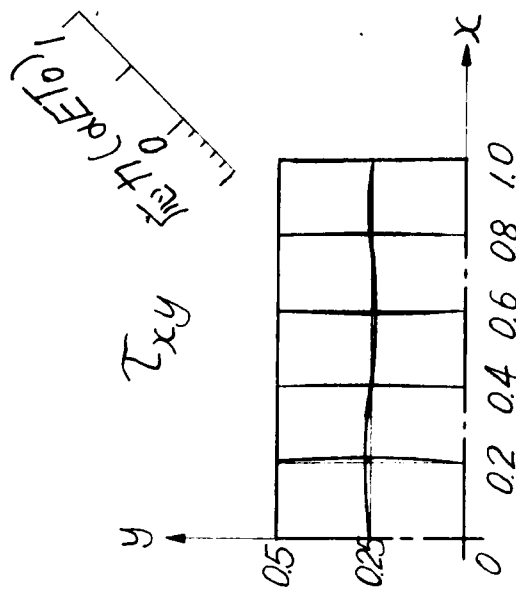
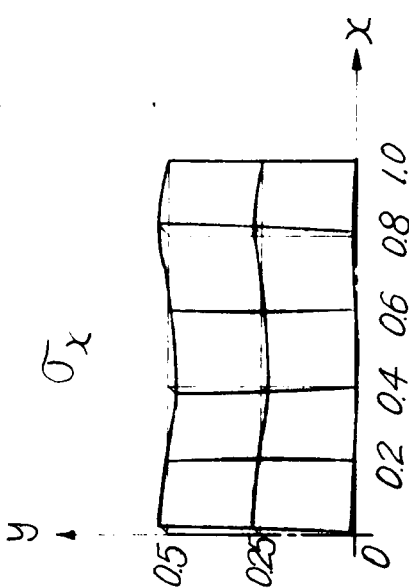
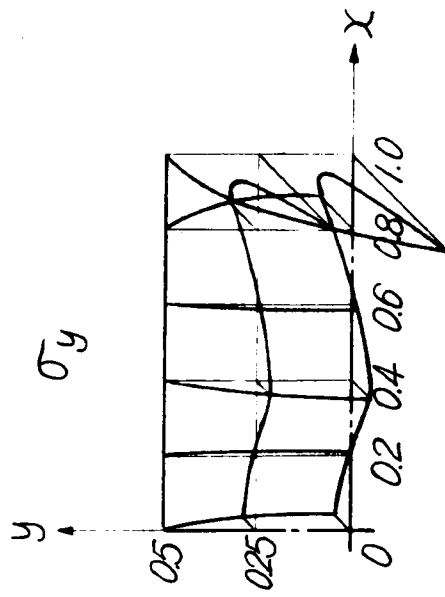


附圖-Ⅱ·2·7 矩形板の熱応力状態 ($n=6$)

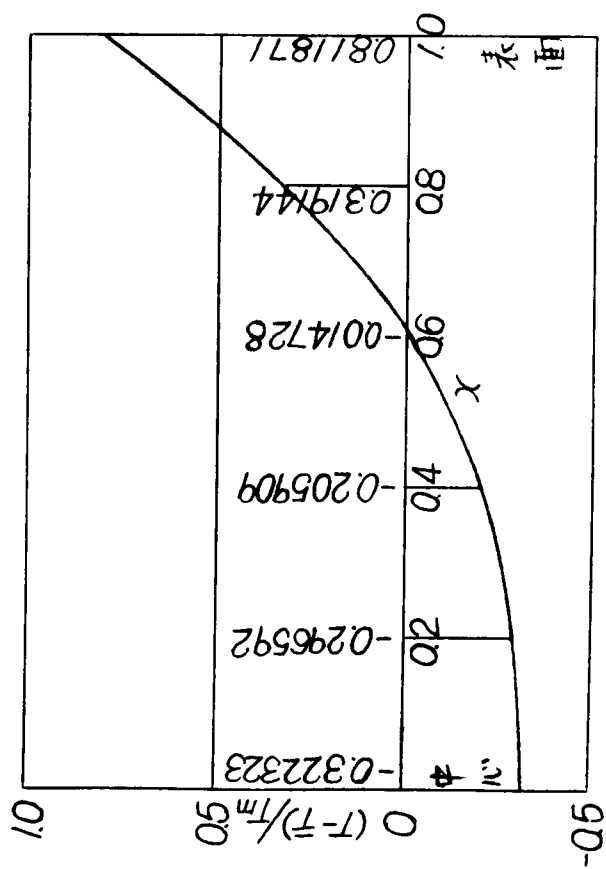
(a) $h/l=2$



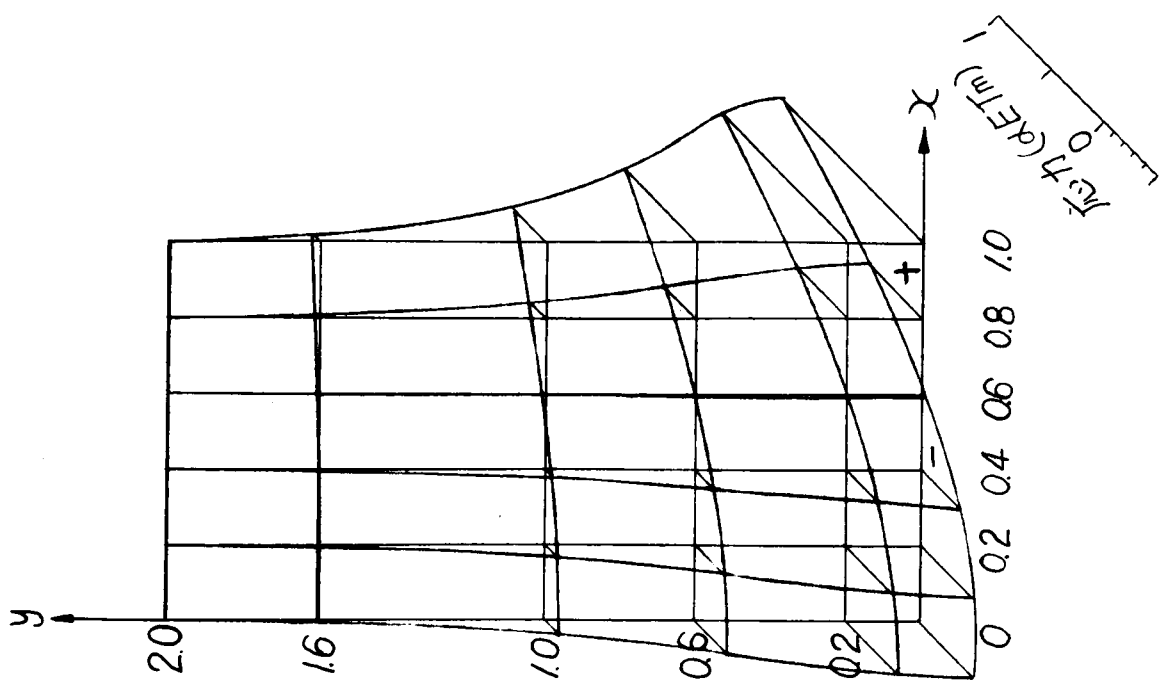
附圖-II.2.7 (b) $h/\ell=1$


$$\text{附圖} - \text{II} \cdot 2 \cdot 7 \text{ (c)} \quad h/l = 1/2$$


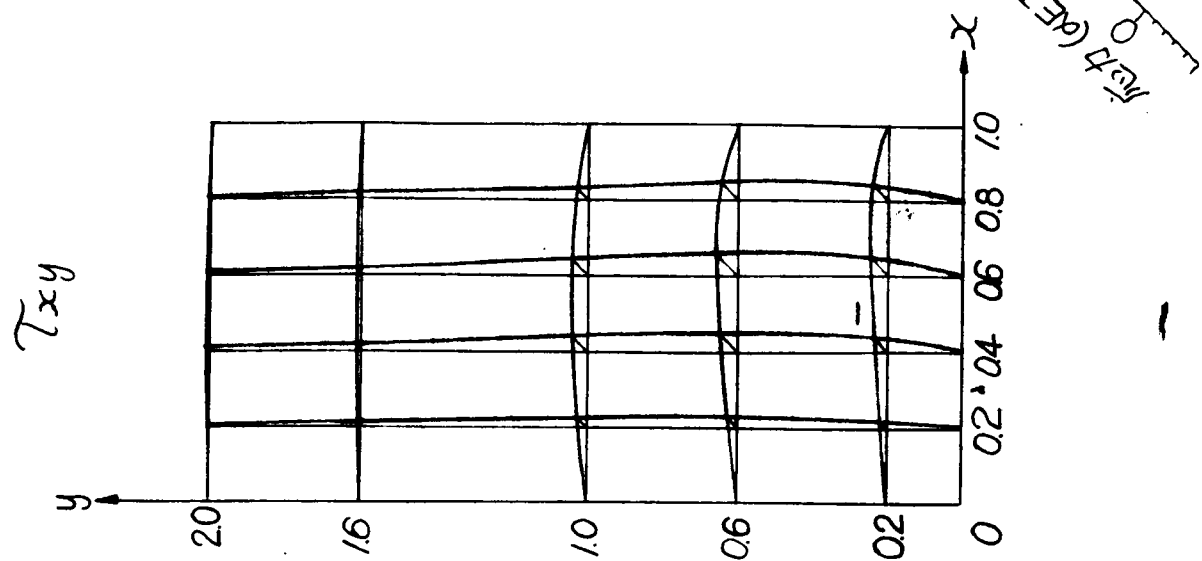
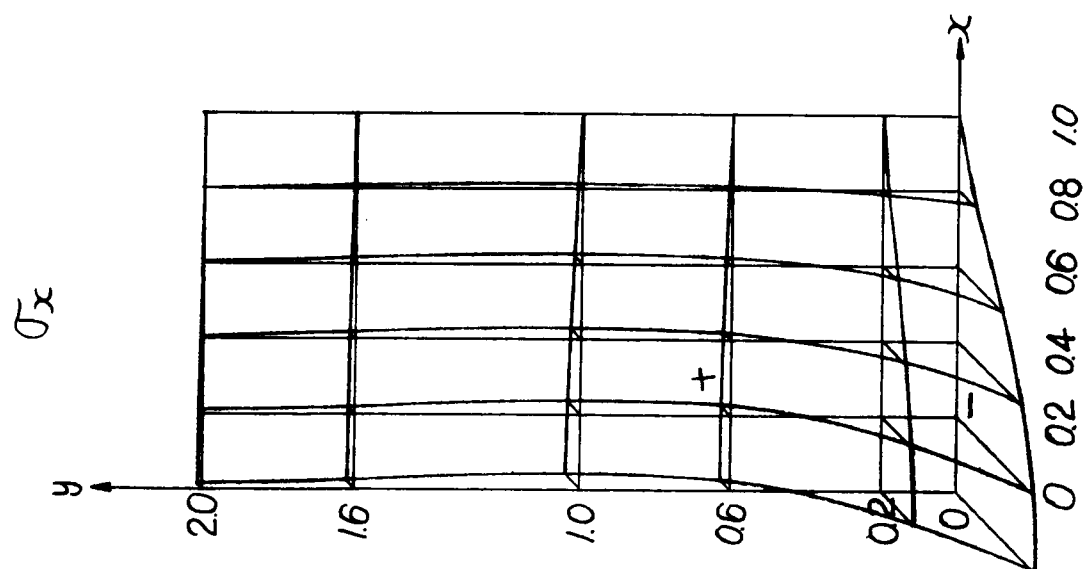
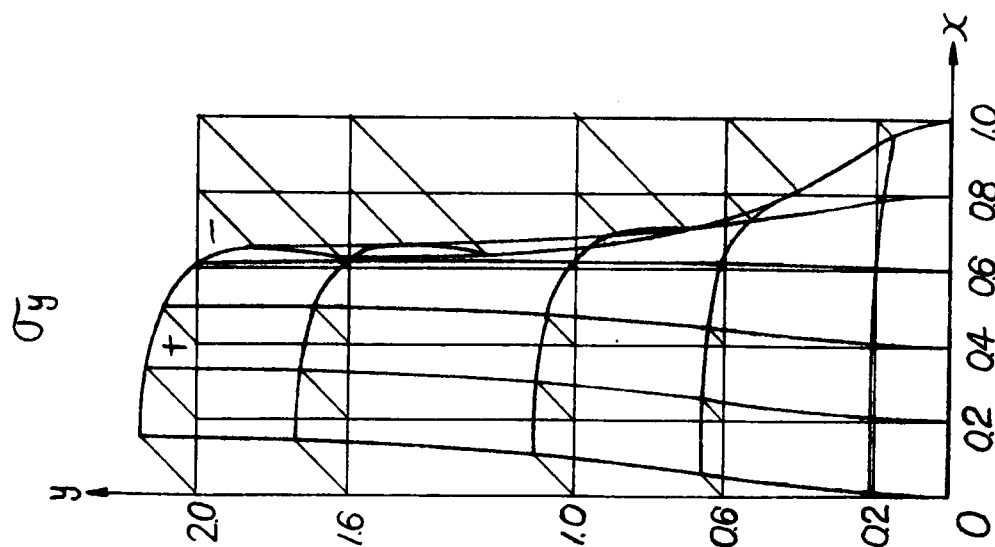
附図-II-3-1 年週期変動の温度分布



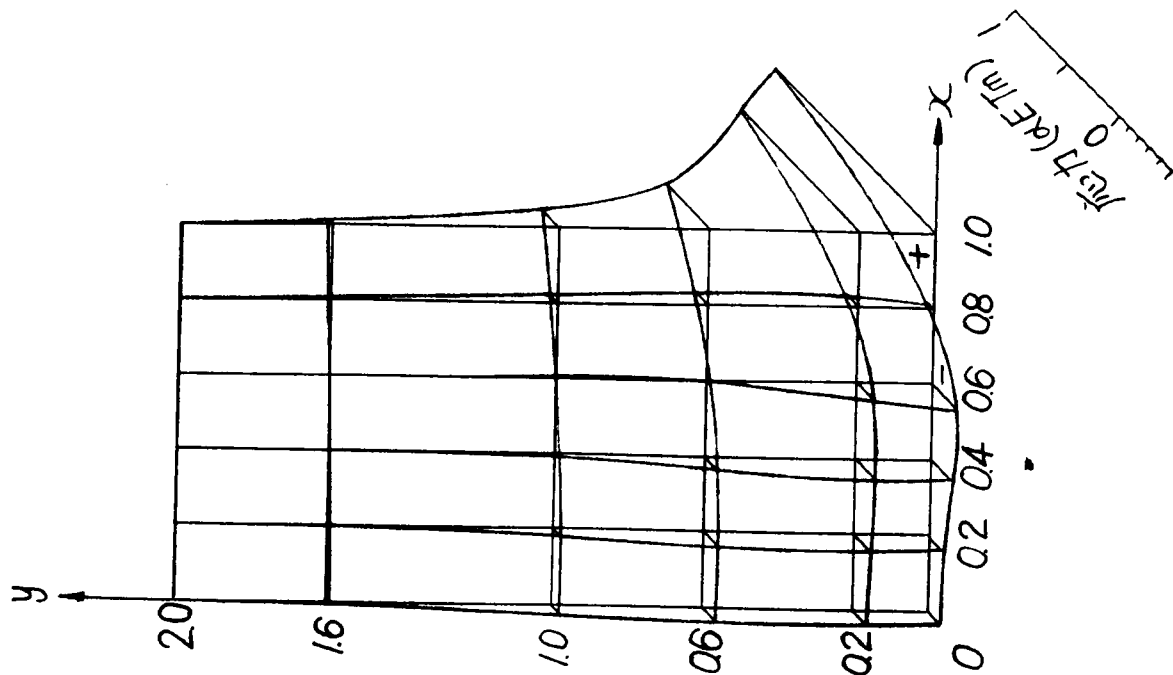
附図-II-3-2 附植能力 ϕ_y
(年週期温度変動のとき)



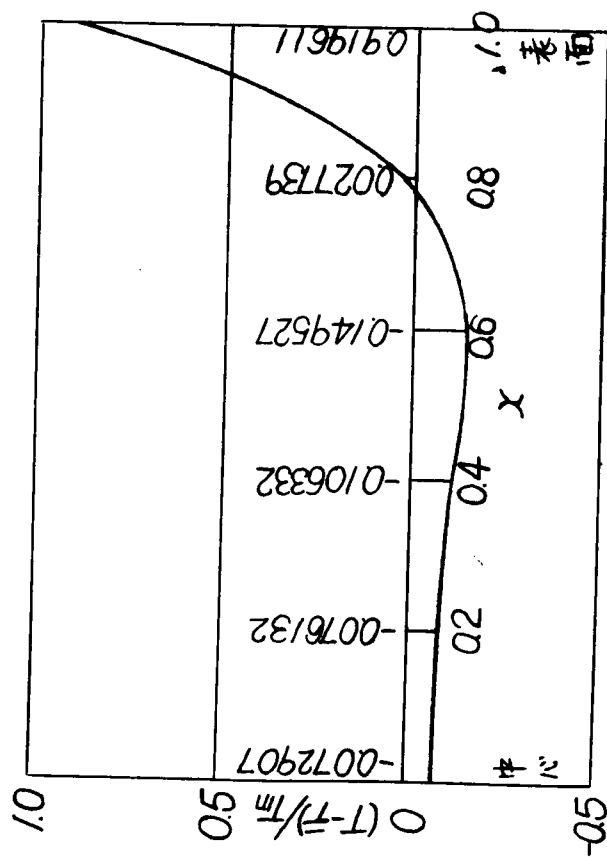
附圖-II-3-3 年週期溫度變動をうけるときの熱応力状態



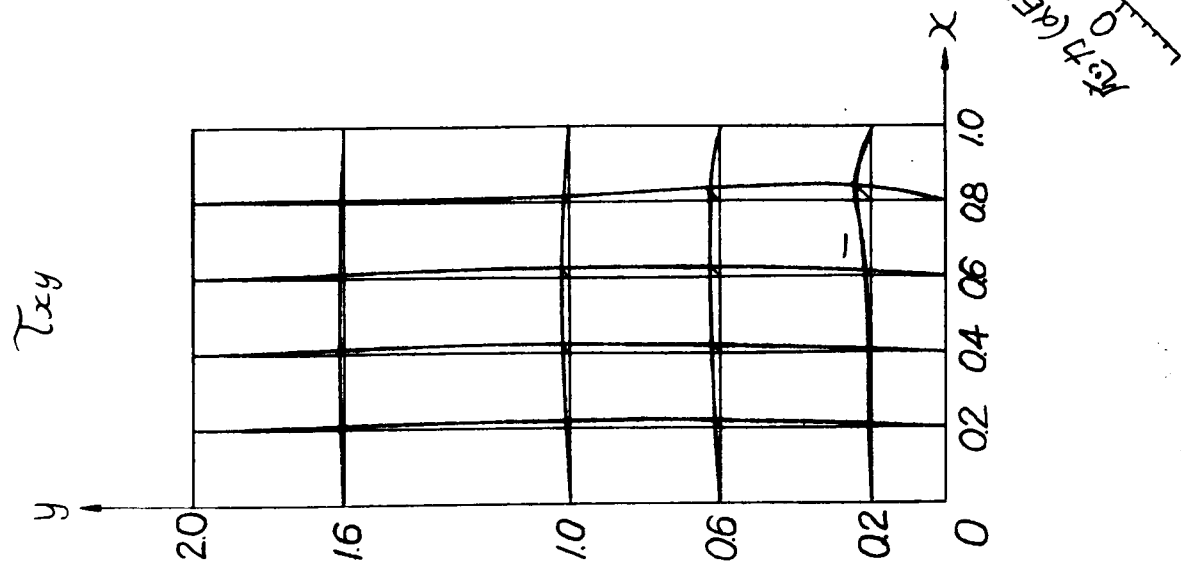
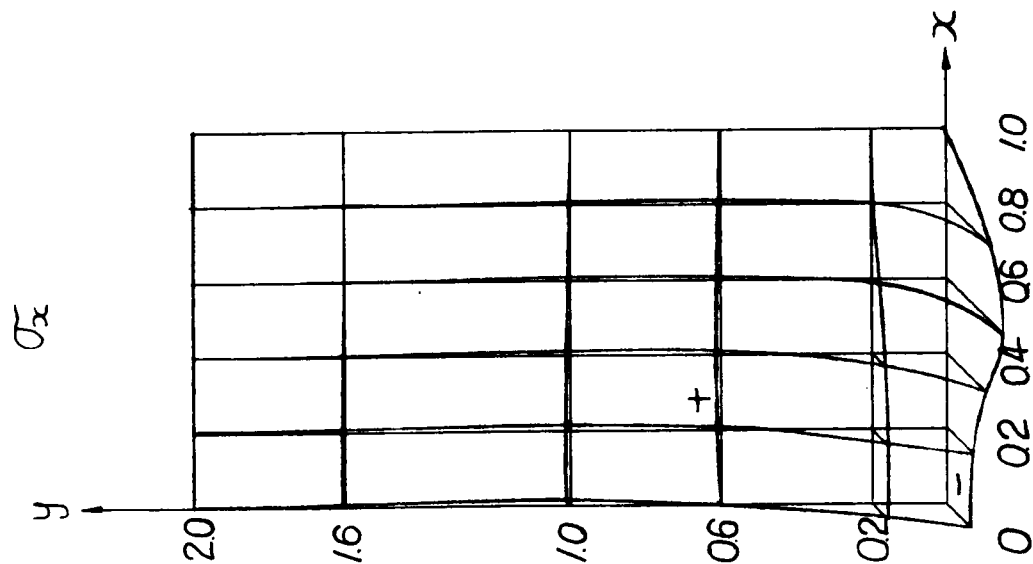
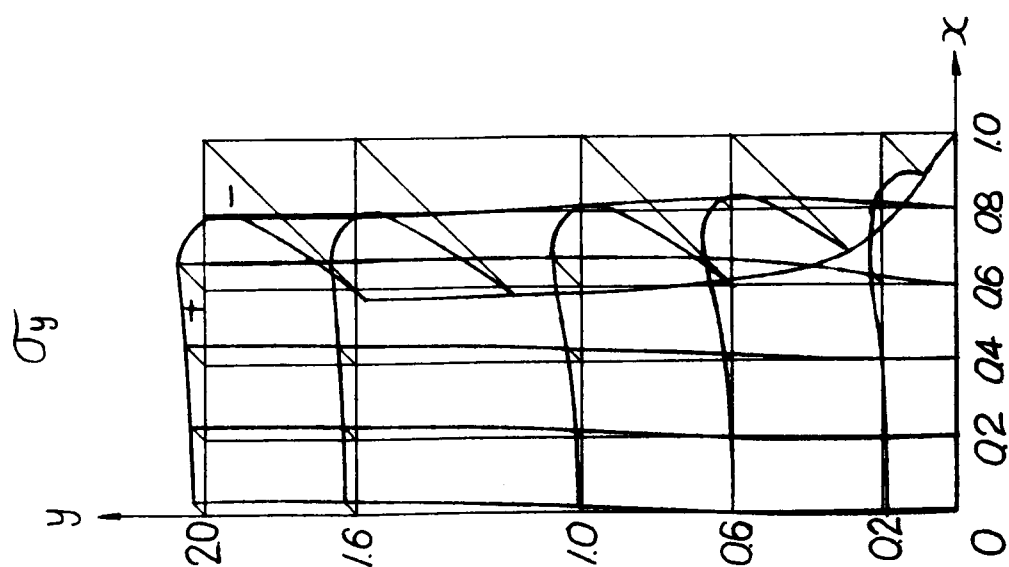
附図-I-3.5 附加応力 σ_y
(日通期温度変動の比)



附図-II-3.4 日通期変動の温度分布

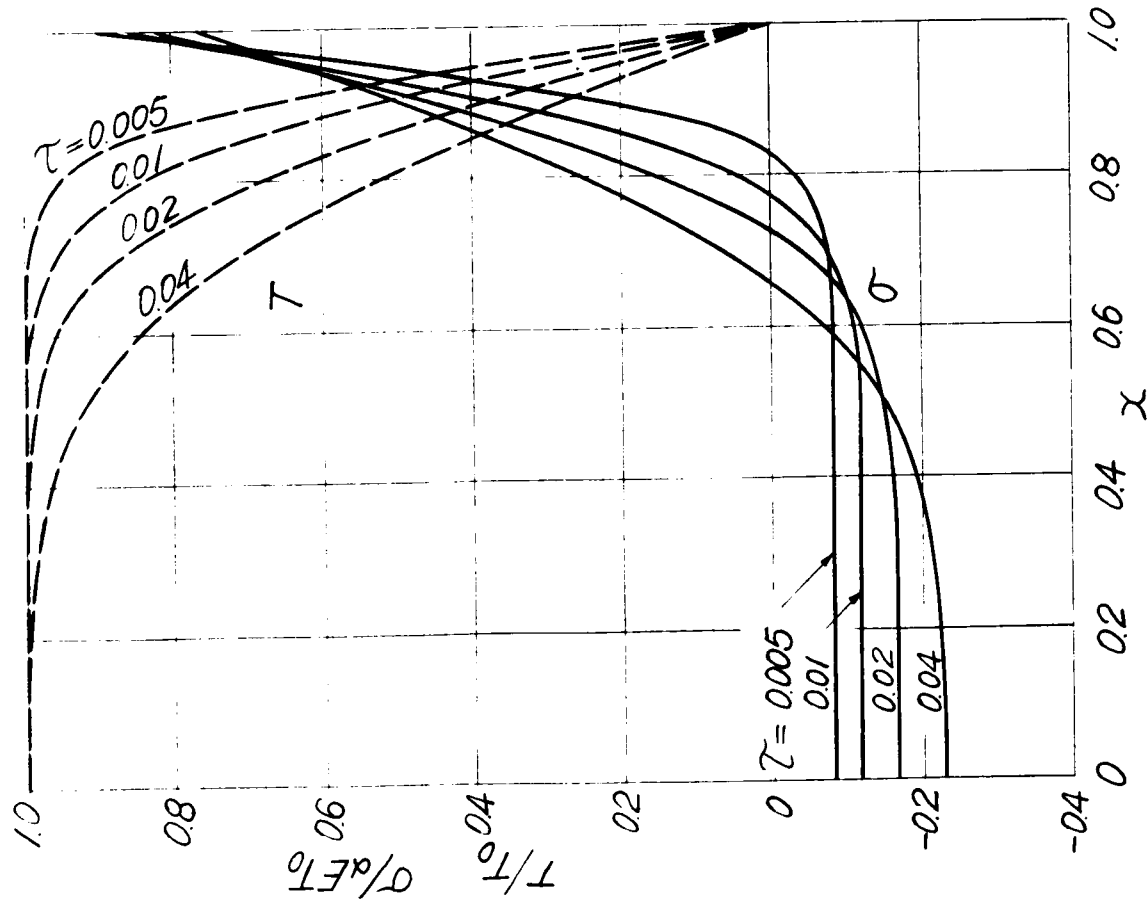


附圖-II-3·6 已過期溫度變動をうけらるゝ熱応力状態



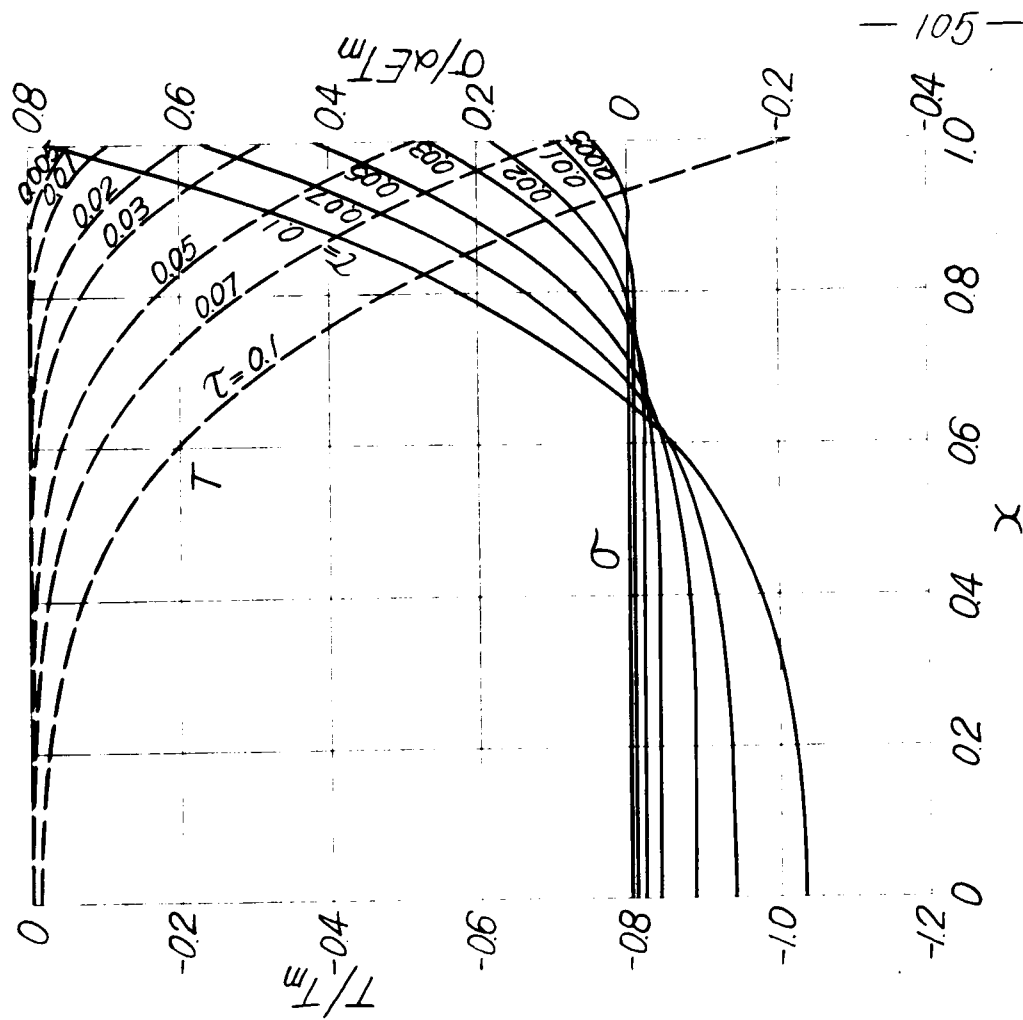
附図-II-3-7 表面が急冷されたときの温度と応力

(無限長の棒)



附図-II-3-8 表面等速温度降下による温度と応力

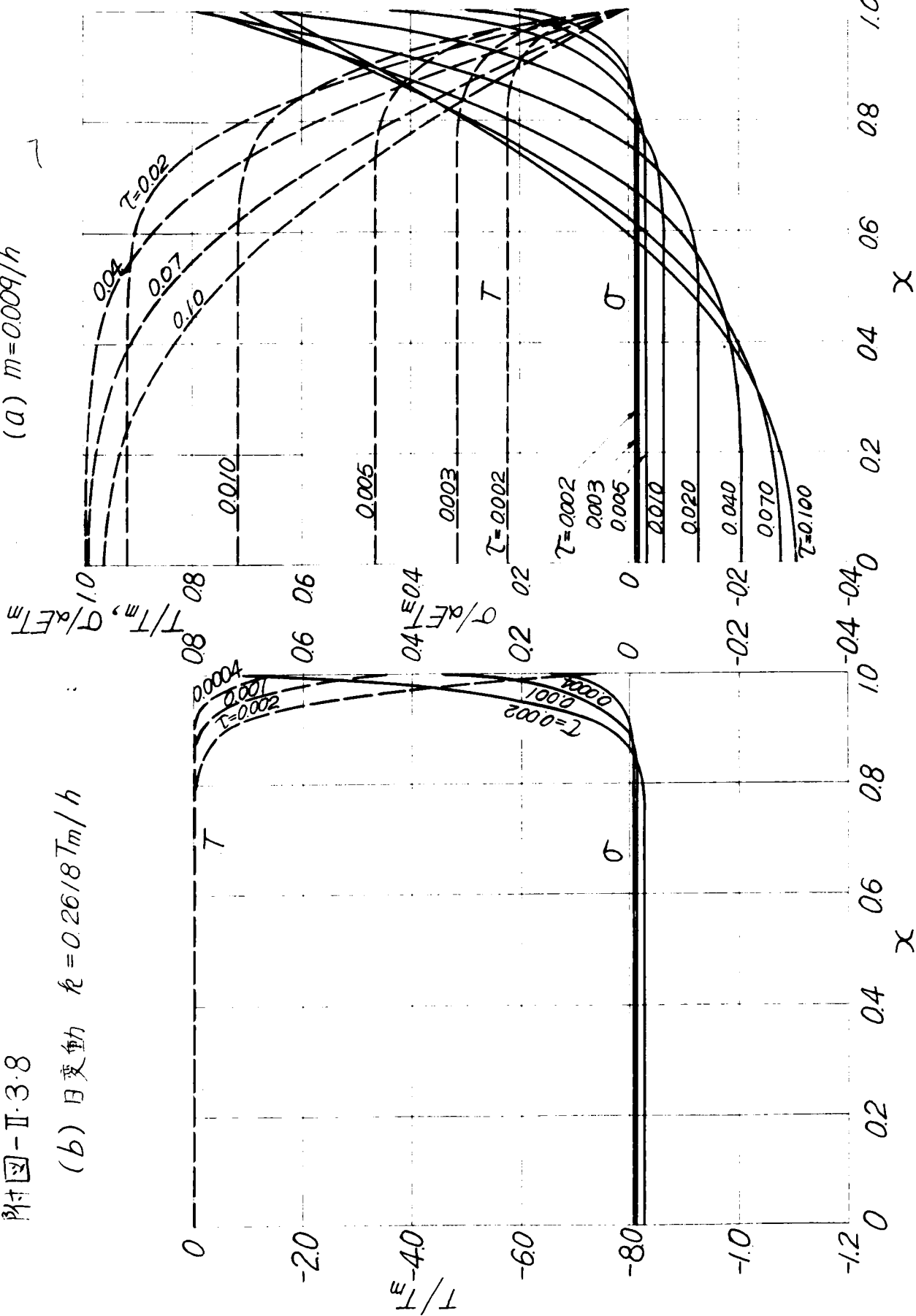
(a) 年変動力 $k=0.0007173 T_m/h$



・ 附圖-Ⅱ・3・9 水和熱の發生による温度と応力

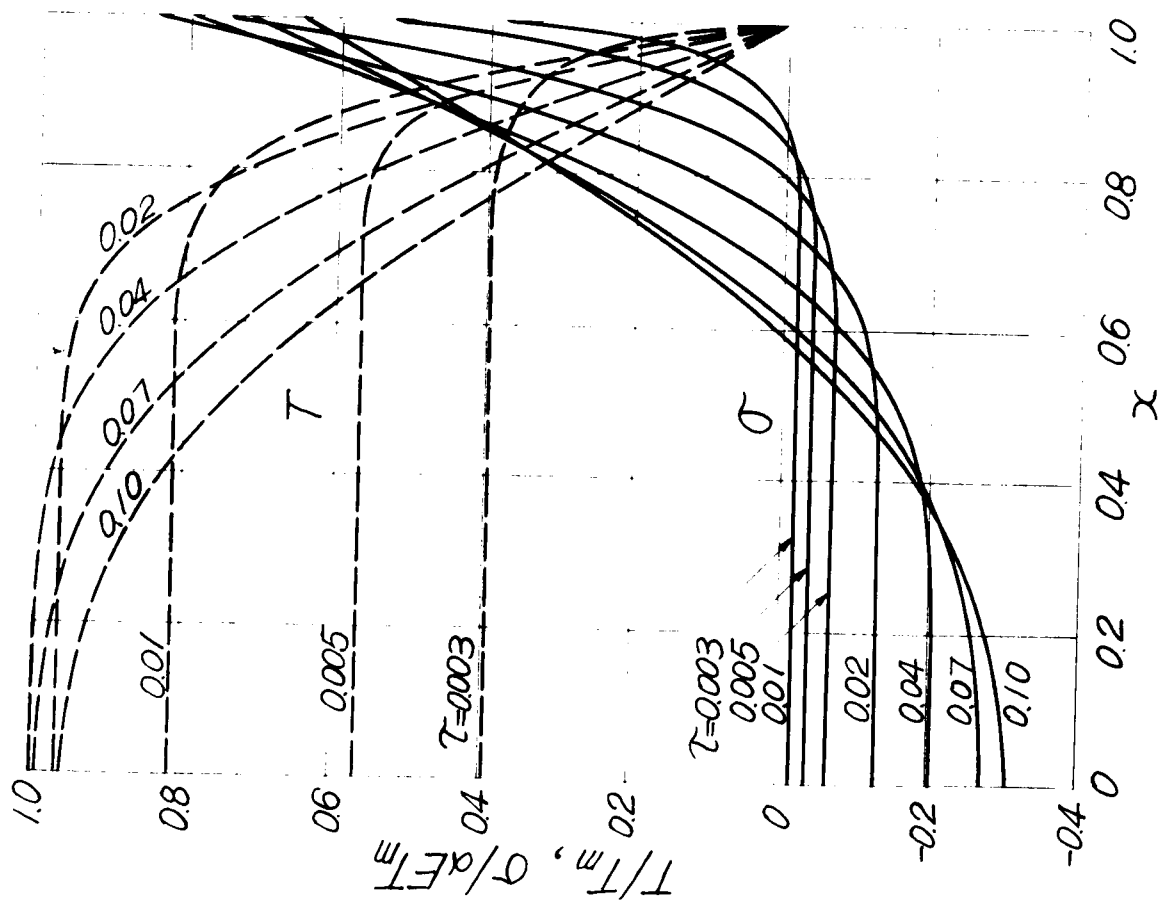
附圖-Ⅱ・3・8

(b) 日変動 $\delta = 0.2618 T_m / h$



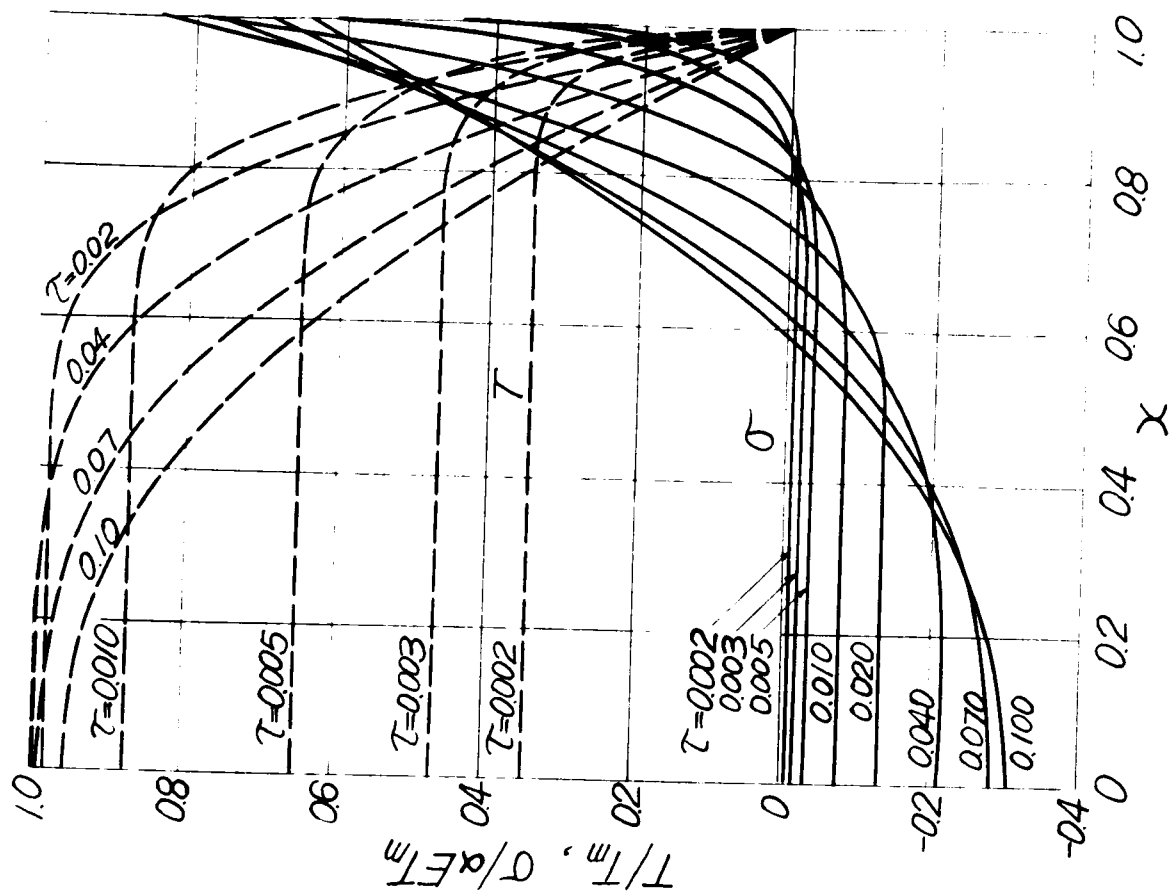
附圖-Ⅱ-3.9 水和熱の発生による温度と応力

(b) $m=0.012/h$



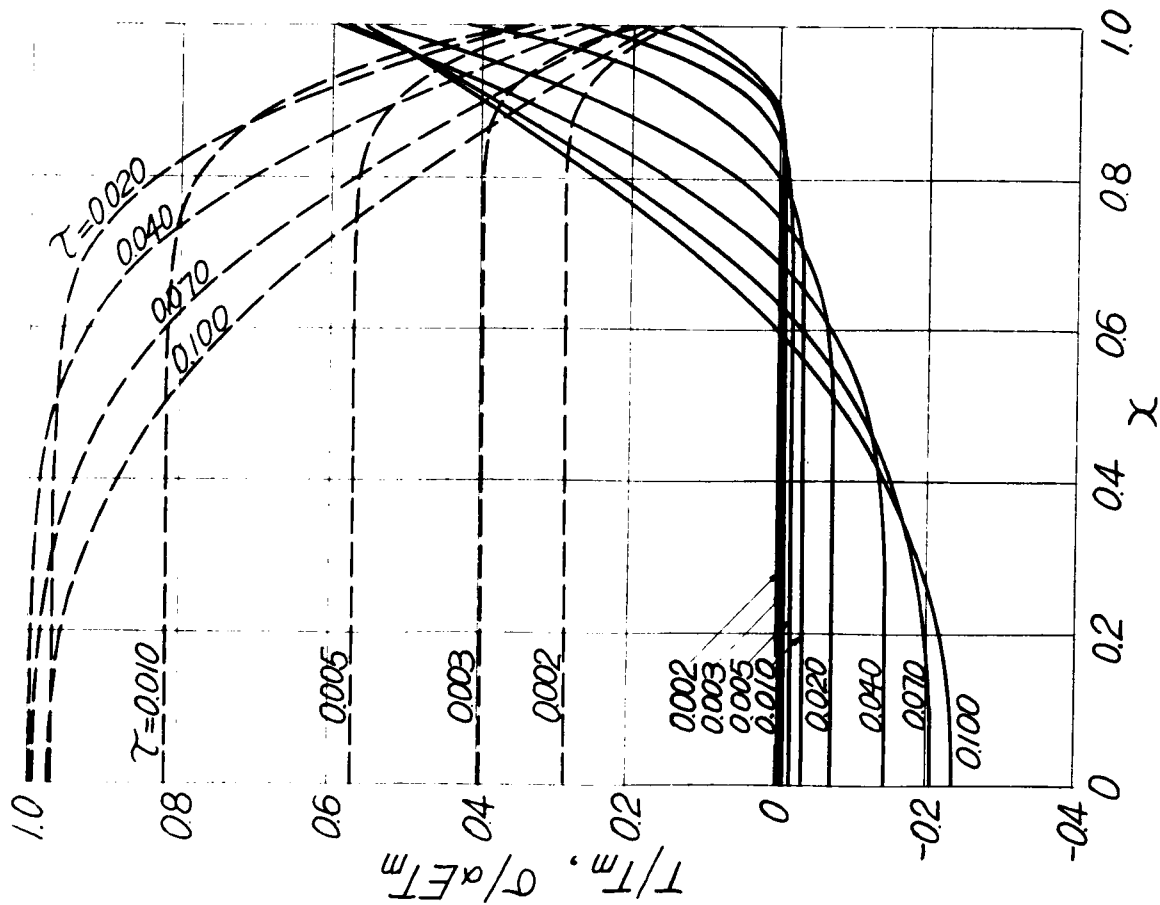
附圖-Ⅱ-3.9

(c) $m=0.015/h$

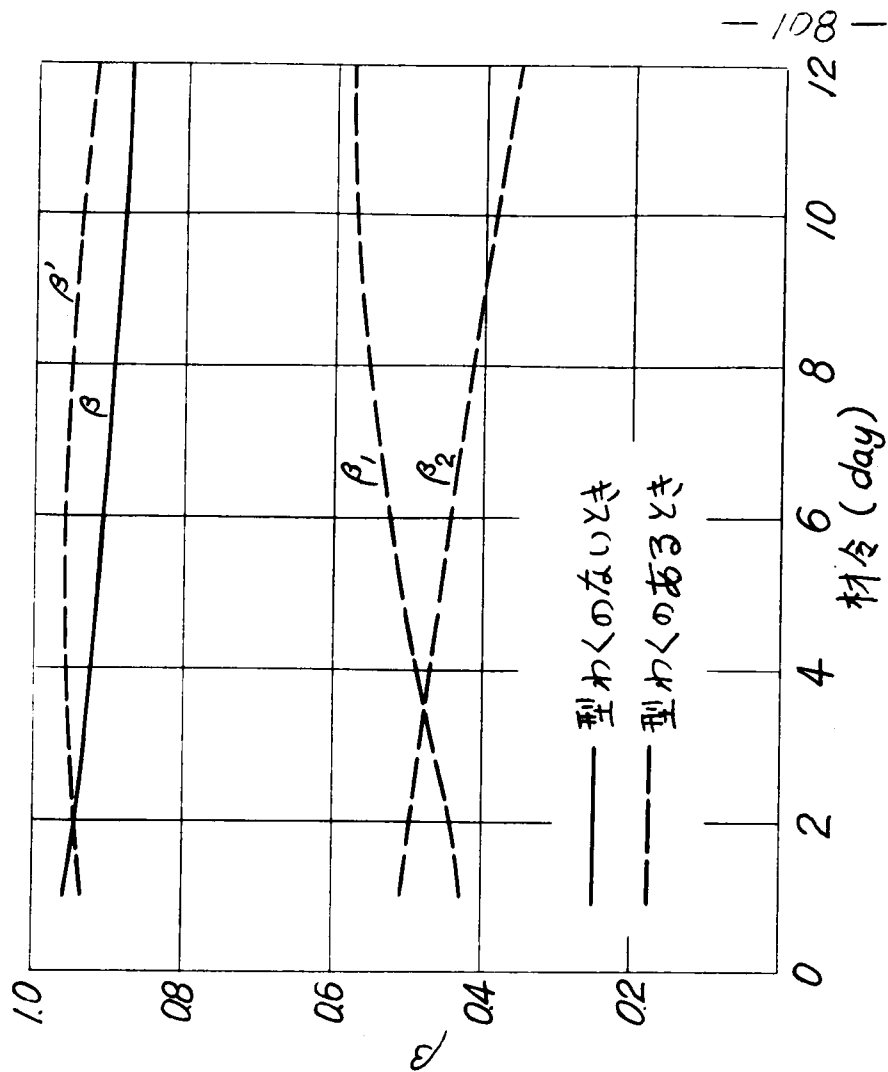


附図-II-3-10 水和熱の発生による温度と応力

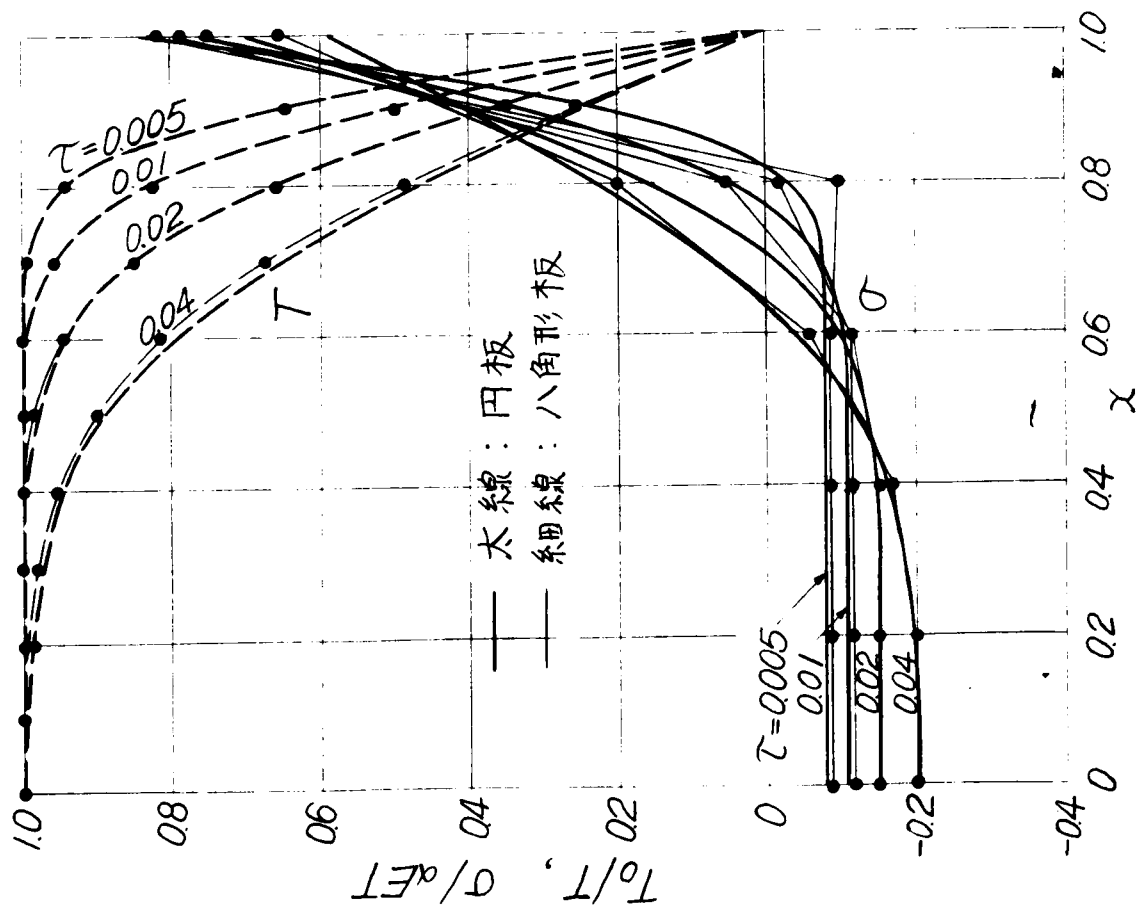
(型わくのあるとき, $m=0.012/h$)



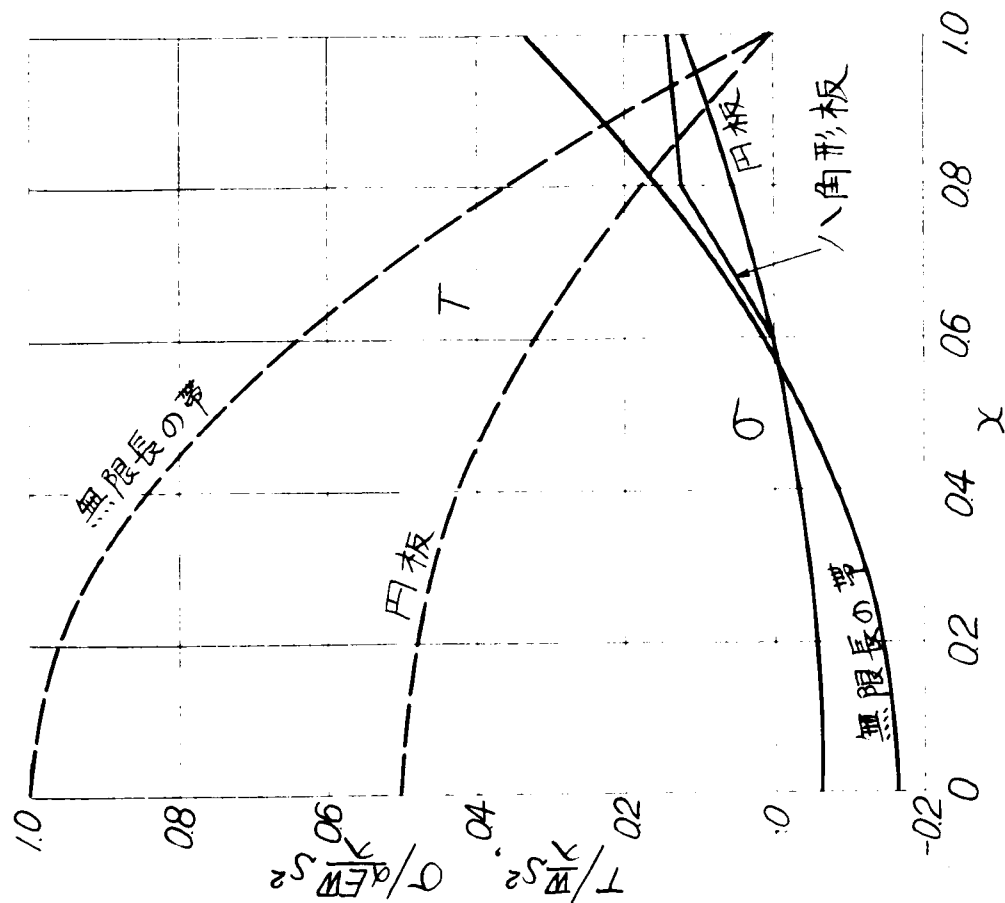
附図-II-3-11 ρ の比較



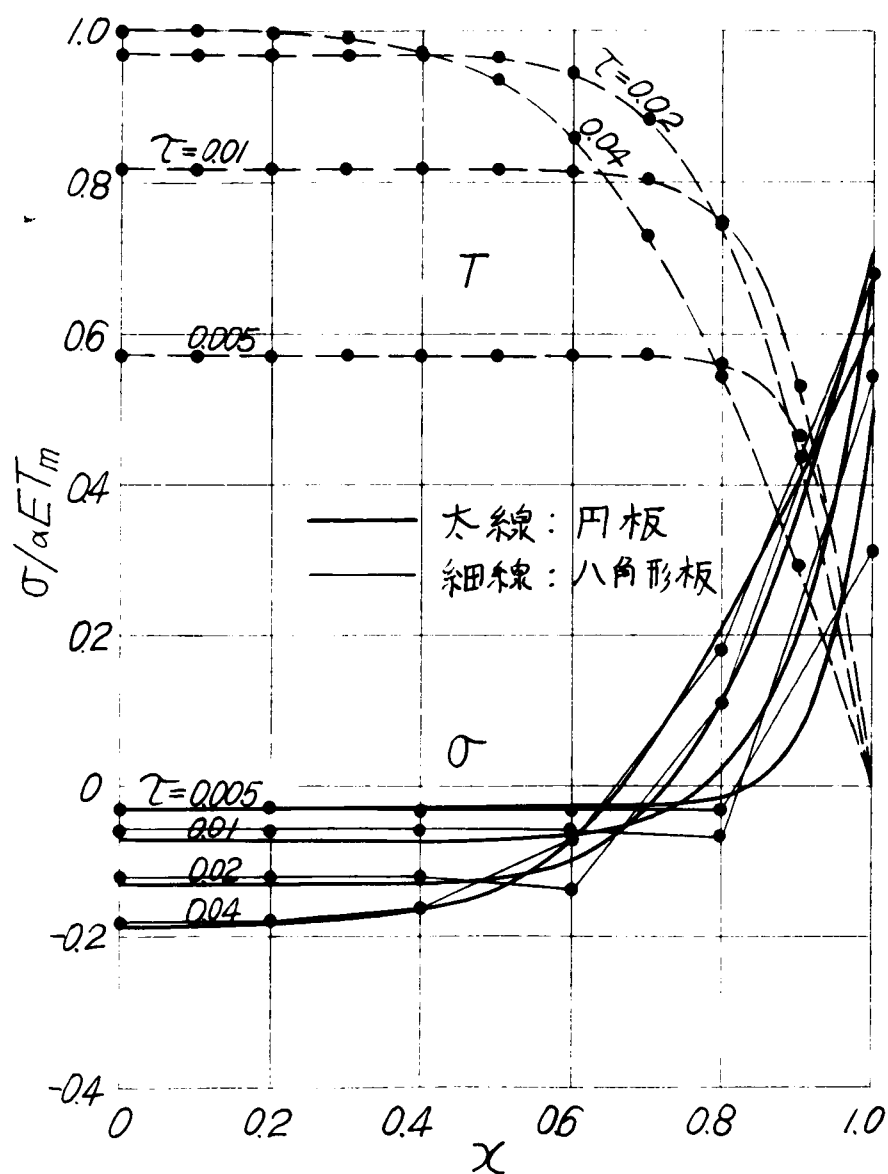
附図-II・4・1 表面が急冷されたときの温度と応力



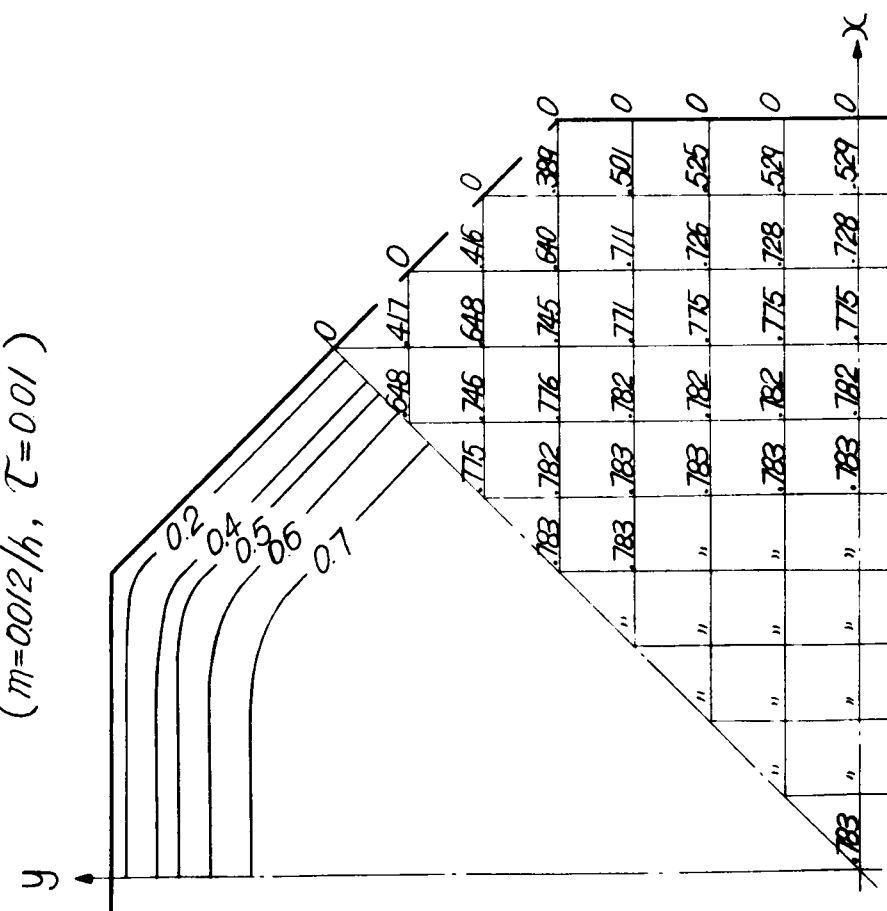
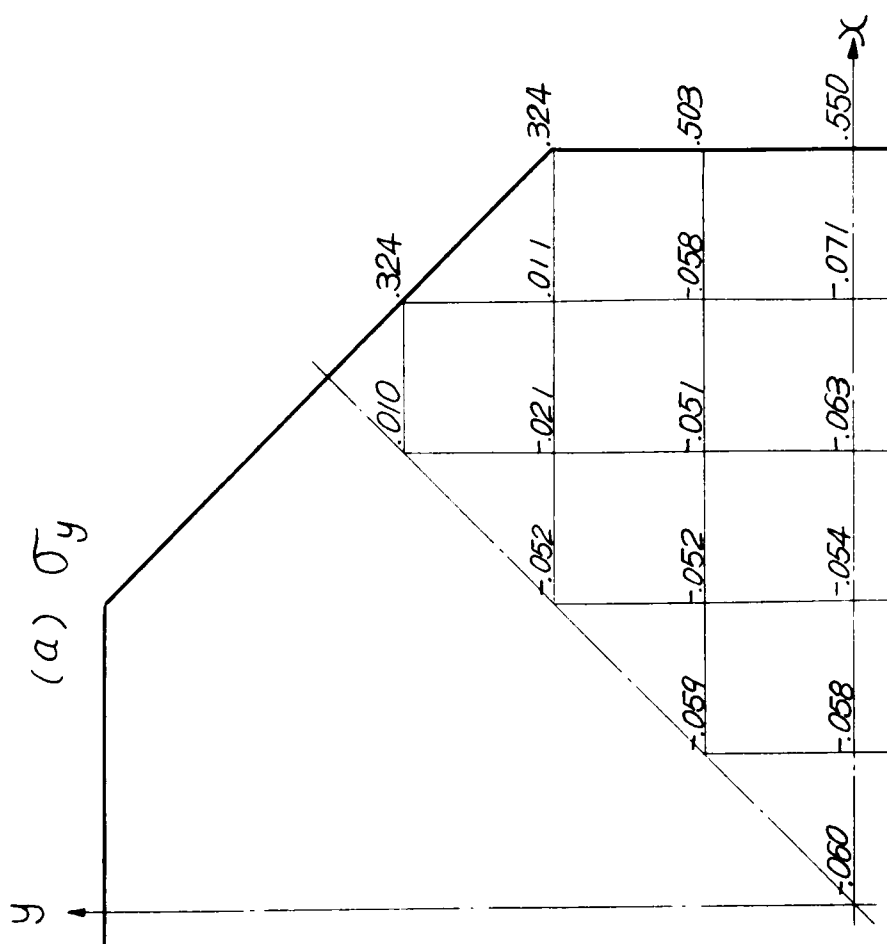
附図-II・4・2 一樣割合で発熱するときの温度と応力の比較



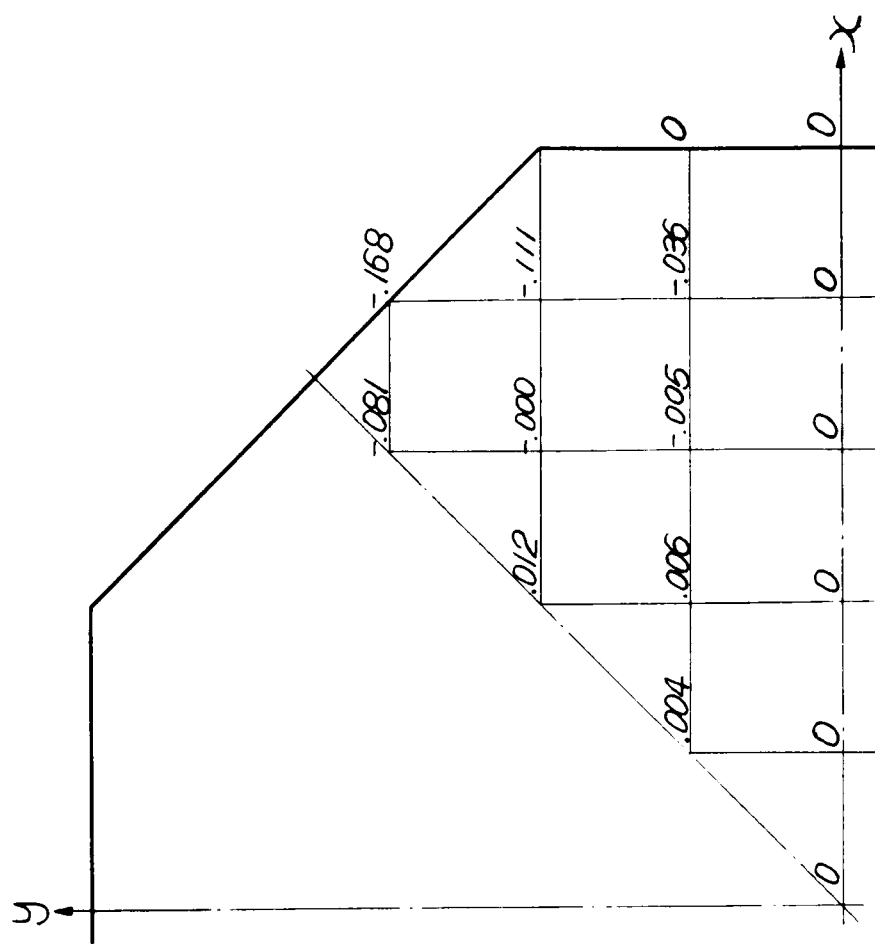
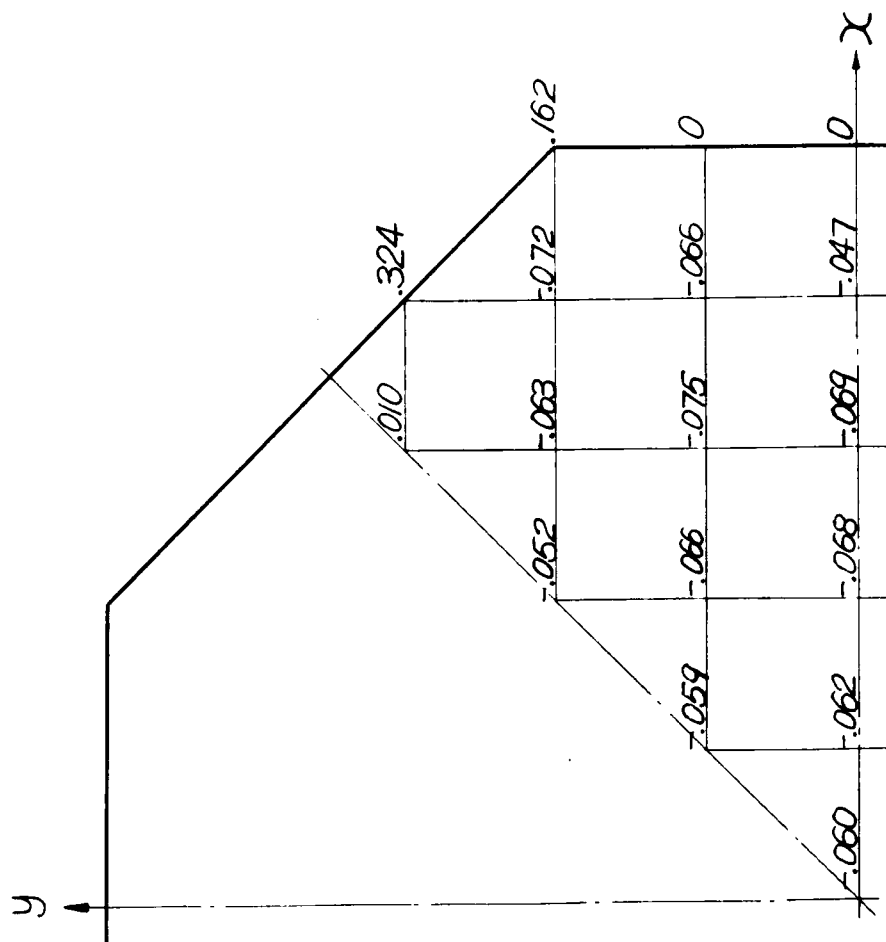
附図-Ⅱ・4・3 水和熱の発生による温度と応力
($m=0.012/h$)



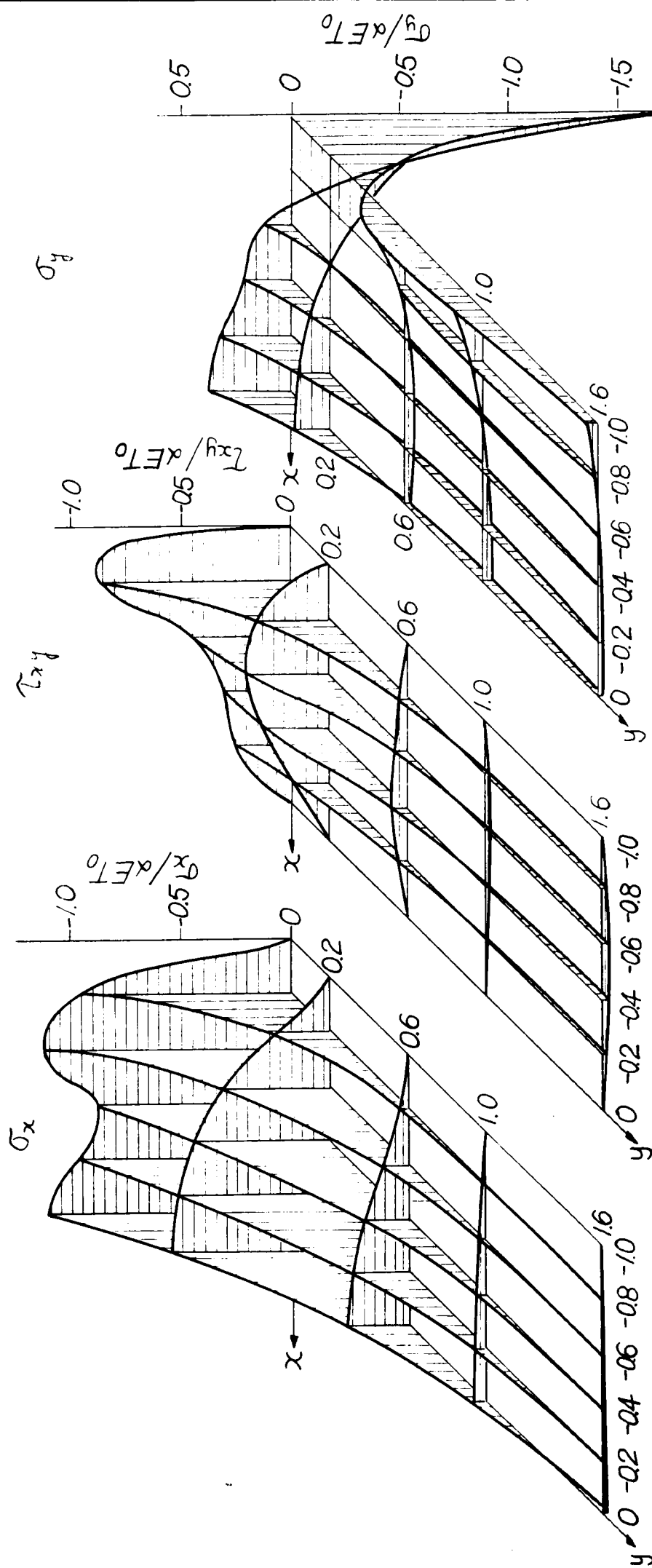
附圖-II-4.4 溫度分布 (T_m)
($m=0.012/h$, $\tau=0.01$)


$$\sigma_y(a)$$


附圖-Ⅱ.4.5 (c) τ_{xy}

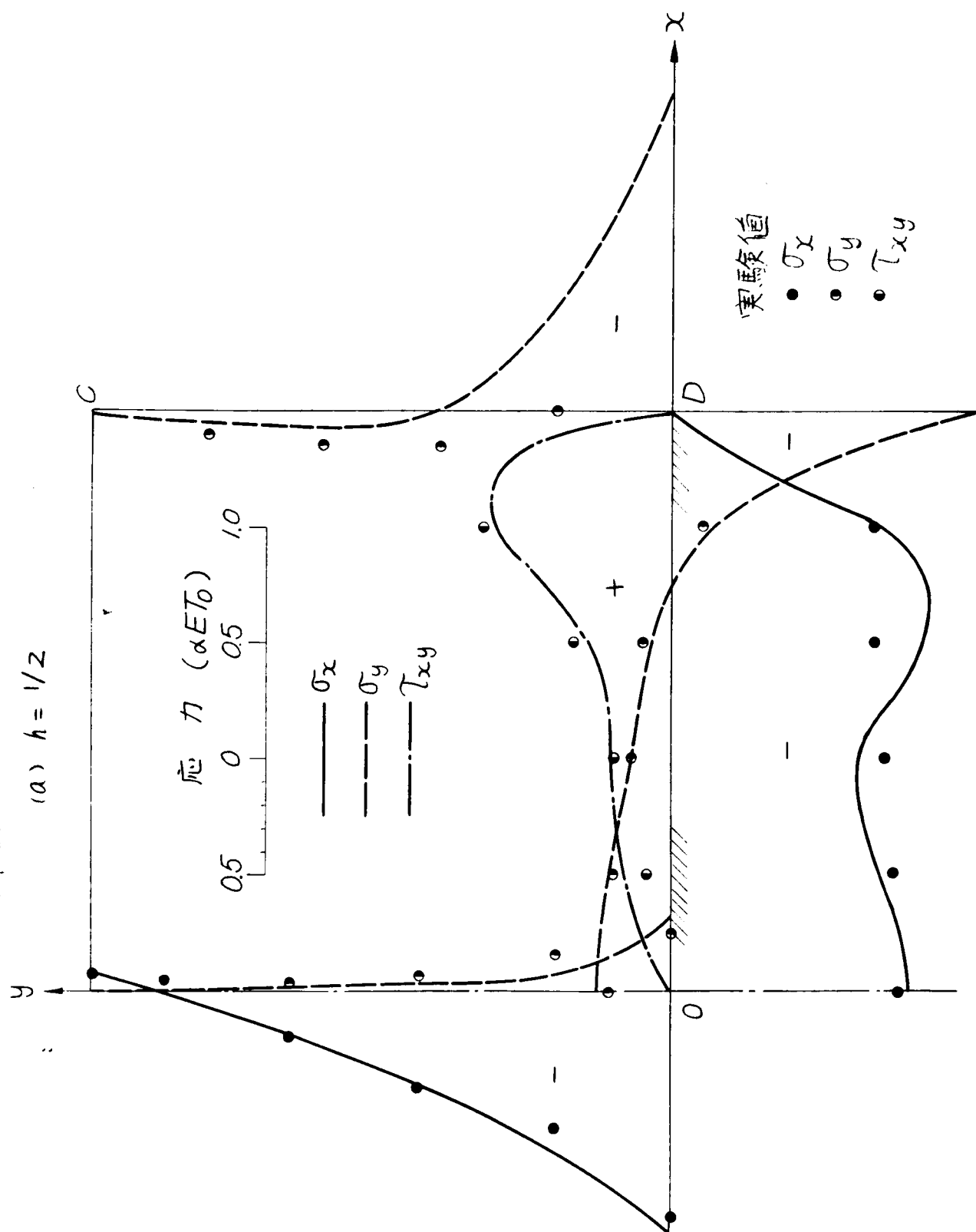


附图-II.5.1 应力状态 ($T = T_0$, $k = \infty$, $\nu = 0$)

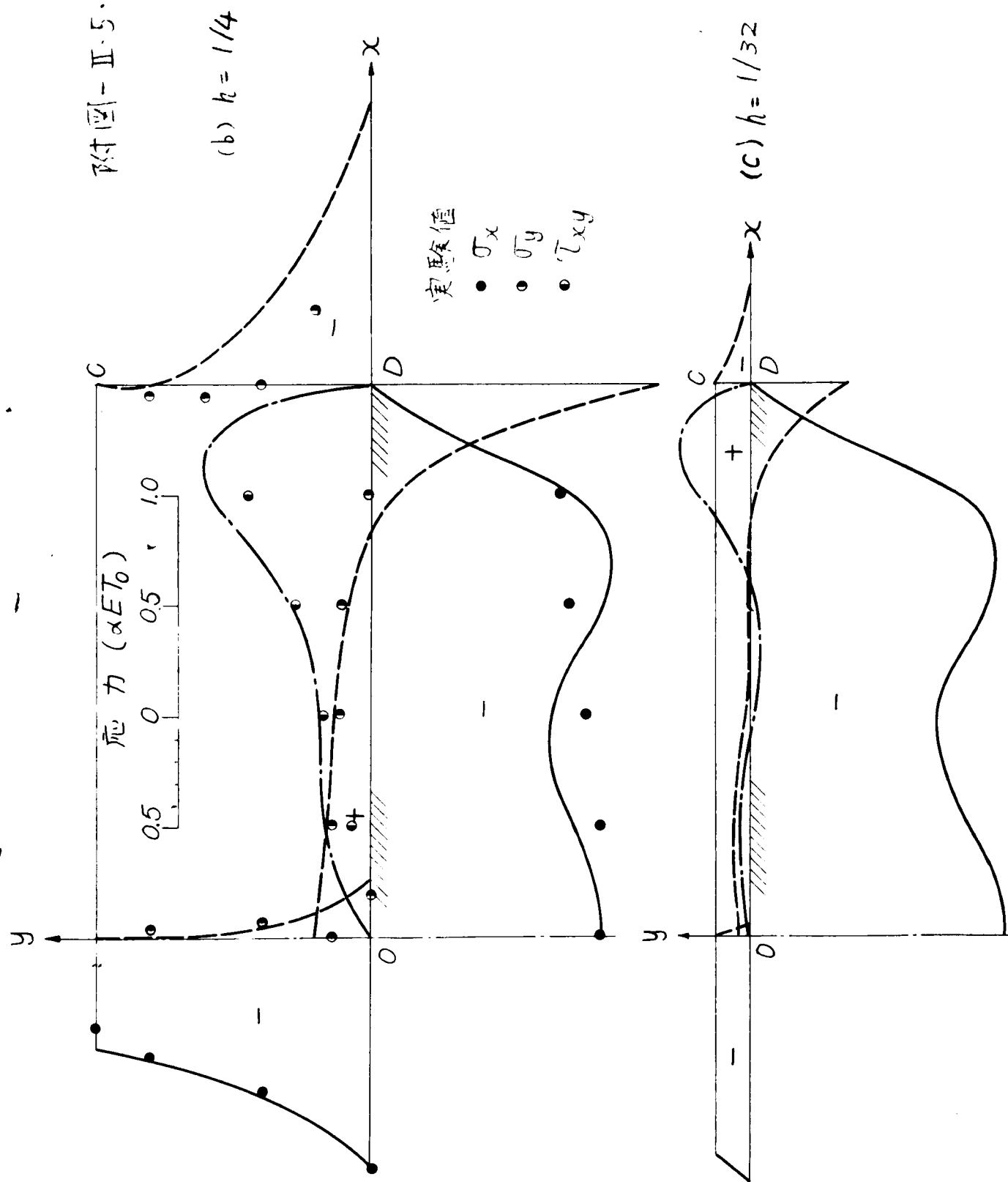


附圖-Ⅱ.5.3 應力狀態 ($T = T_0$, $\nu = 0.3$)

(a) $h = 1/2$

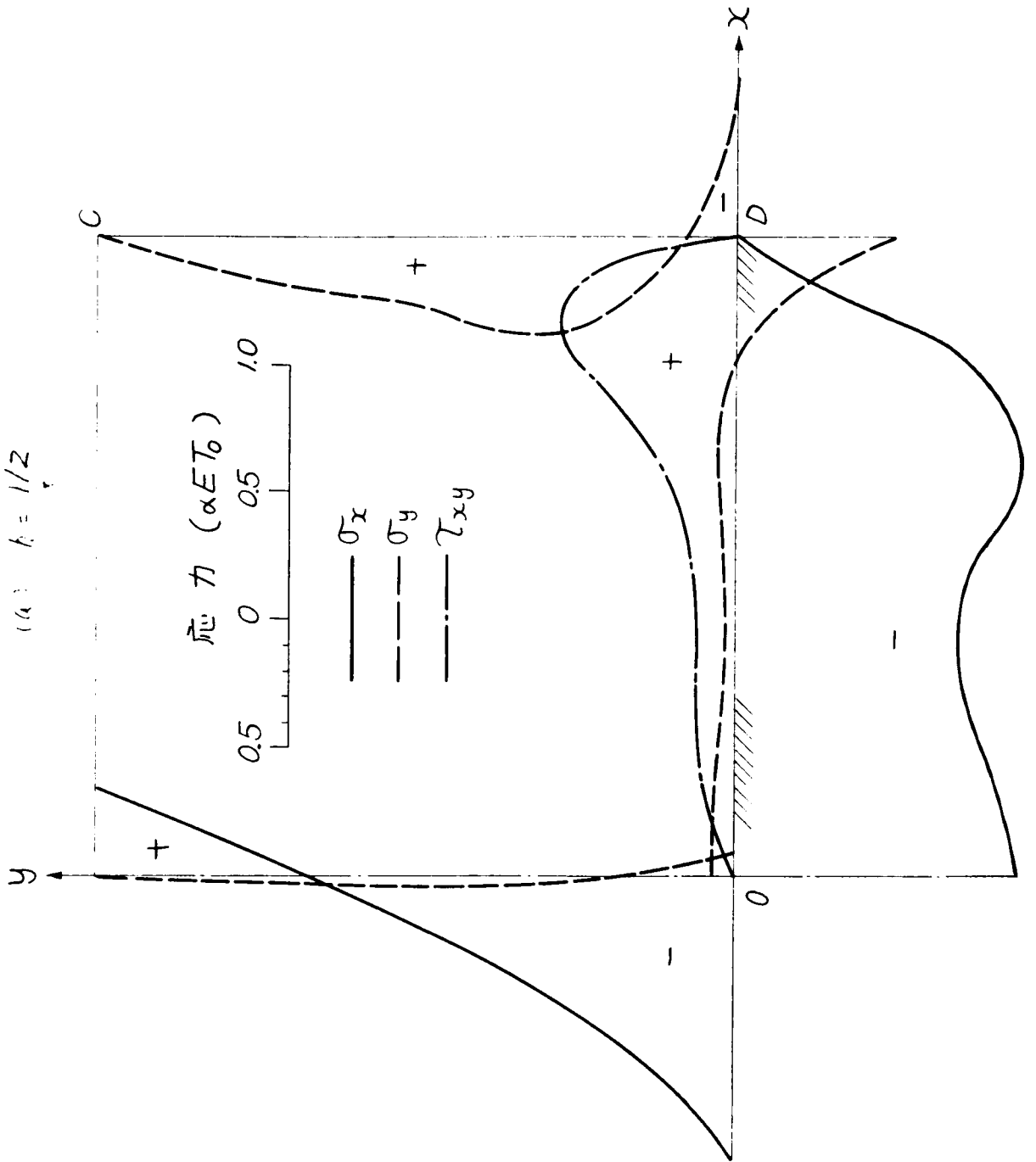


附圖 - II.5.3



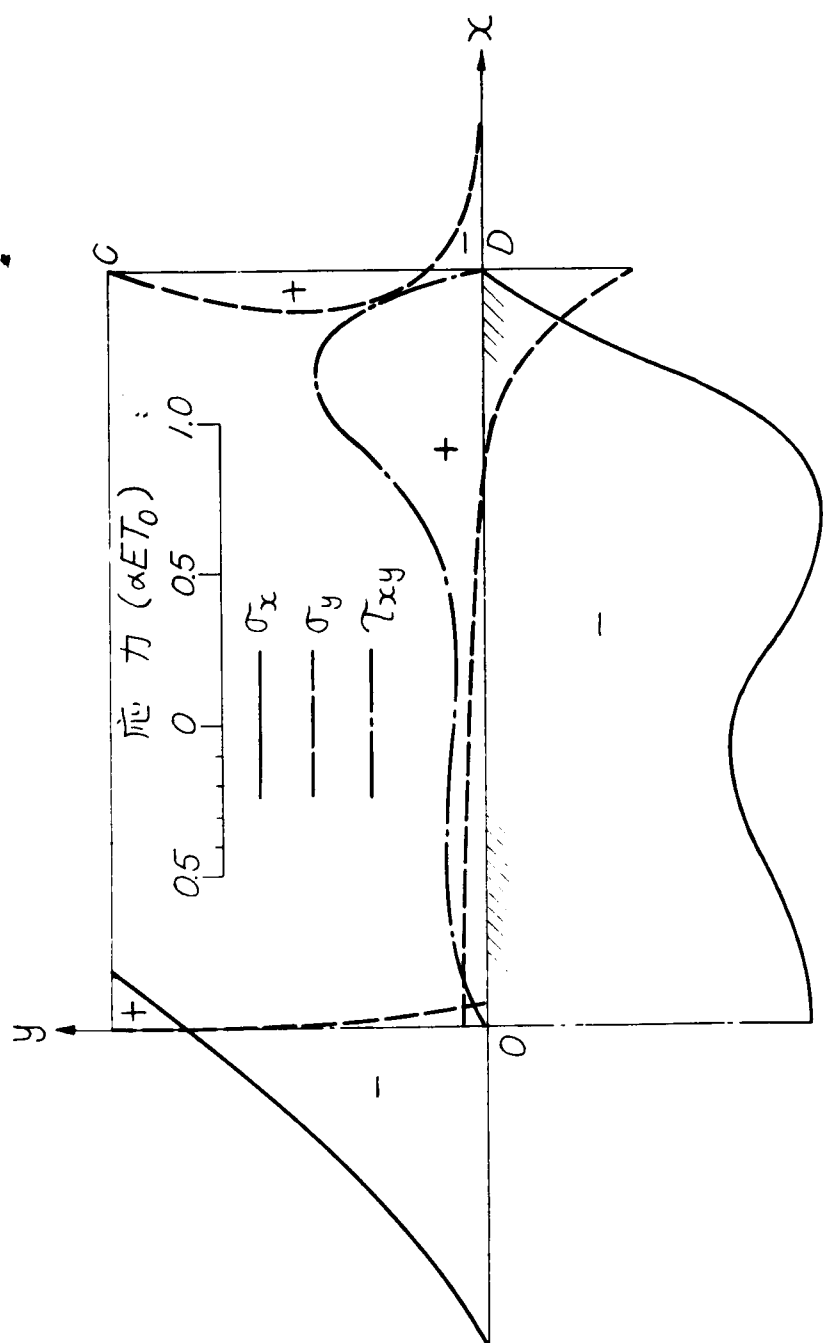
附圖-Ⅱ-5.4 應力狀態 ($T = T_0(1 - y/2h)$, $\nu = 0.3$)

(a) $h = 1/2$

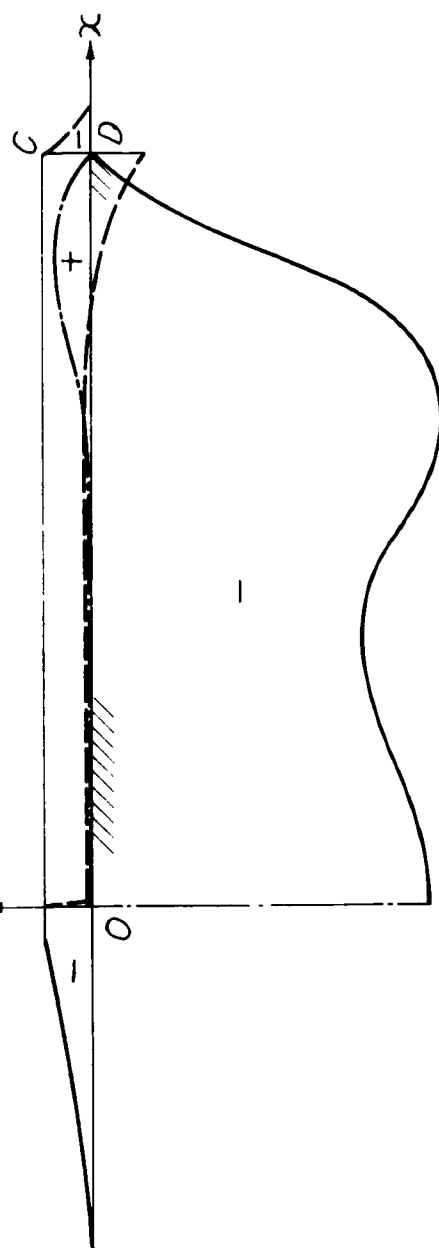


附图-Ⅱ.5.4-

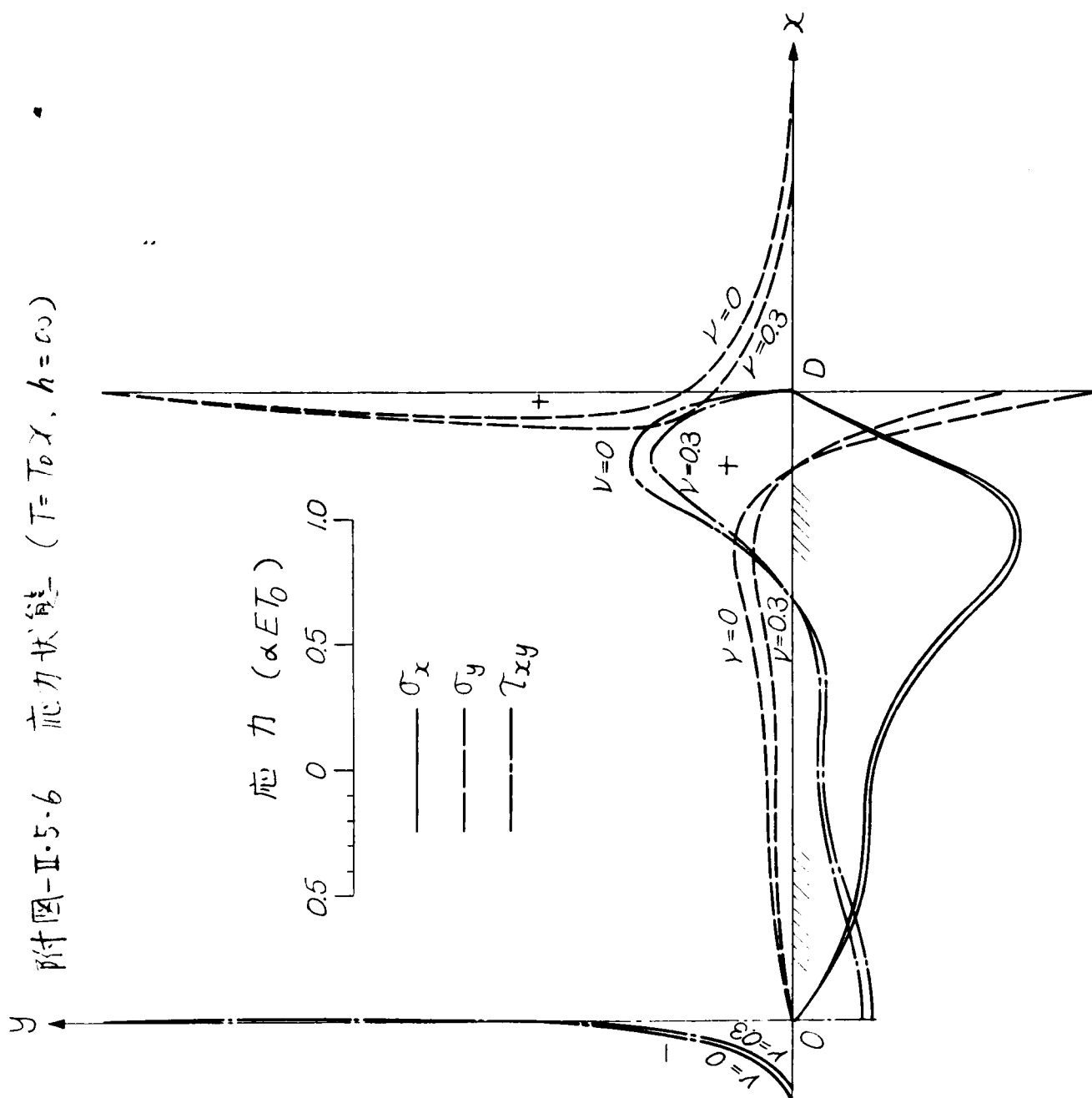
(b) $h = 1/4$



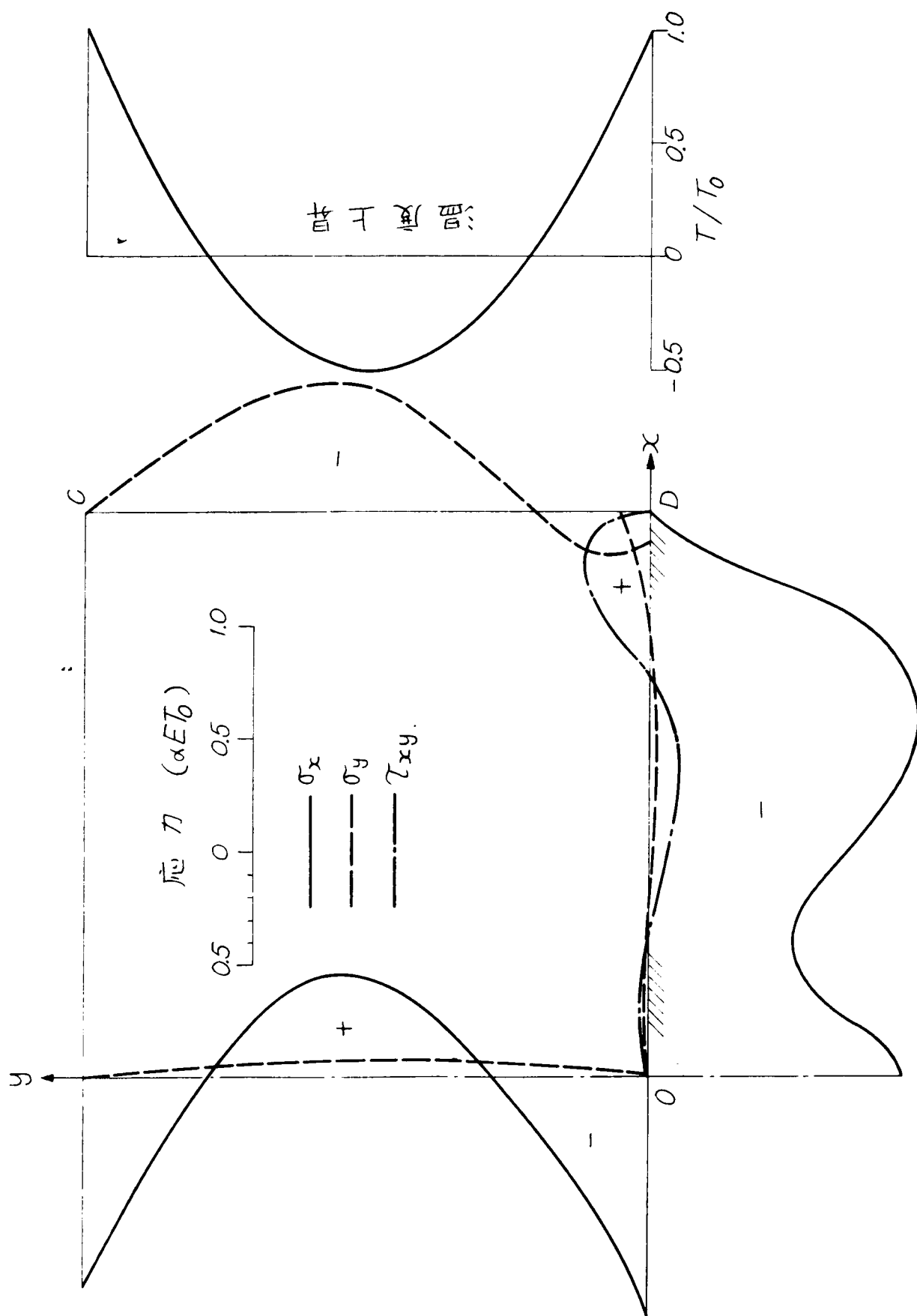
(c) $h = 1/32$



附圖-II.5.6 应力状态 (T = T₀X, h = ∞)

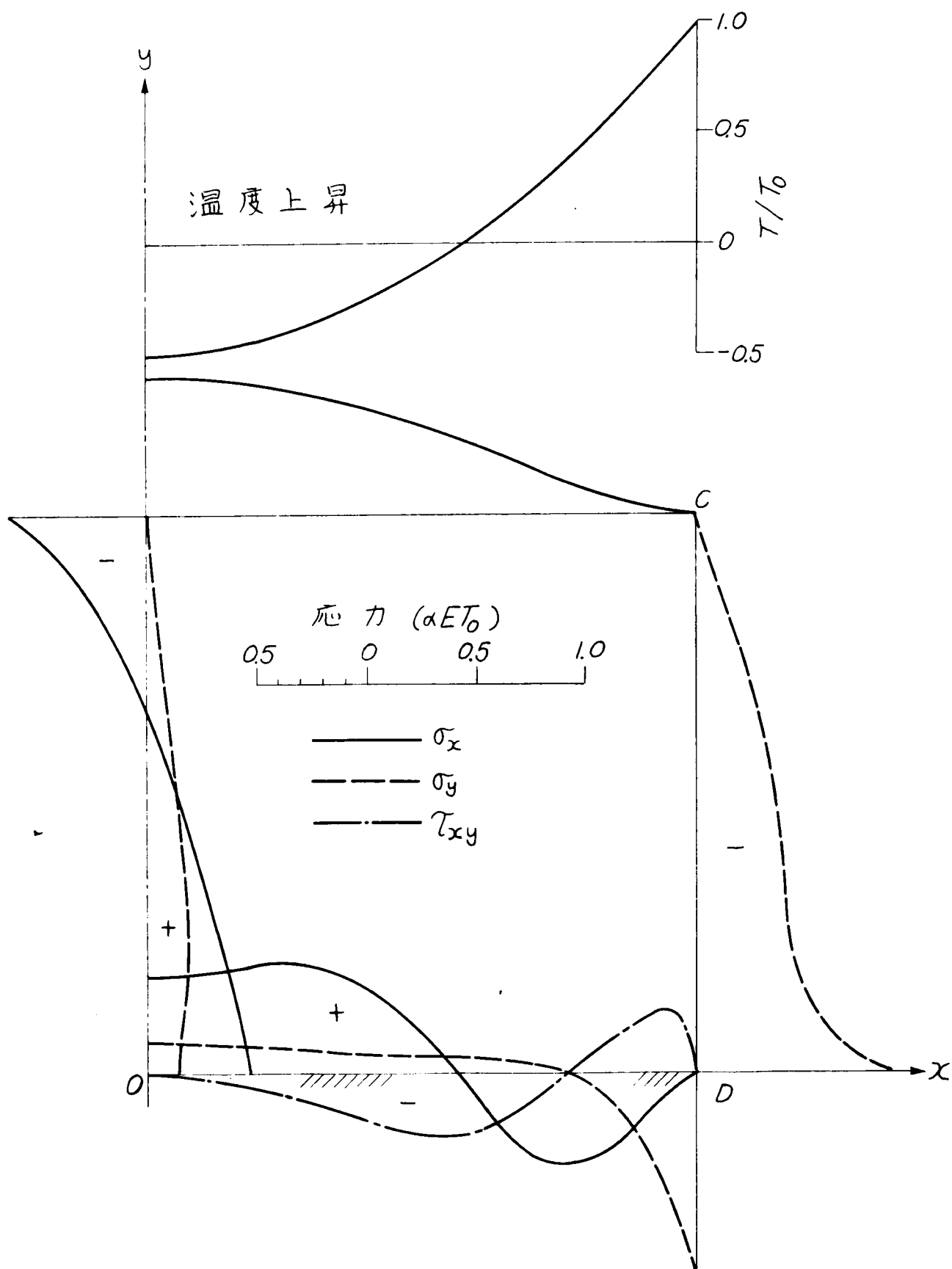


附圖-Ⅱ-5.7 温度上昇と応力状態 ($\bar{T} = T_0 \chi_2''(2\eta - 1)/\bar{\epsilon}$, $h = 1/2$, $\nu = 0.3$) .



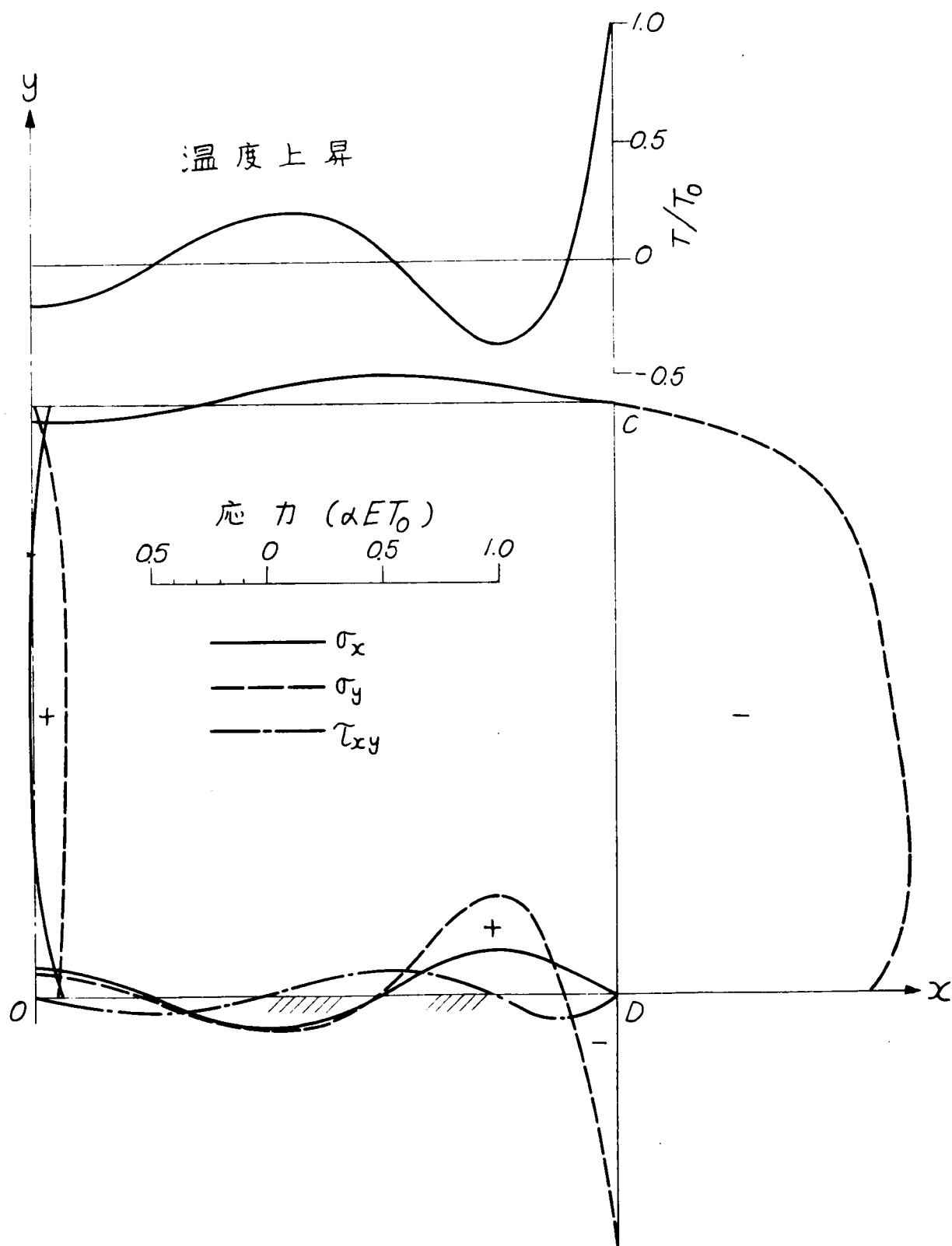
附图-Ⅱ·5·8 温度上昇と応力状態

($T = T_0 \chi_2''(x)/8$, $h = 1/2$, $\nu = 0.3$)

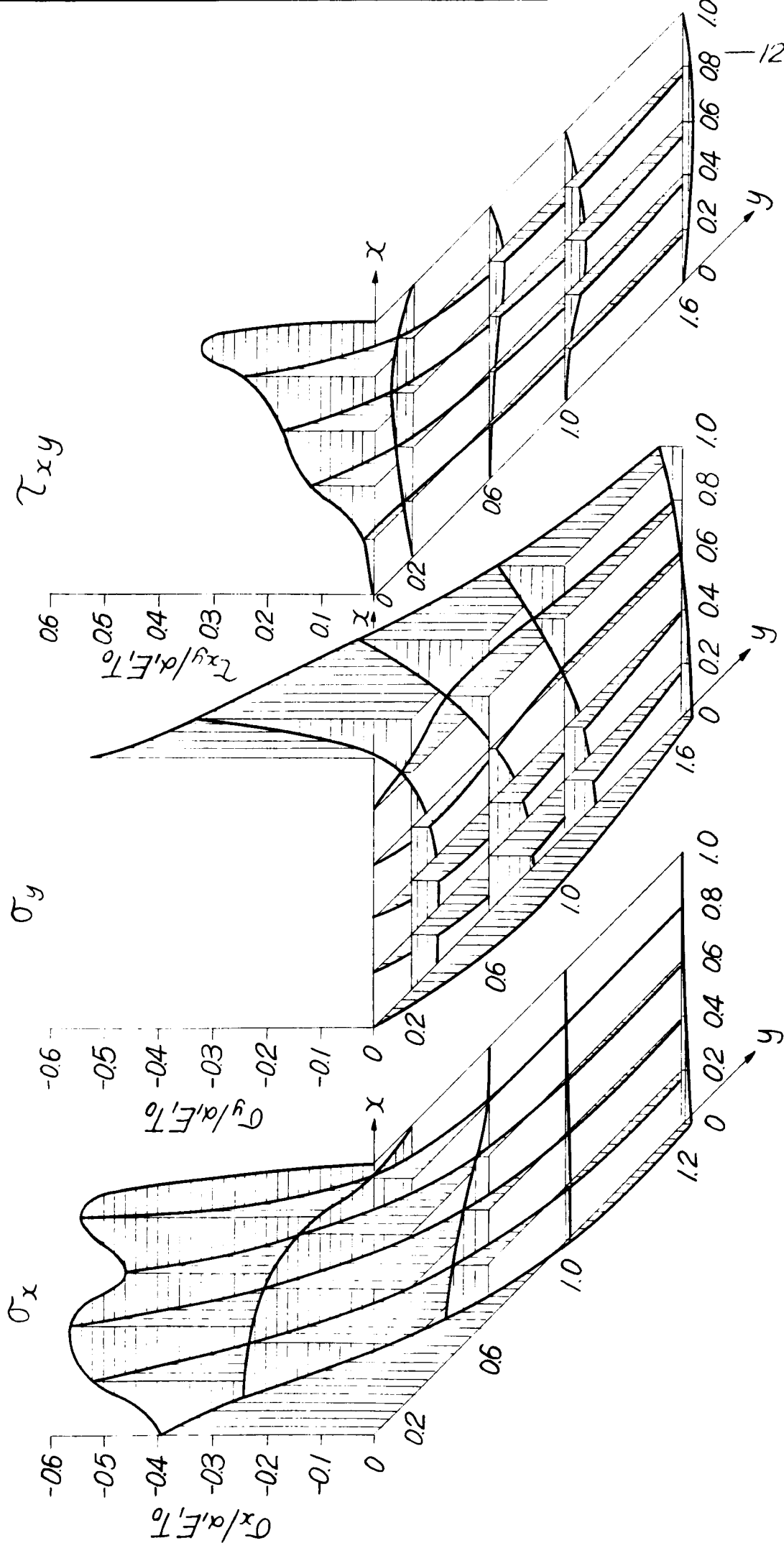


附圖-Ⅱ·5·9 溫度上昇と応力状態

$(T = T_0 \chi_6''(x)/320, h = 1/2, \nu = 0.3)$

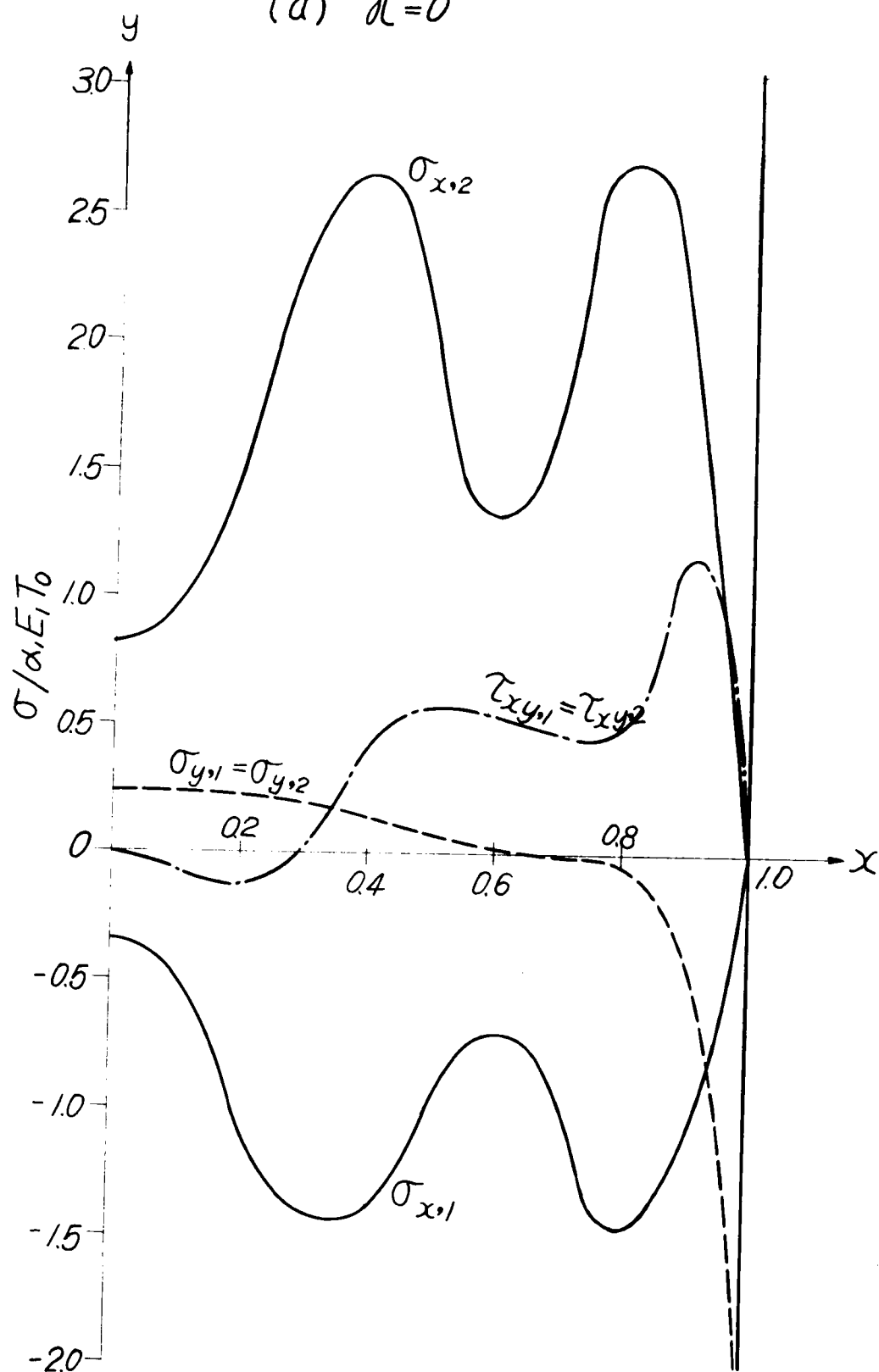


附圖-Π6.1 應力狀態 ($T=T_0$, $h_1=h_2=\infty$, $\kappa=1$, $\nu_1=\nu_2=\nu$)



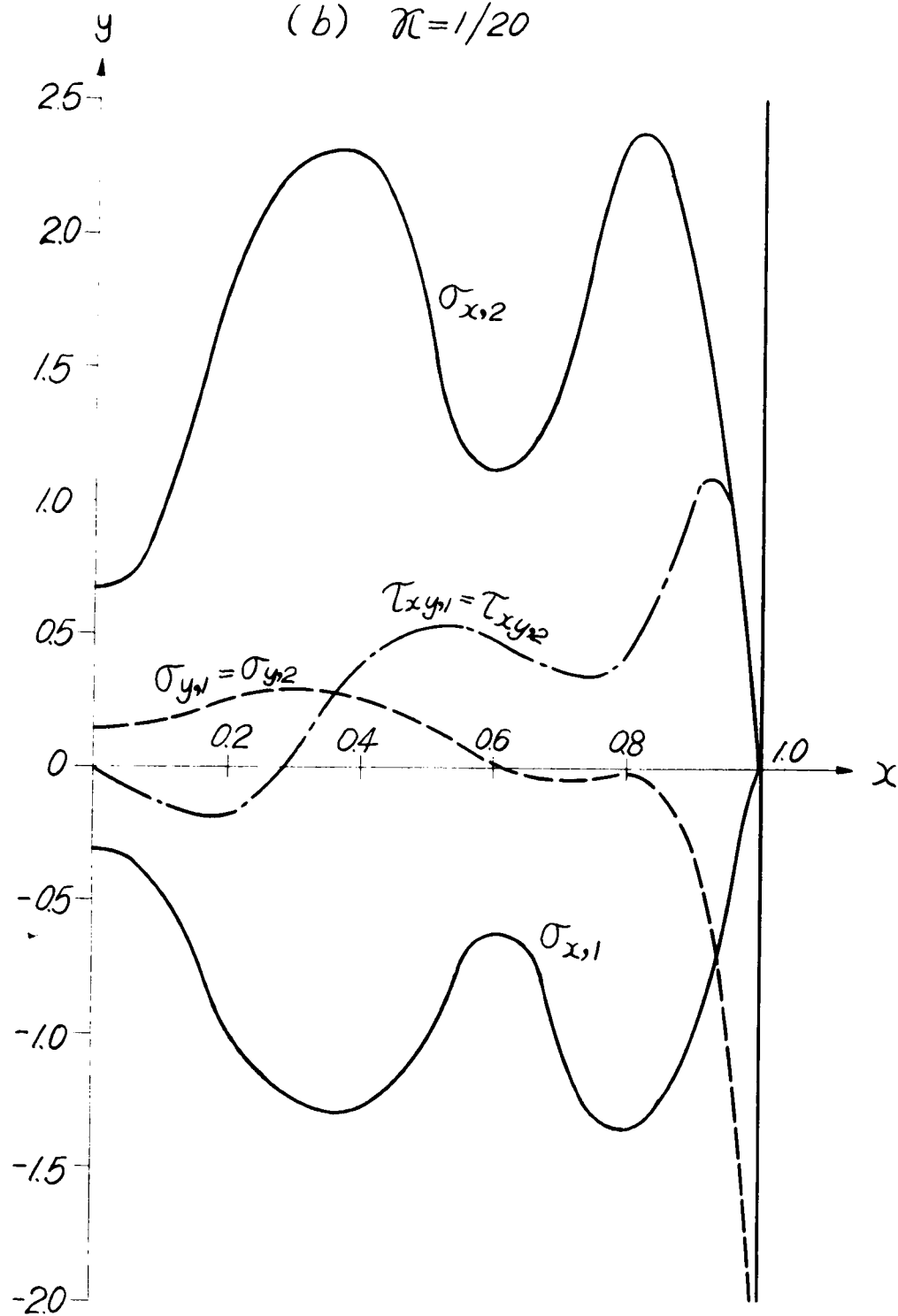
附圖-II-6.2 应力状态($T=T_0, h_1=h_2=\infty, \nu_1=\nu_2=0$)

(a) $\kappa=0$



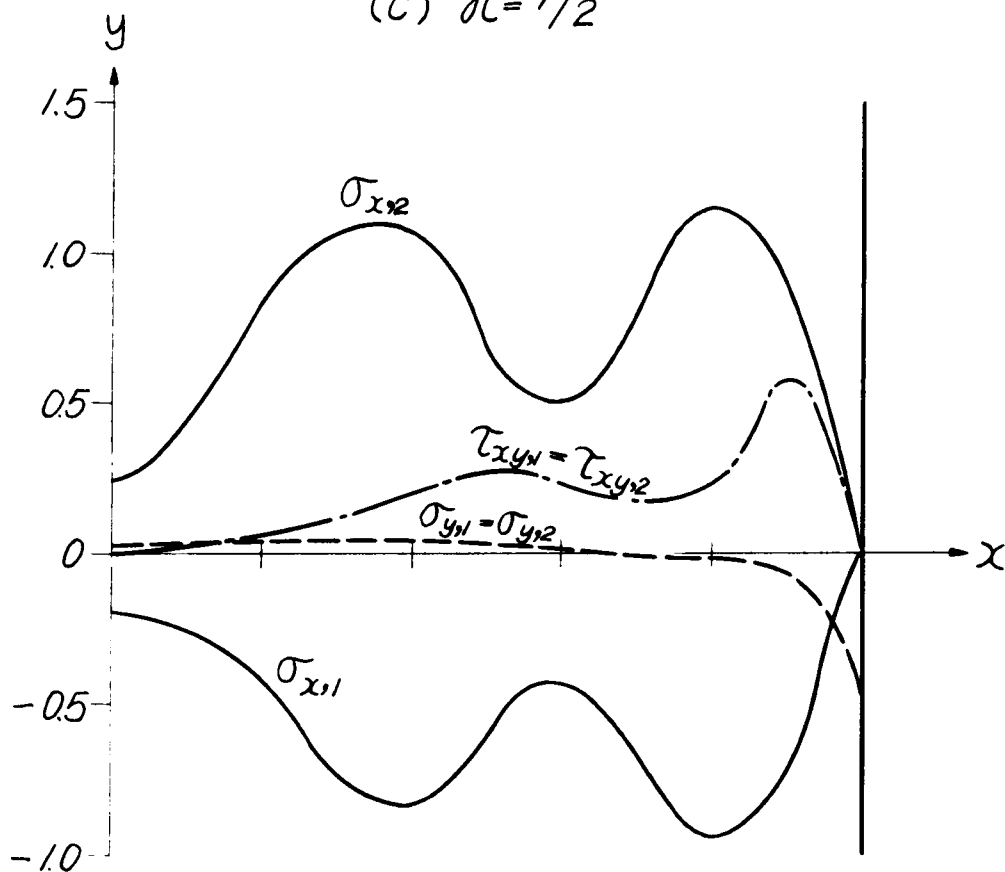
附圖-II·6·2

(b) $\kappa=1/20$

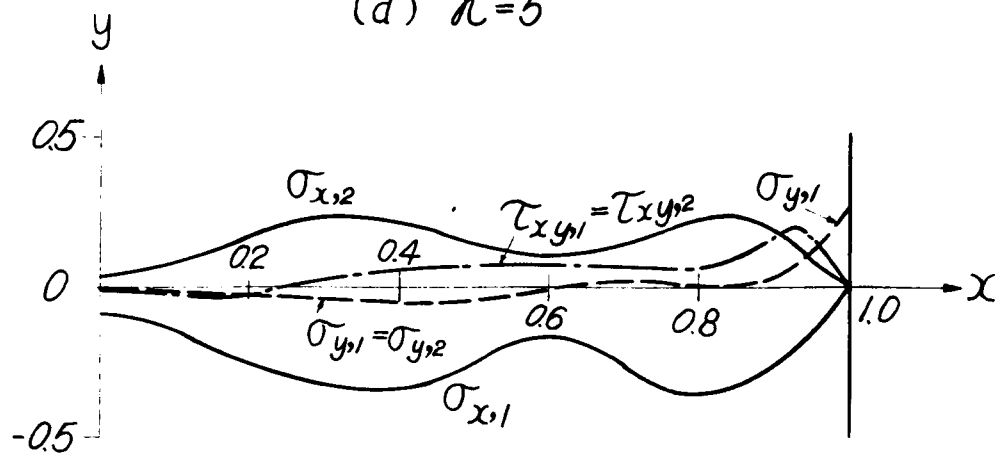


附圖 - II.6.2

(c) $\kappa = 1/2$

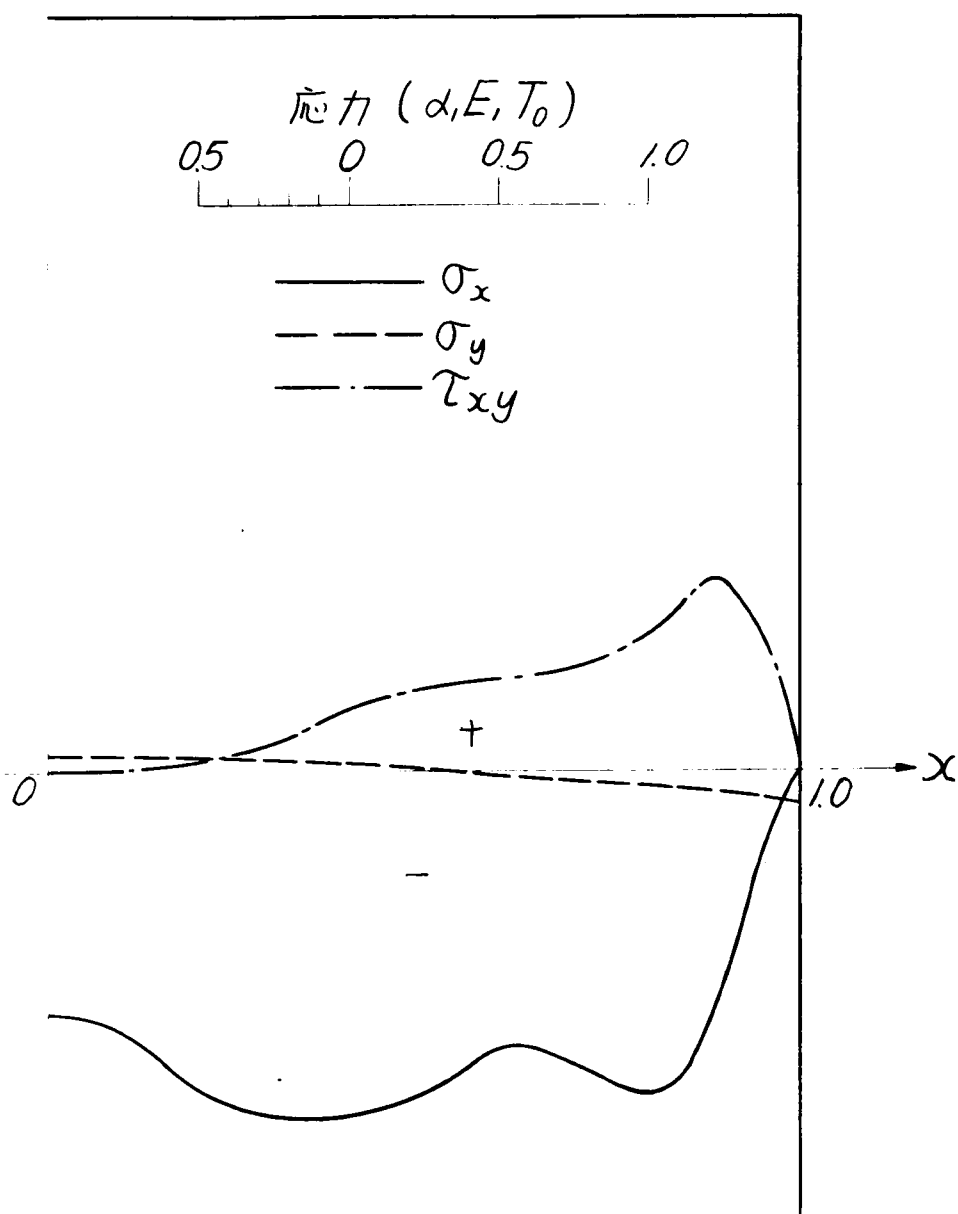


(d) $\kappa = 5$



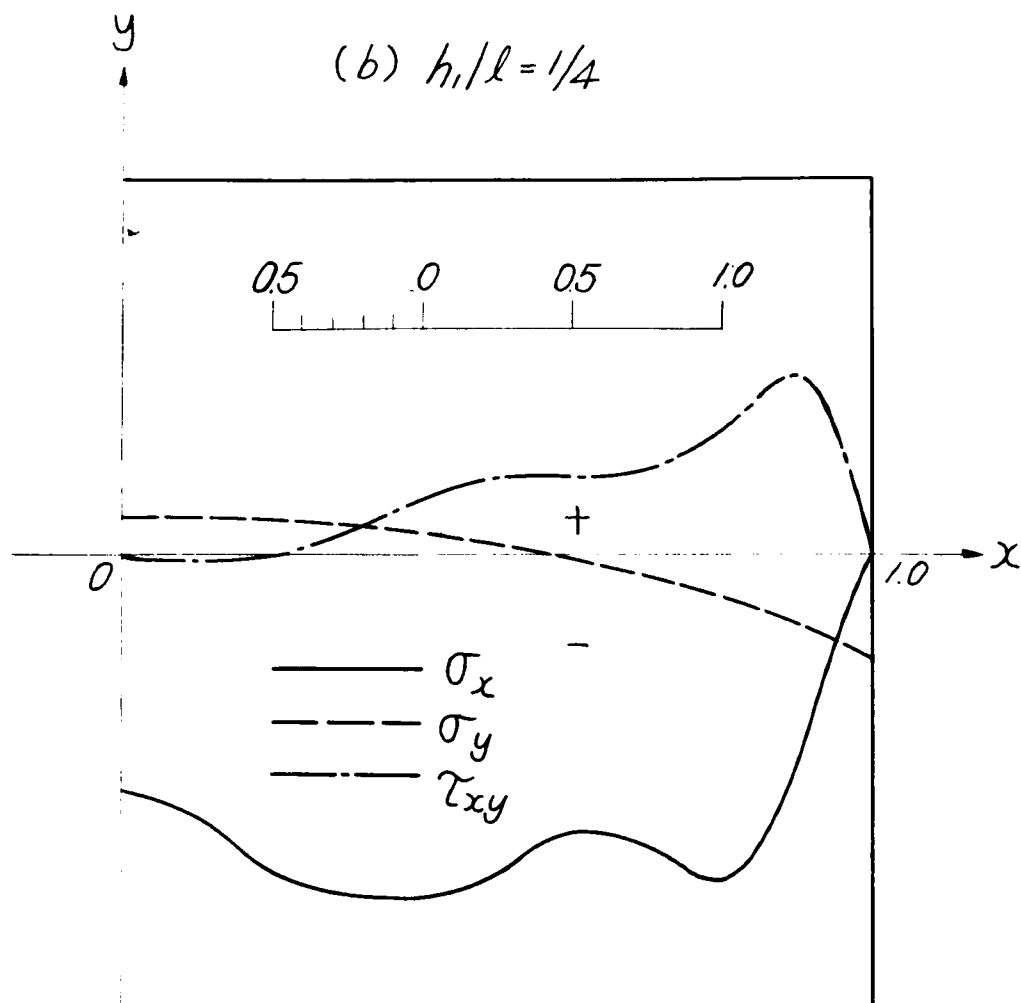
附圖-II·6·3 应力状态 ($T=T_0, h_2=\infty, \kappa=1, \nu_1=\nu_2=0$)

(a) $h_1/l = 1/2$

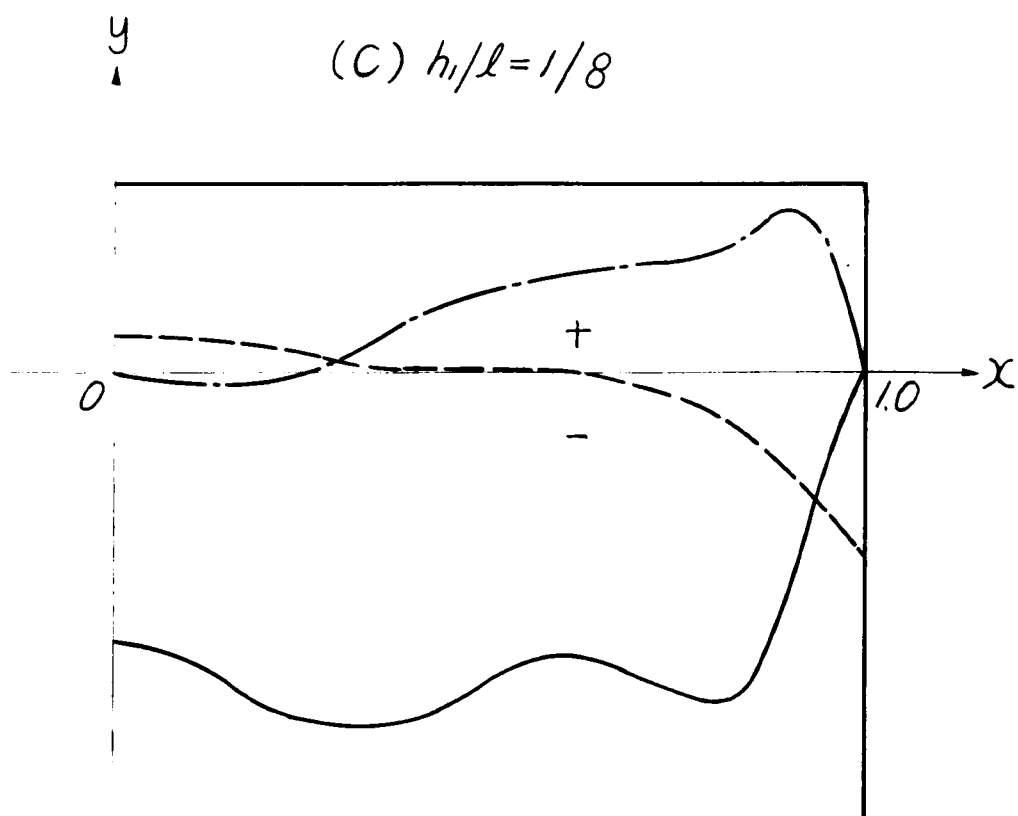


附圖-II·6·3

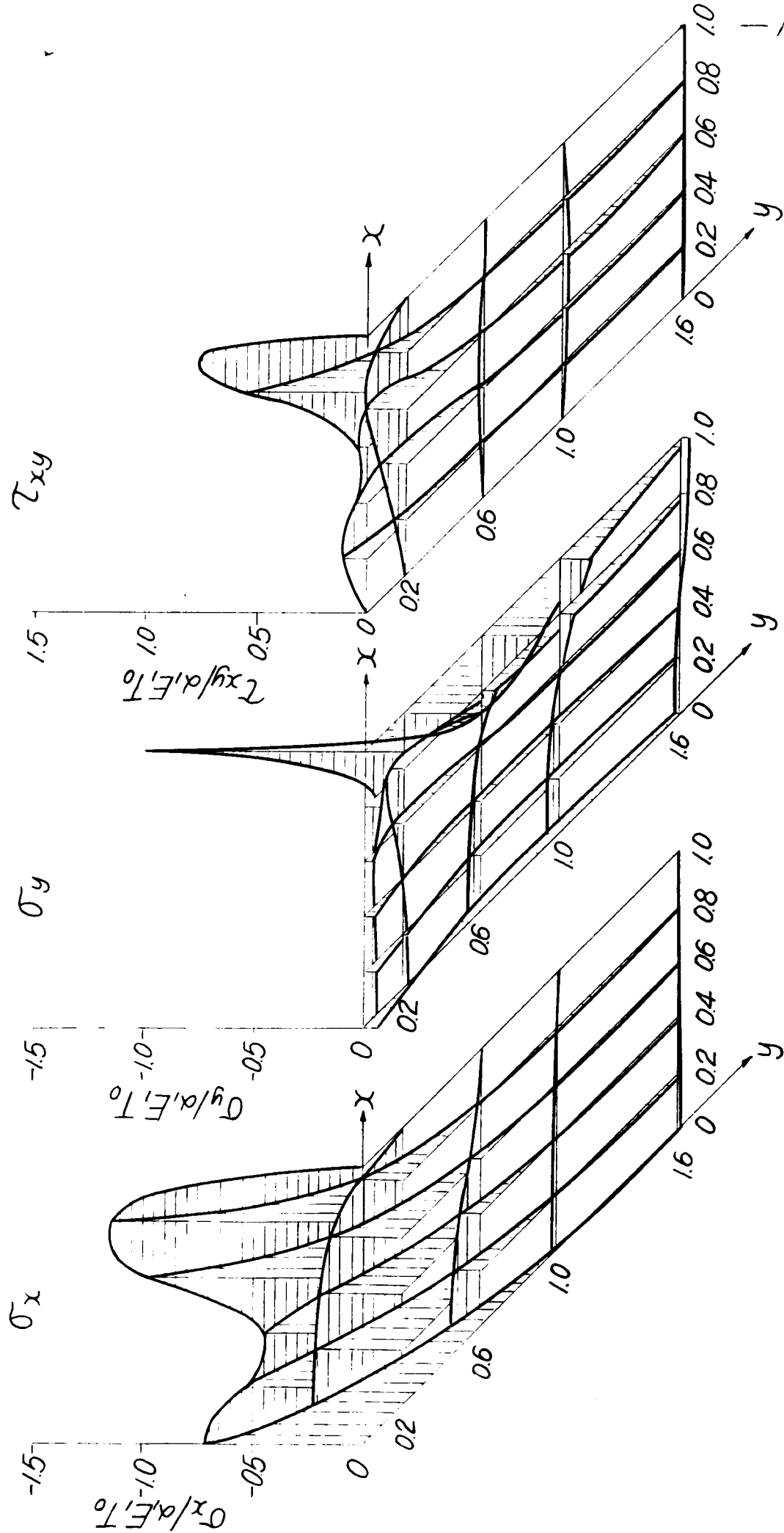
(b) $h_1/l = 1/4$



(c) $h_1/l = 1/8$

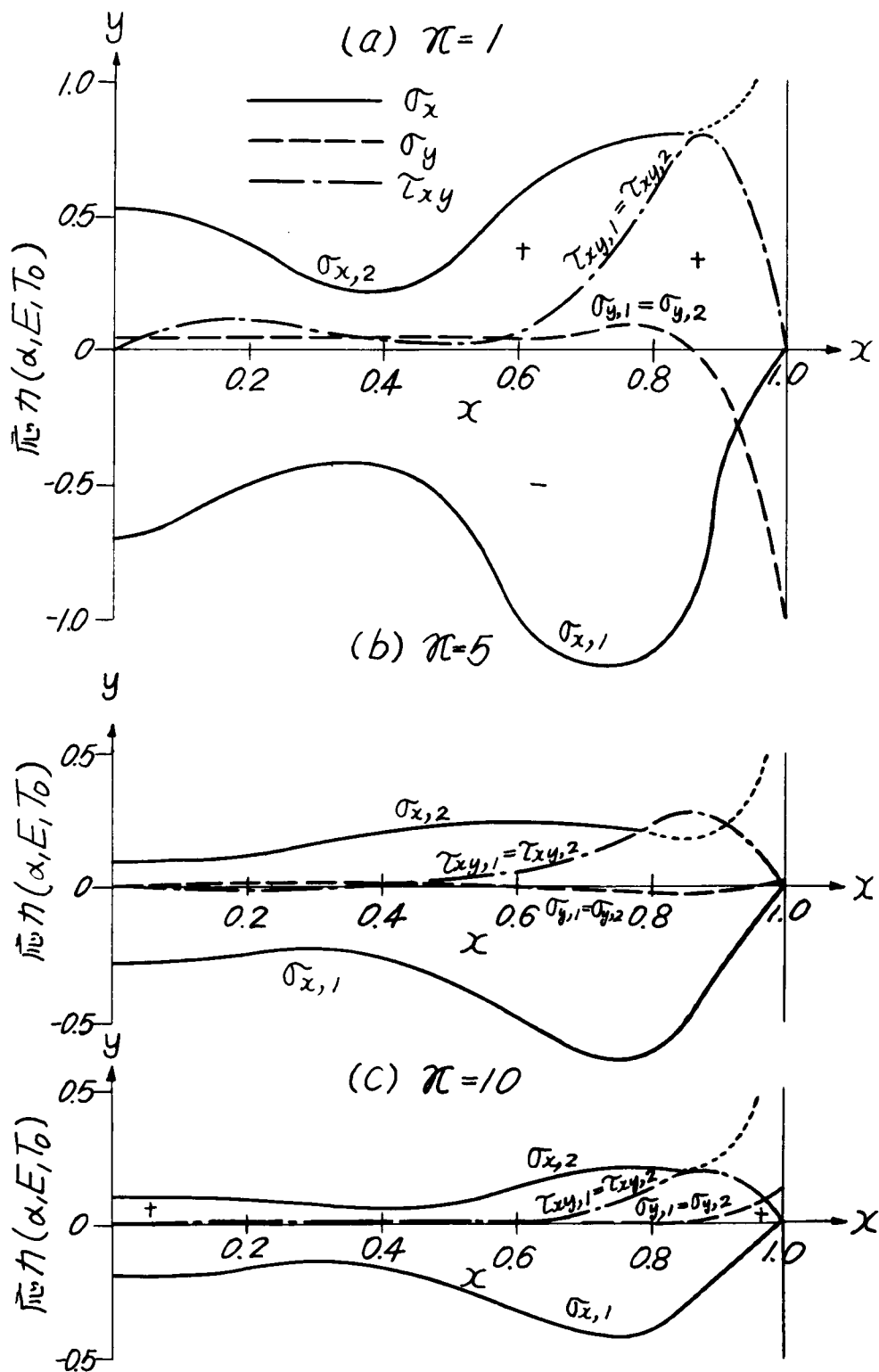


附圖-II-6.4 应力状态 ($T=T_0, h_1=\infty, \nu_1=\nu_2=0, \pi=1$)



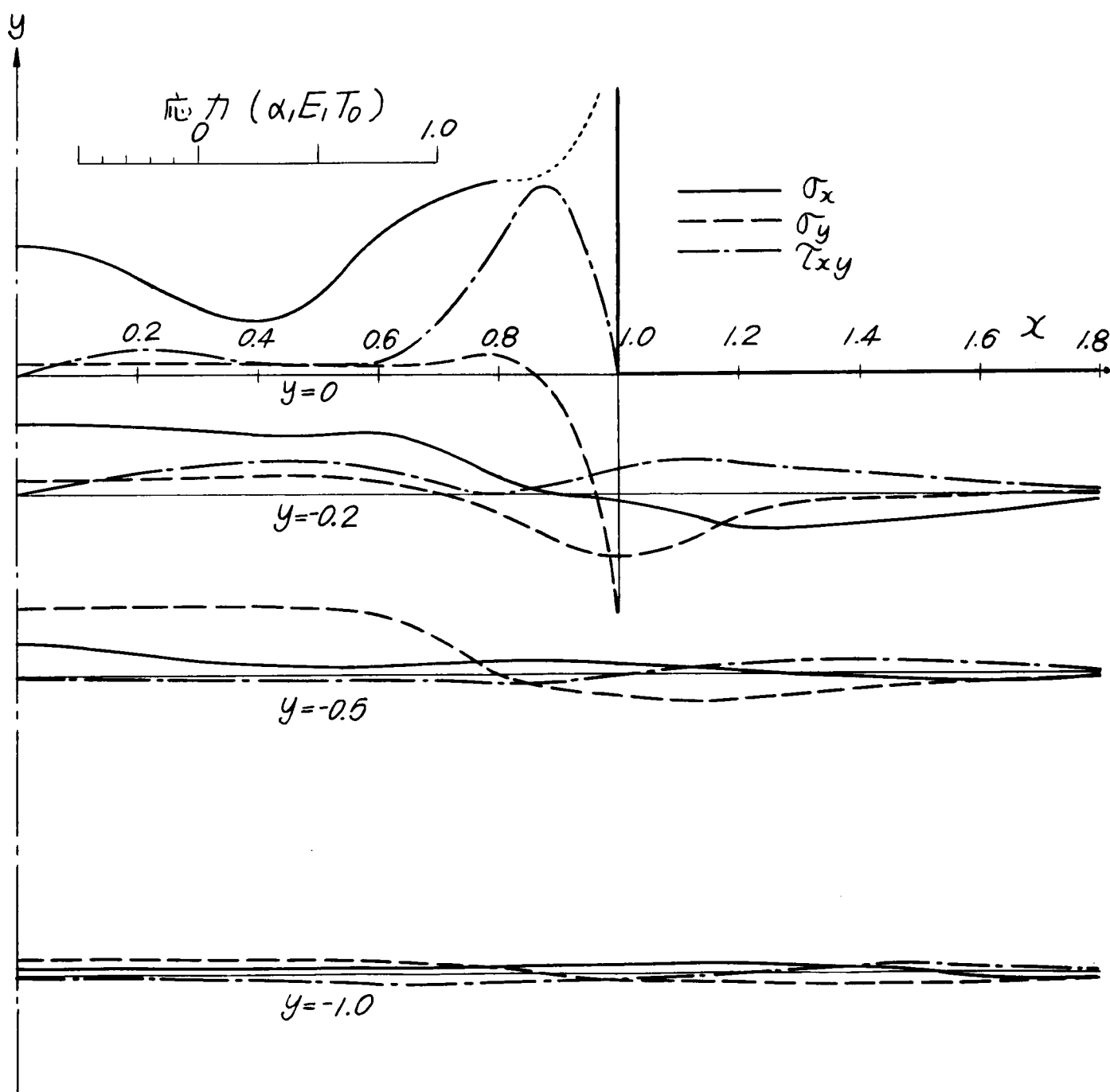
附図-Ⅱ・6・5 半無限体に接続したときの接続部の応力状態

$$(T=T_0, h_1=\infty, \nu_1=\nu_2=0)$$

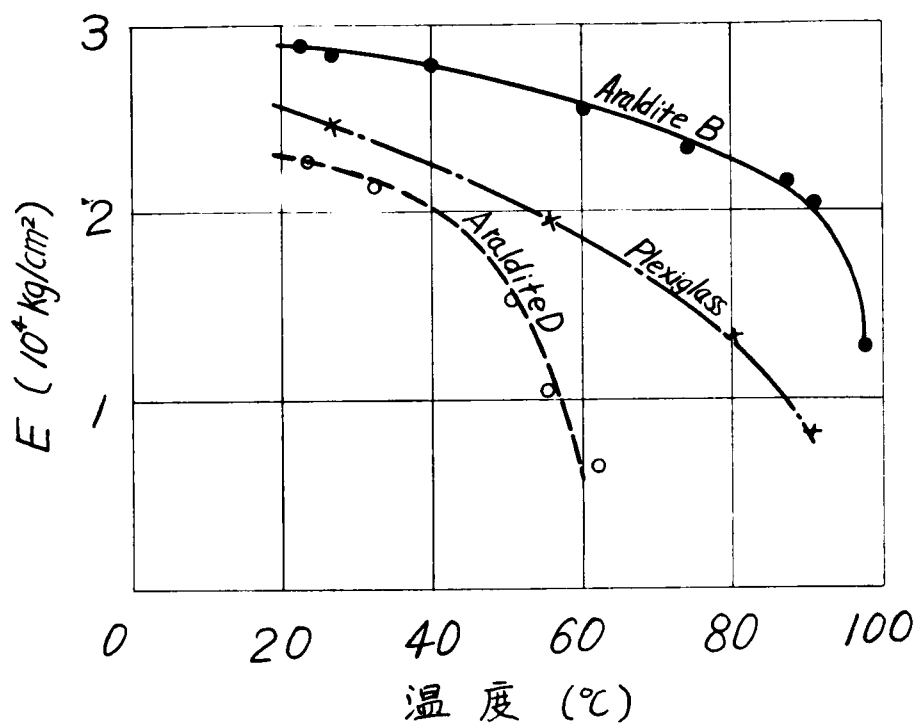


附四-Ⅱ.6.6 矩形と半無限板と接続したときの応力状態

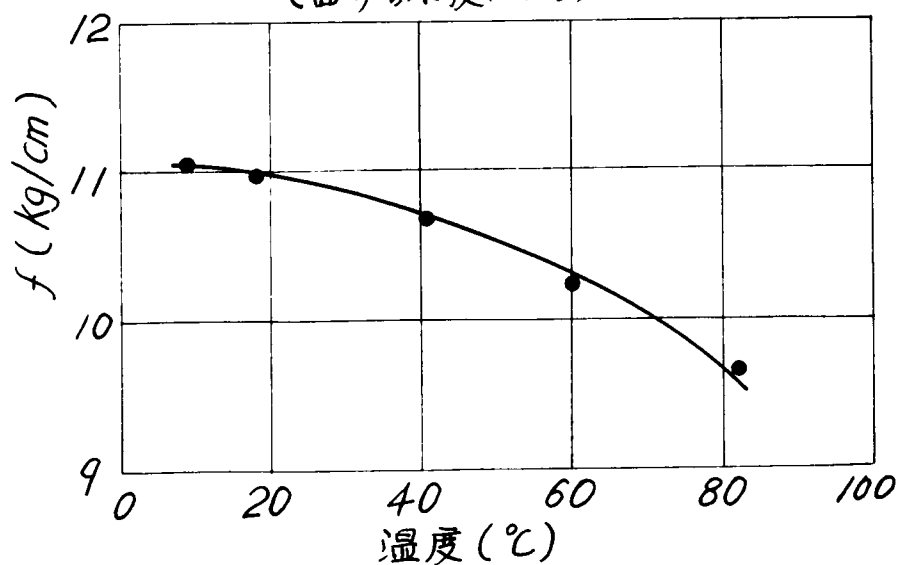
($T=T_0$, $h_1=\infty$, $\nu_1=\nu_2=0$, $\alpha=1$)



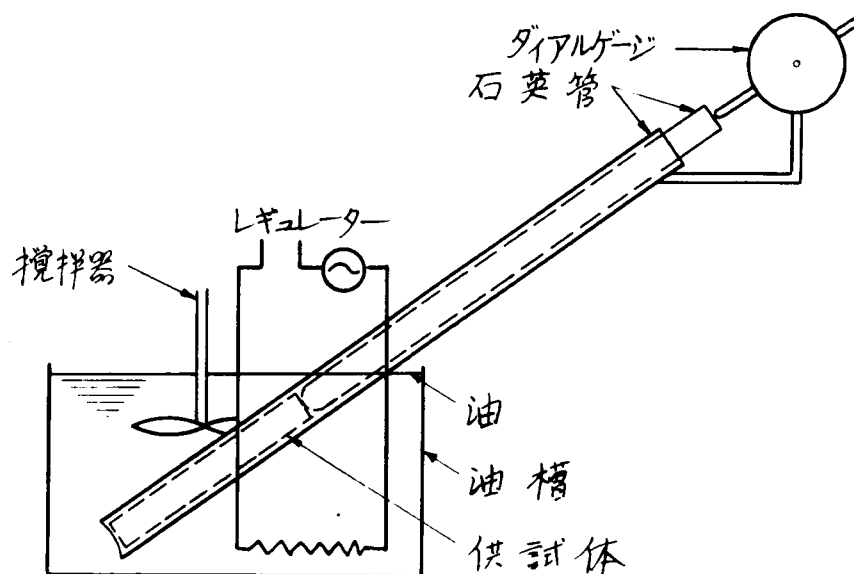
附図-Ⅱ-7.1 弾性係数と温度との関係 (引張試験による)



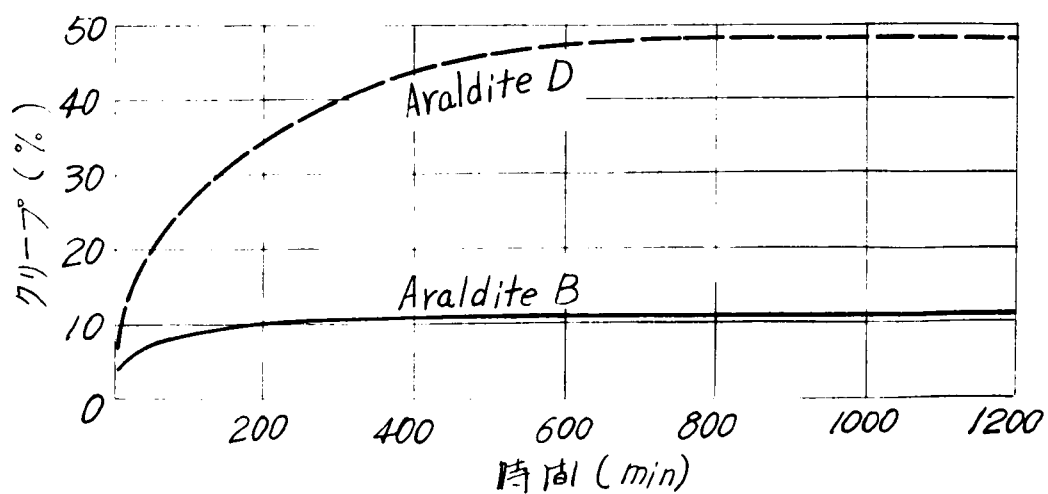
附図-Ⅱ-7.2 Araldite B の Material Fringe Value と温度との関係 (曲げ試験による)



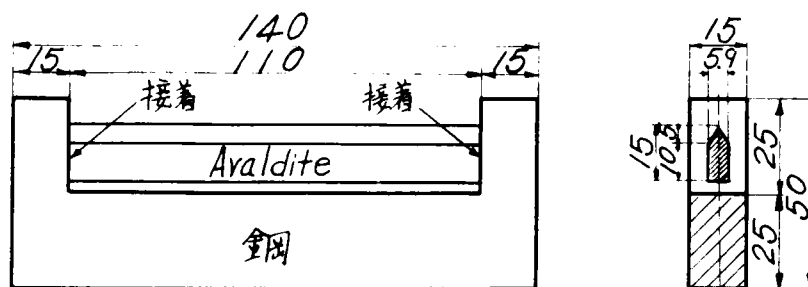
附図-Ⅱ・7・3 熱膨脹係数の測定法



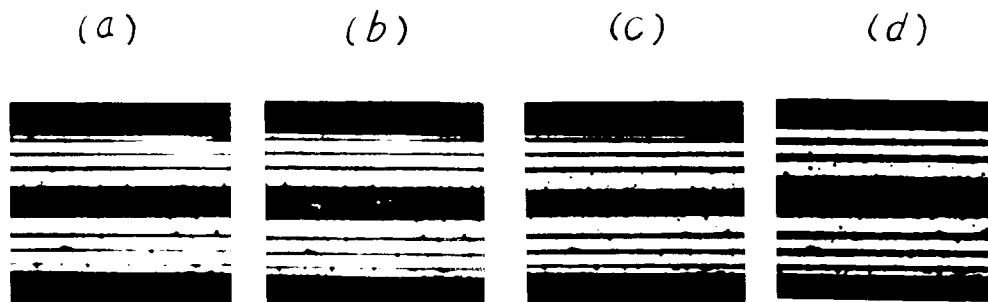
附図-Ⅱ・7・4 Araldite B および D の力学的クリープ
(20℃ において)



附図-Ⅱ・7・5 両端固定棒の実験



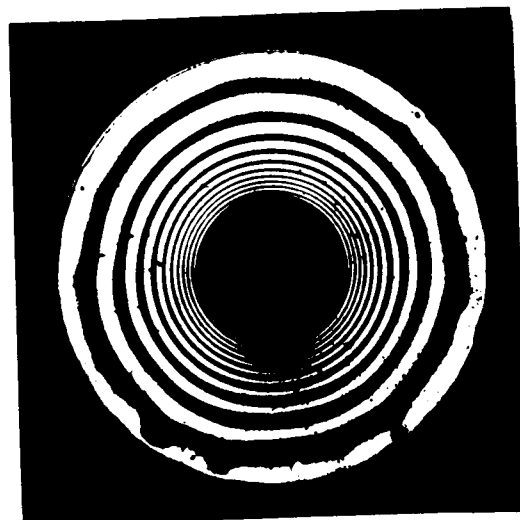
附図-Ⅱ・7・6 温度サイクルによる縞次数の変化



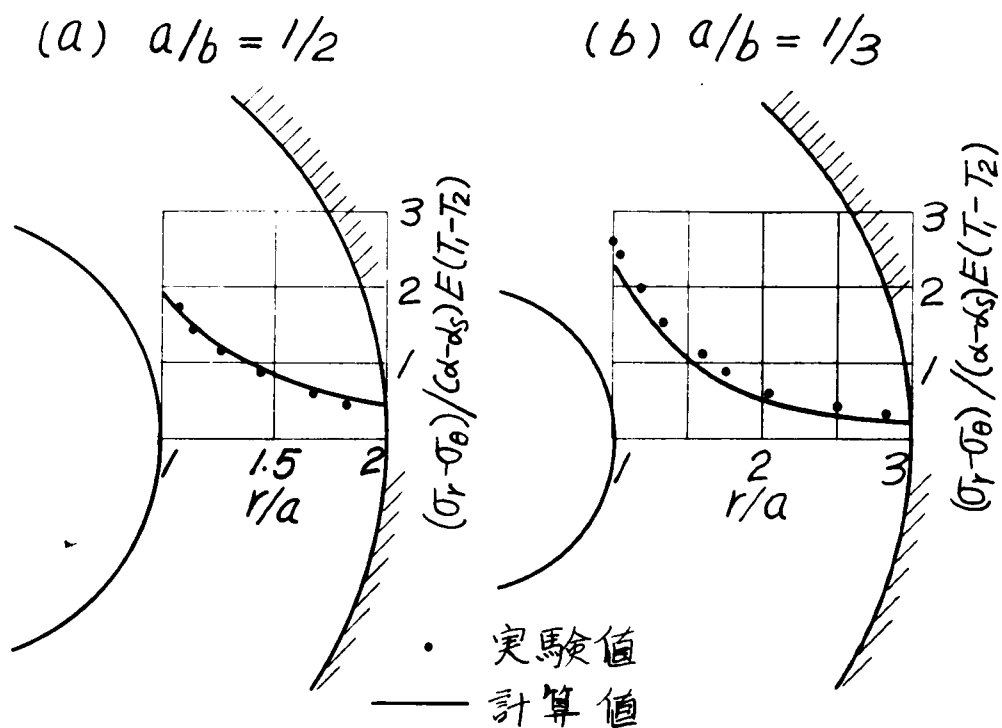
附図-Ⅱ・7・7 円環の等色線

(a) $a/b = 1/2$
 $T_1 - T_2 = 37^\circ\text{C}$, 厚さ 0.59 cm
 $K\alpha = 0.149\text{ cm}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$

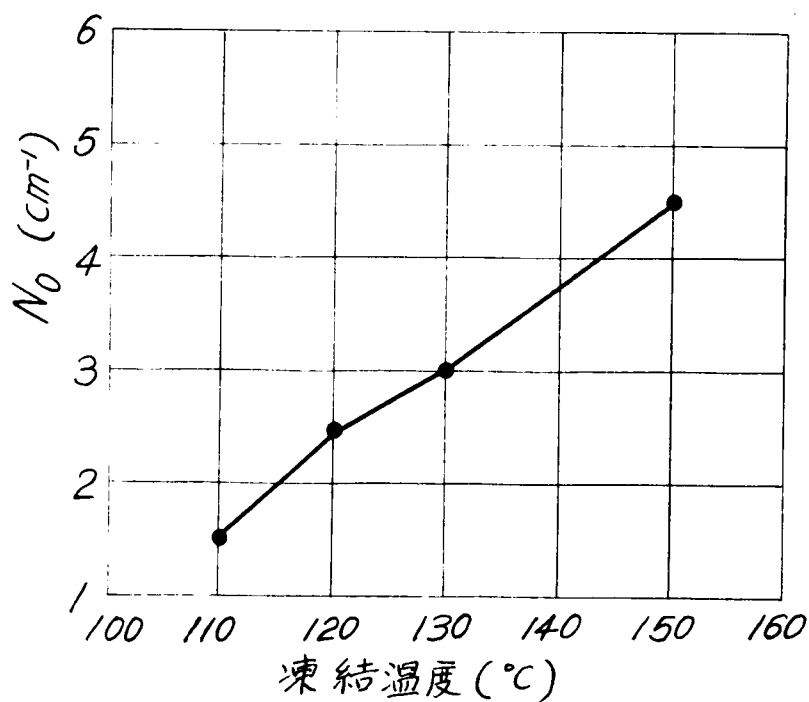
(b) $a/b = 1/3$
 $T_1 - T_2 = 41^\circ\text{C}$, 厚さ 0.59 cm
 $K\alpha = 0.186\text{ cm}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$



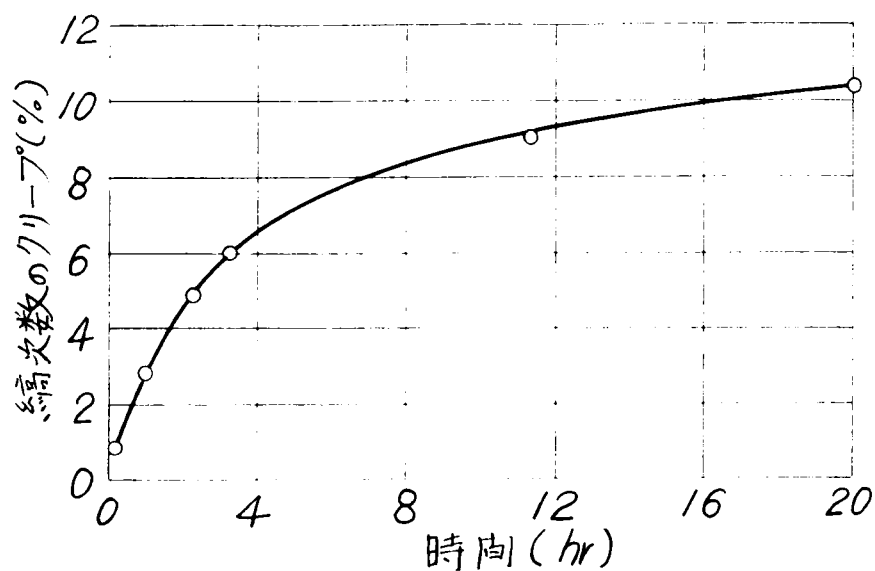
附図-II-7.8 円環の熱応力



附図-II-7.9 凍結温度と結核数との関係

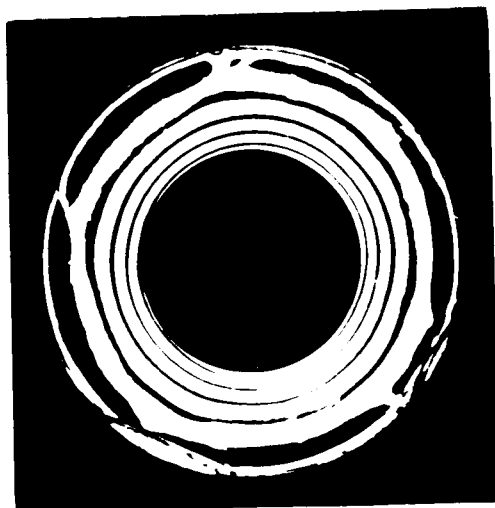


附図-Ⅱ・7・10 凍結縞の光学的クリープ

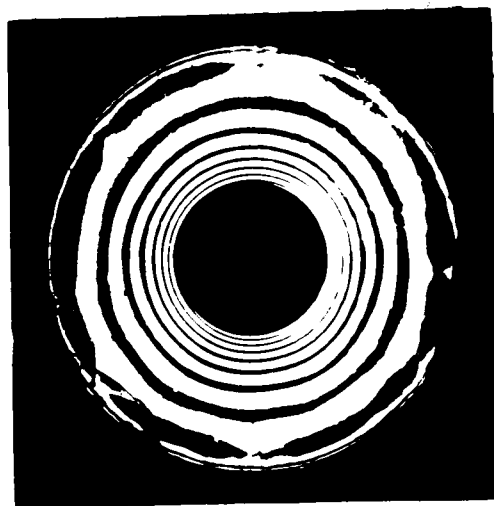


附図-Ⅱ・7・11 凍結された円環の等色線
(凍結温度 133.5°C , 厚さ 0.59 cm , $N_0 = 381\text{ cm}^{-1}$)

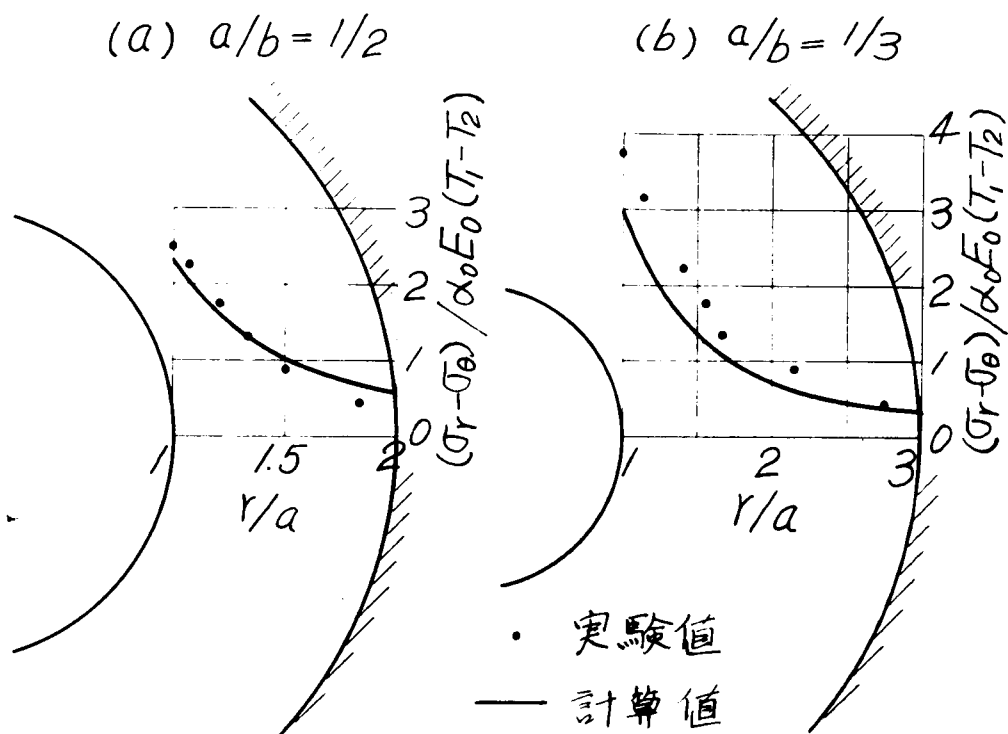
(a) $a/b = 1/2$



(b) $a/b = 1/3$



附図-II.7.12 円環熱応力



附図-II.7.13 両端固定棒の等色線
(凍結温度 152°C , 厚さ 10.2 cm)



附圖-II·8.1 等色線

(a) $h/l = 1/2$



(b) $h/l = 1/4$

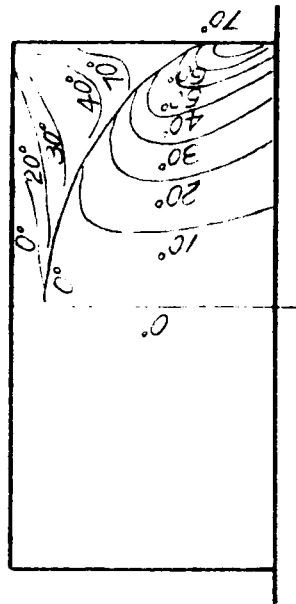


(c) $h/l = 1/8$

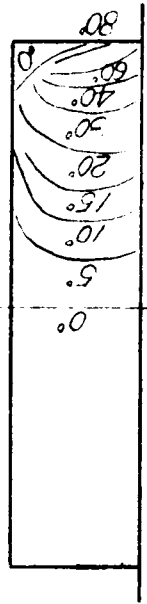


附圖-II·8.2 等傾線

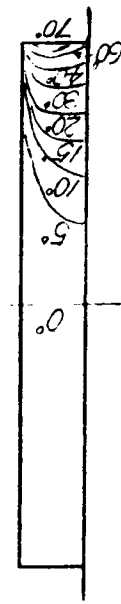
(a) $h/l = 1/2$



(b) $h/l = 1/4$

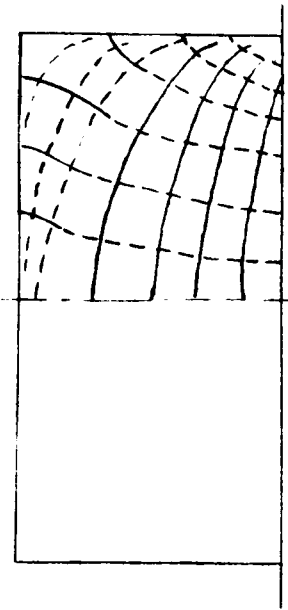


(c) $h/l = 1/8$

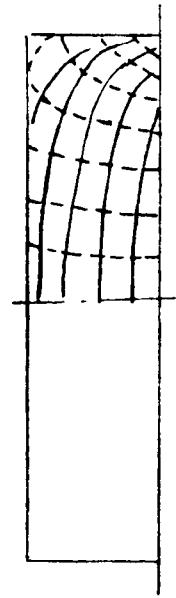


附圖-II·8.3 主应力線

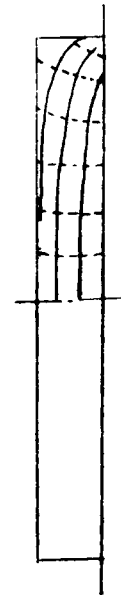
(a) $h/l = 1/2$



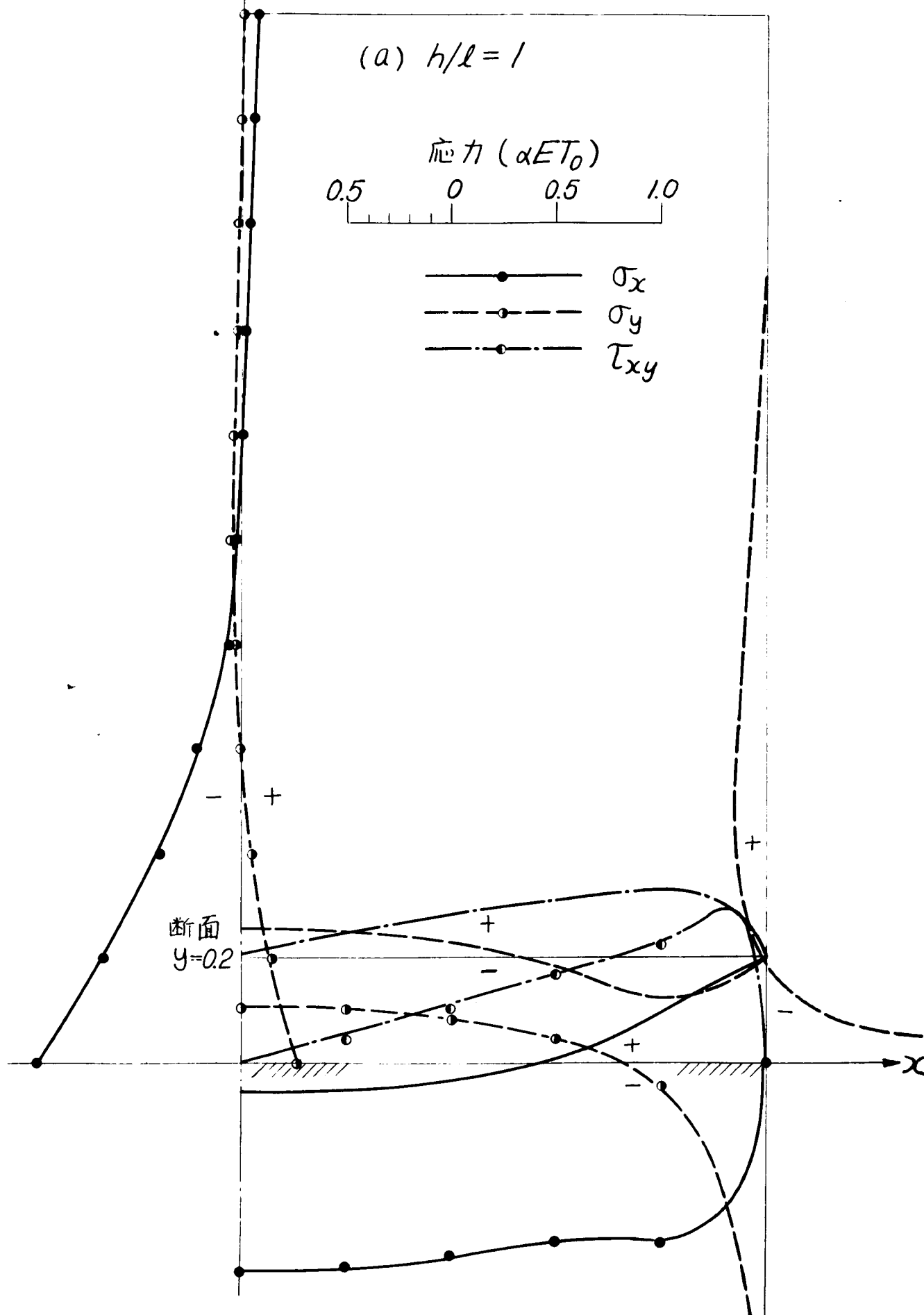
(b) $h/l = 1/4$



(c) $h/l = 1/8$

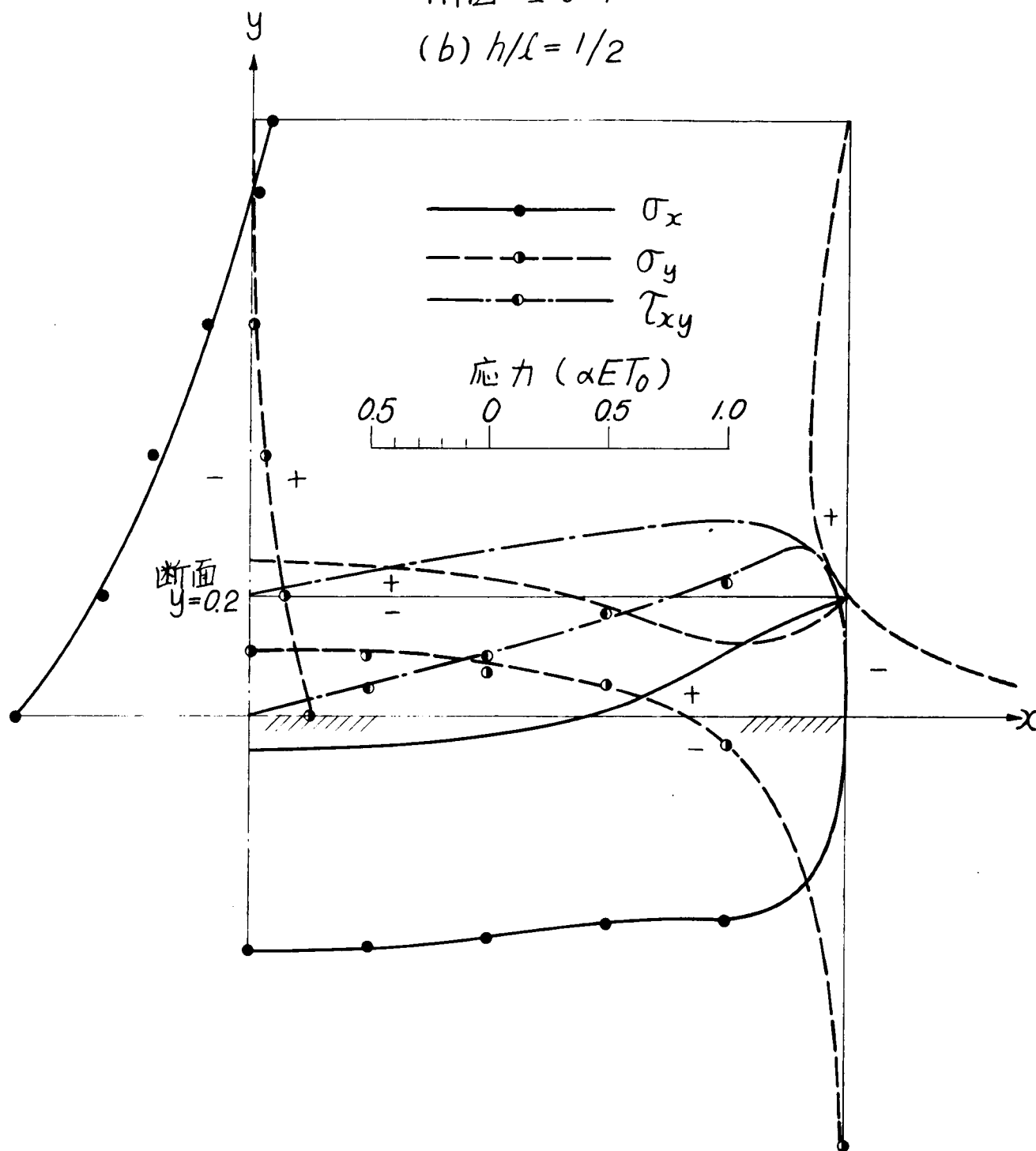


Y 附図-II.8.4 矩形板の応力状態



附圖-Ⅱ·8·4

(b) $h/l = 1/2$

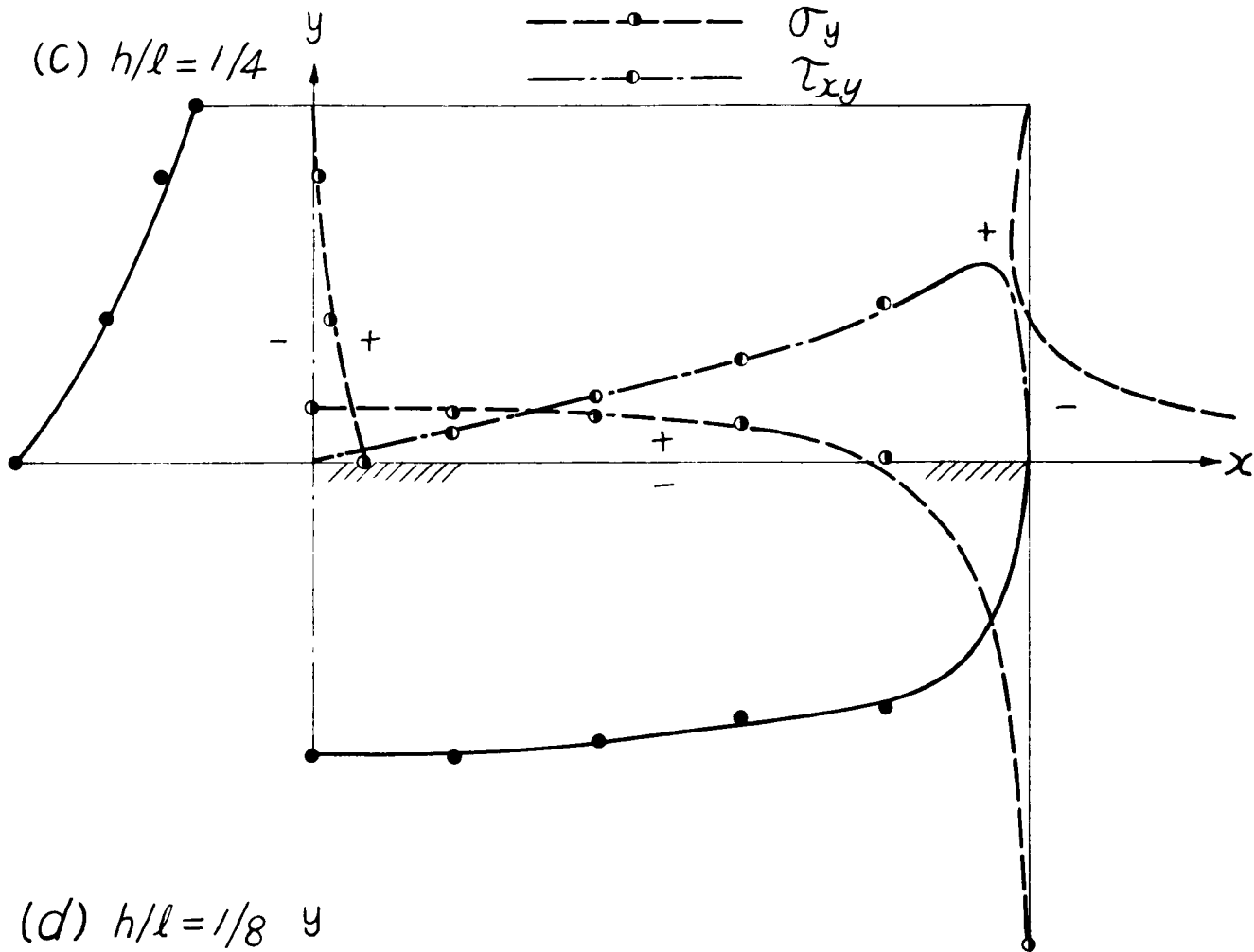


附圖-Ⅱ·8·4

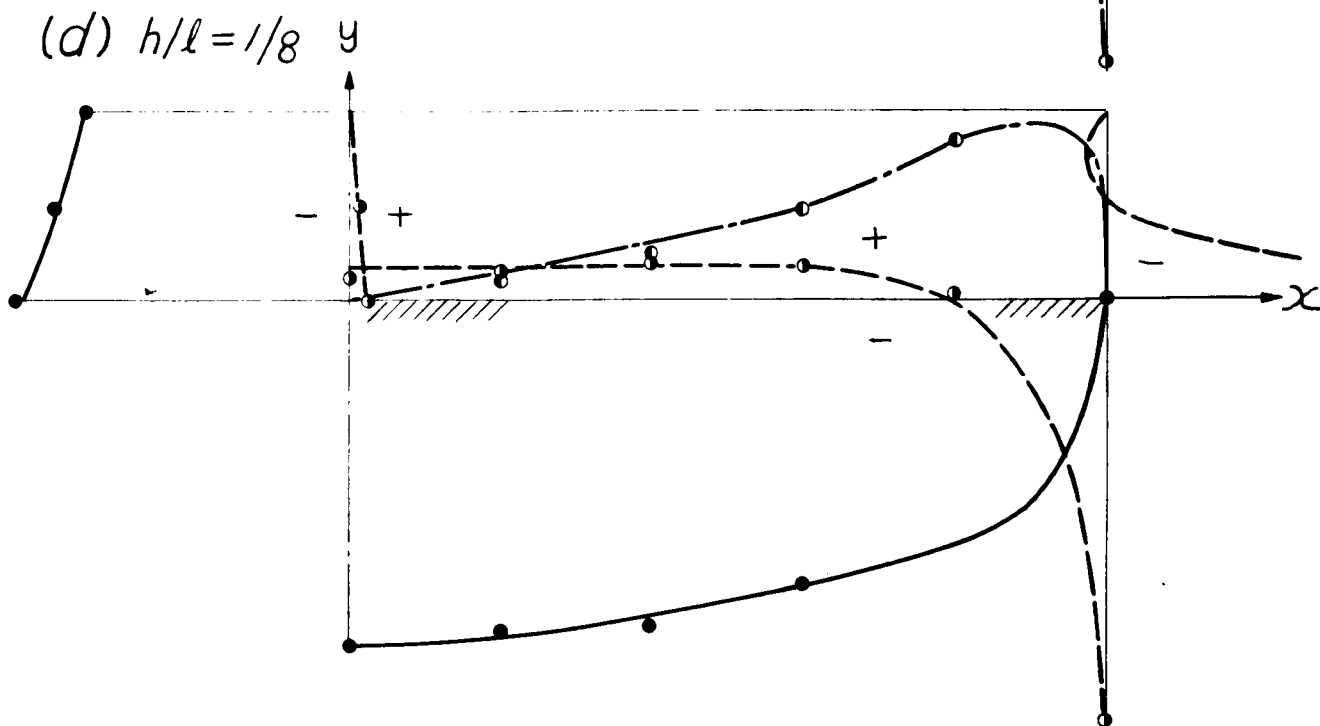
0.5 0 0.5 1.0

—●— σ_x
 - - -●- - σ_y
 —○— τ_{xy}

(C) $h/l = 1/4$

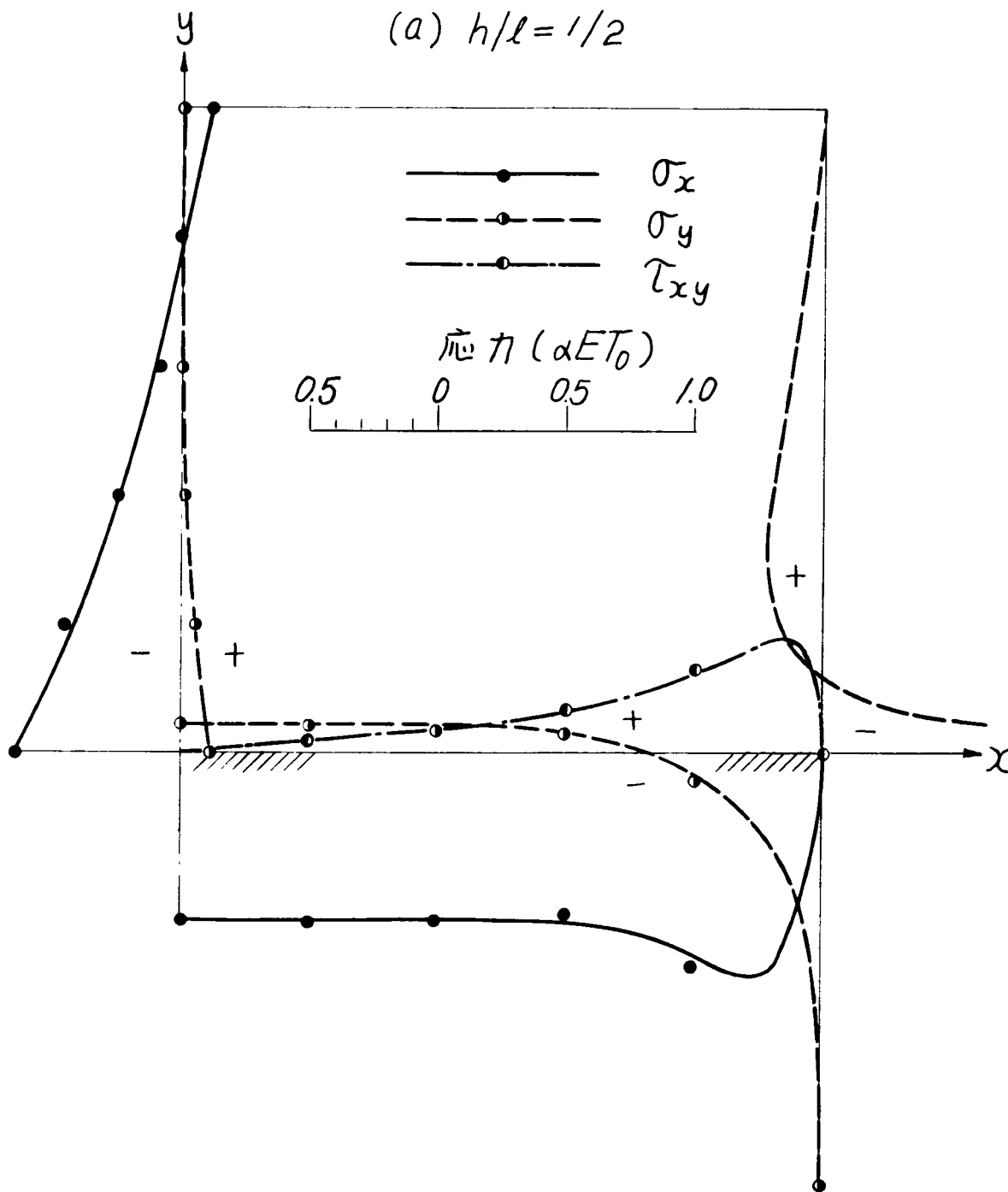


(d) $h/l = 1/8$



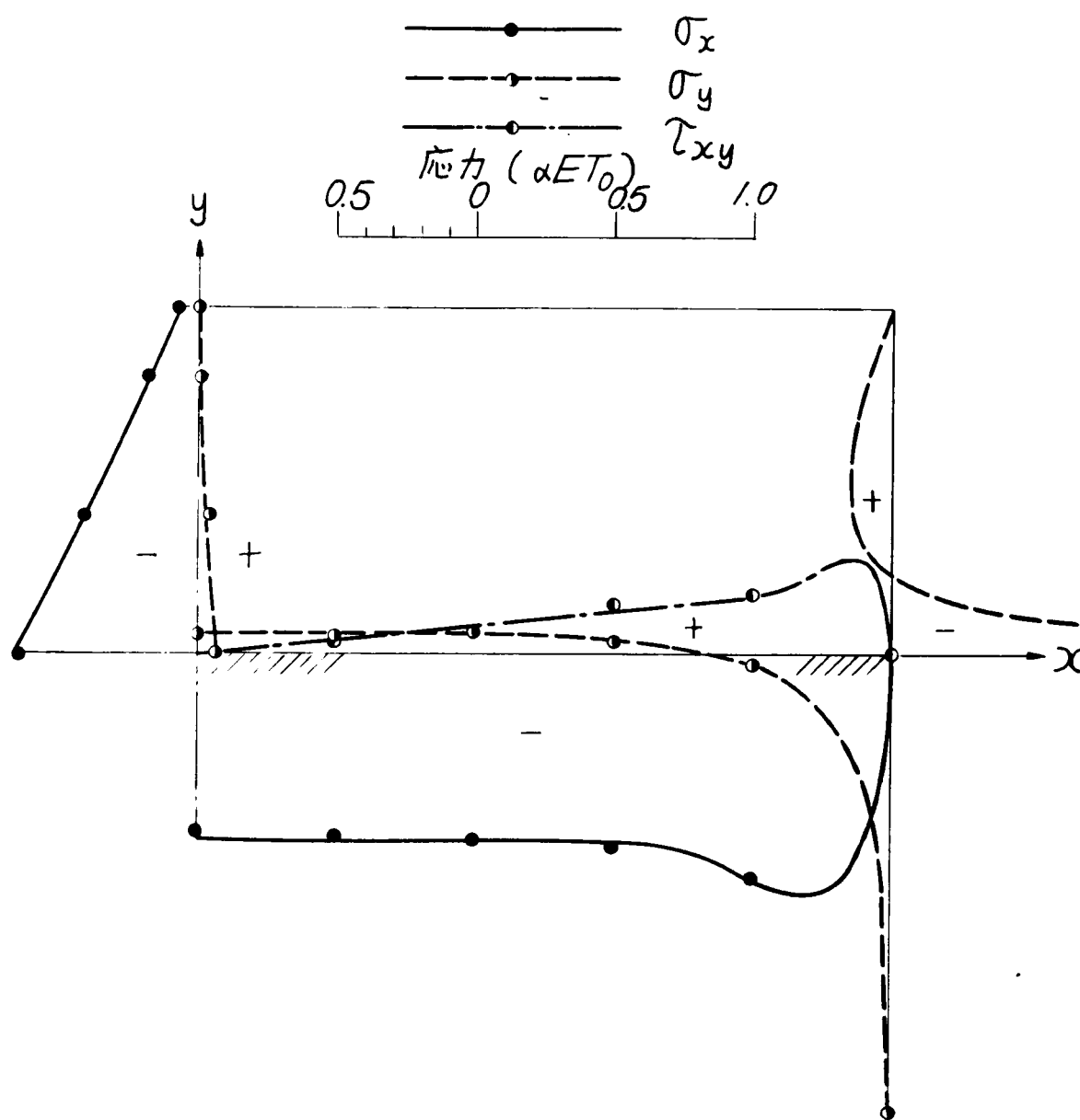
附図-II・8・5 矩形板の応力状態 ($\nu=1$)

(a) $h/l=1/2$



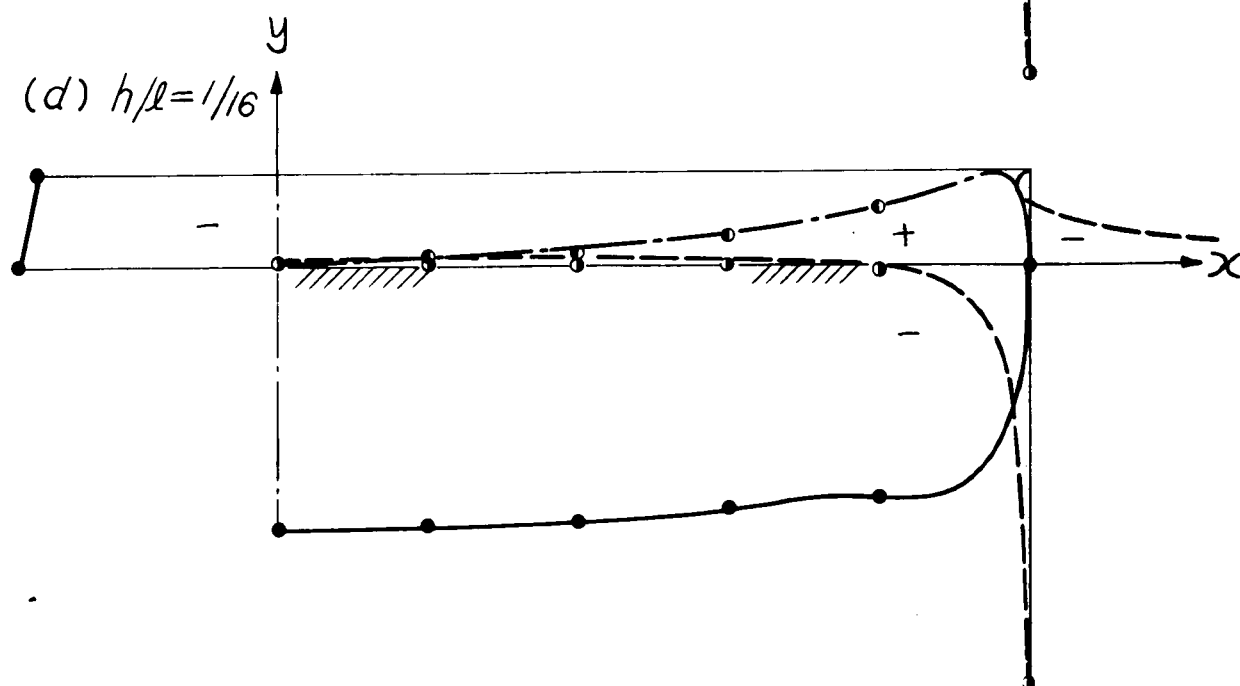
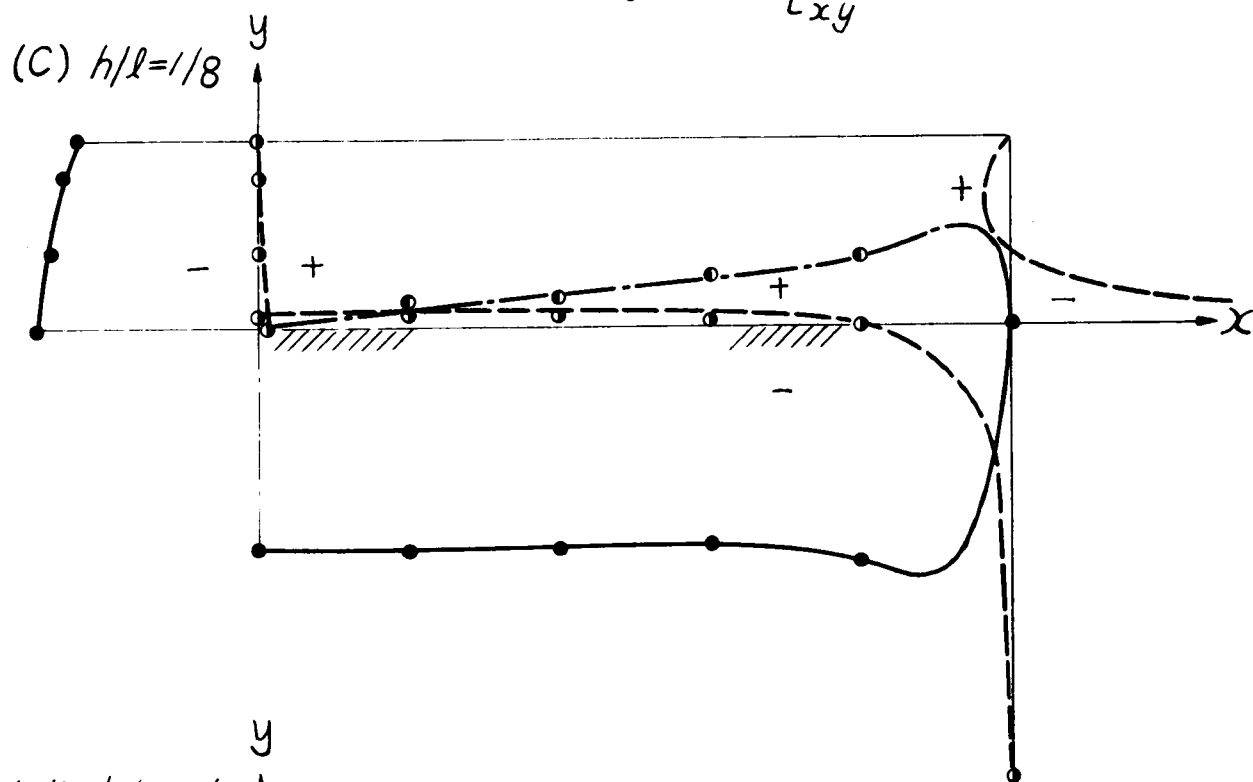
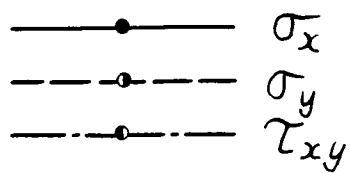
附圖 - II · 8 · 5

(b) $h/l = 1/4$



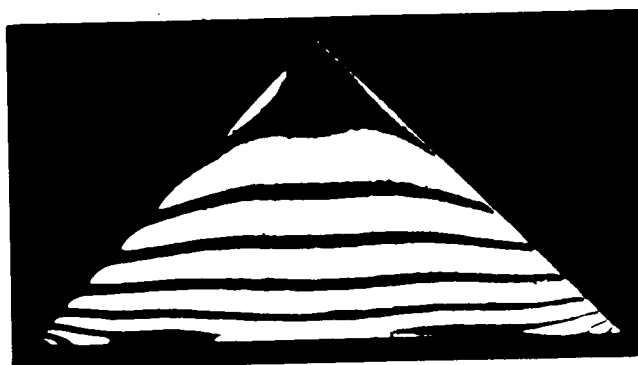
附圖-Ⅱ·8·5

応力 (αET_0)

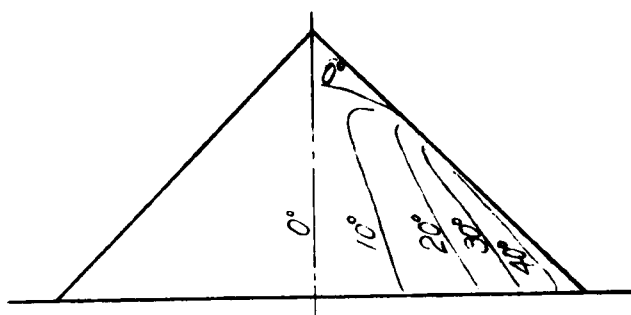


附圖-Ⅱ-8-6 $\theta = 45^\circ$ の例

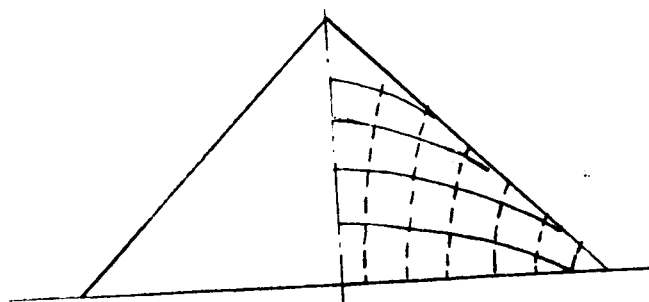
等色線



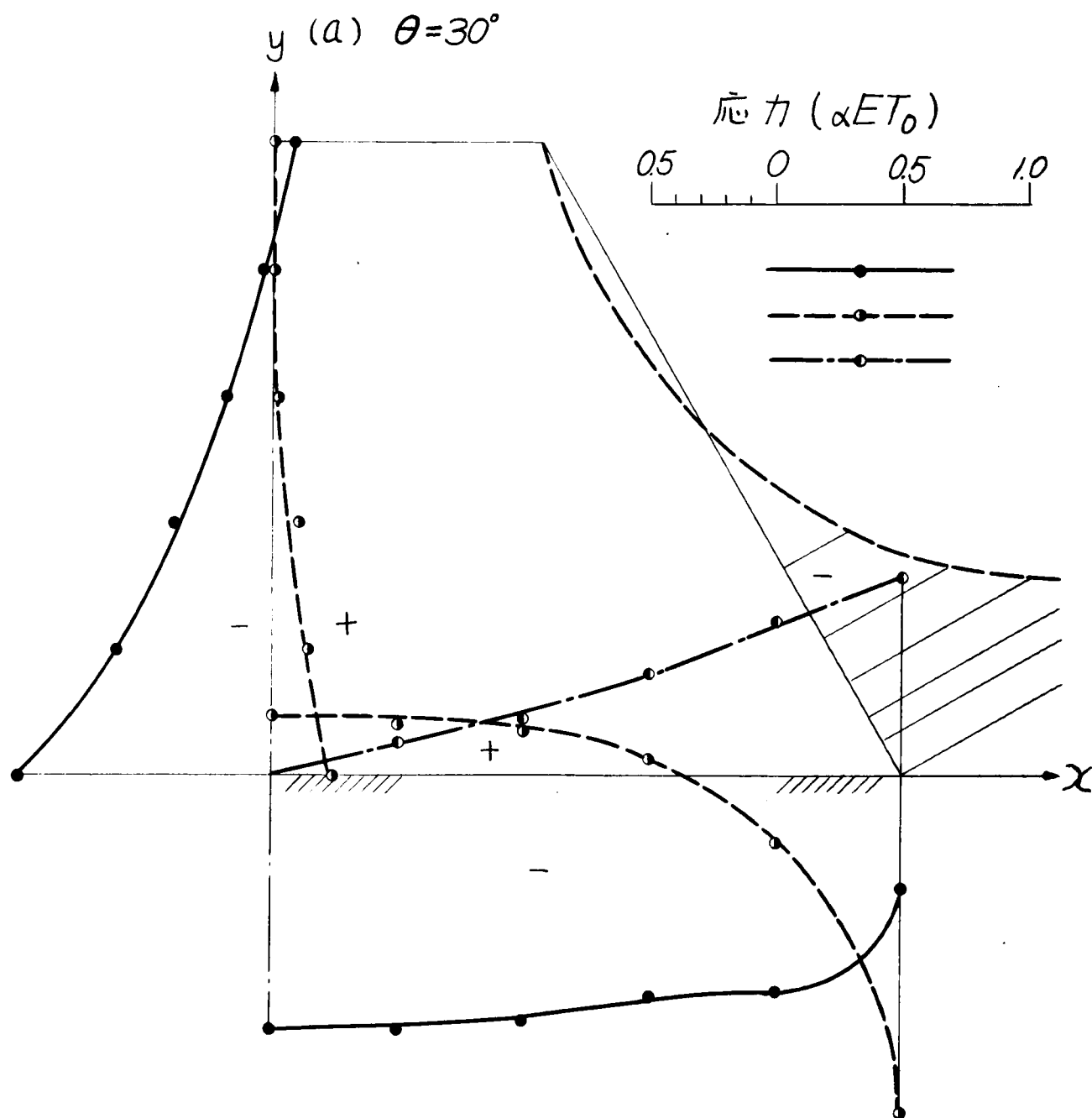
等傾線



主応力線

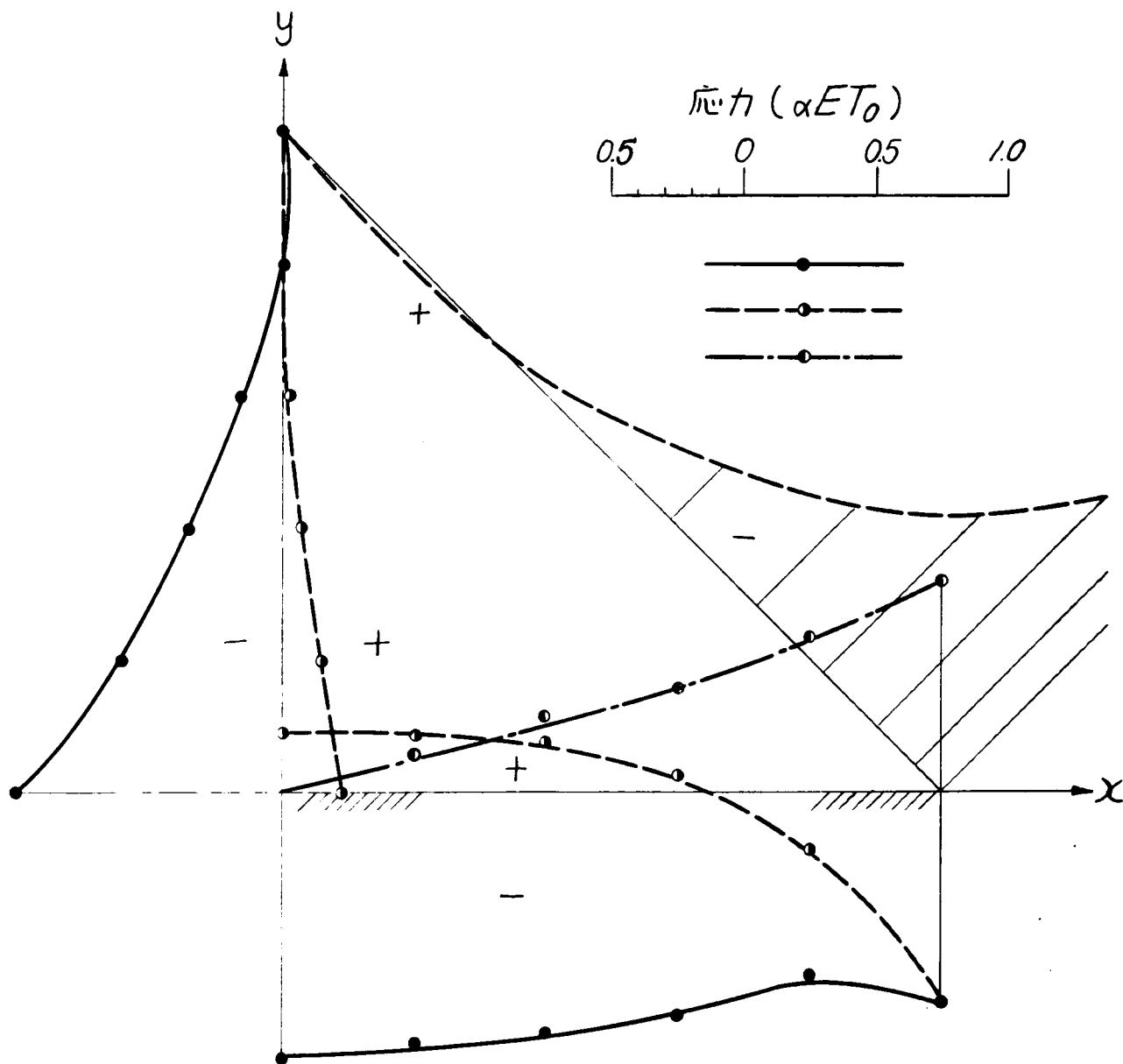


附圖-II·8·7 二等辺三角形板の応力状態($\alpha=0$)

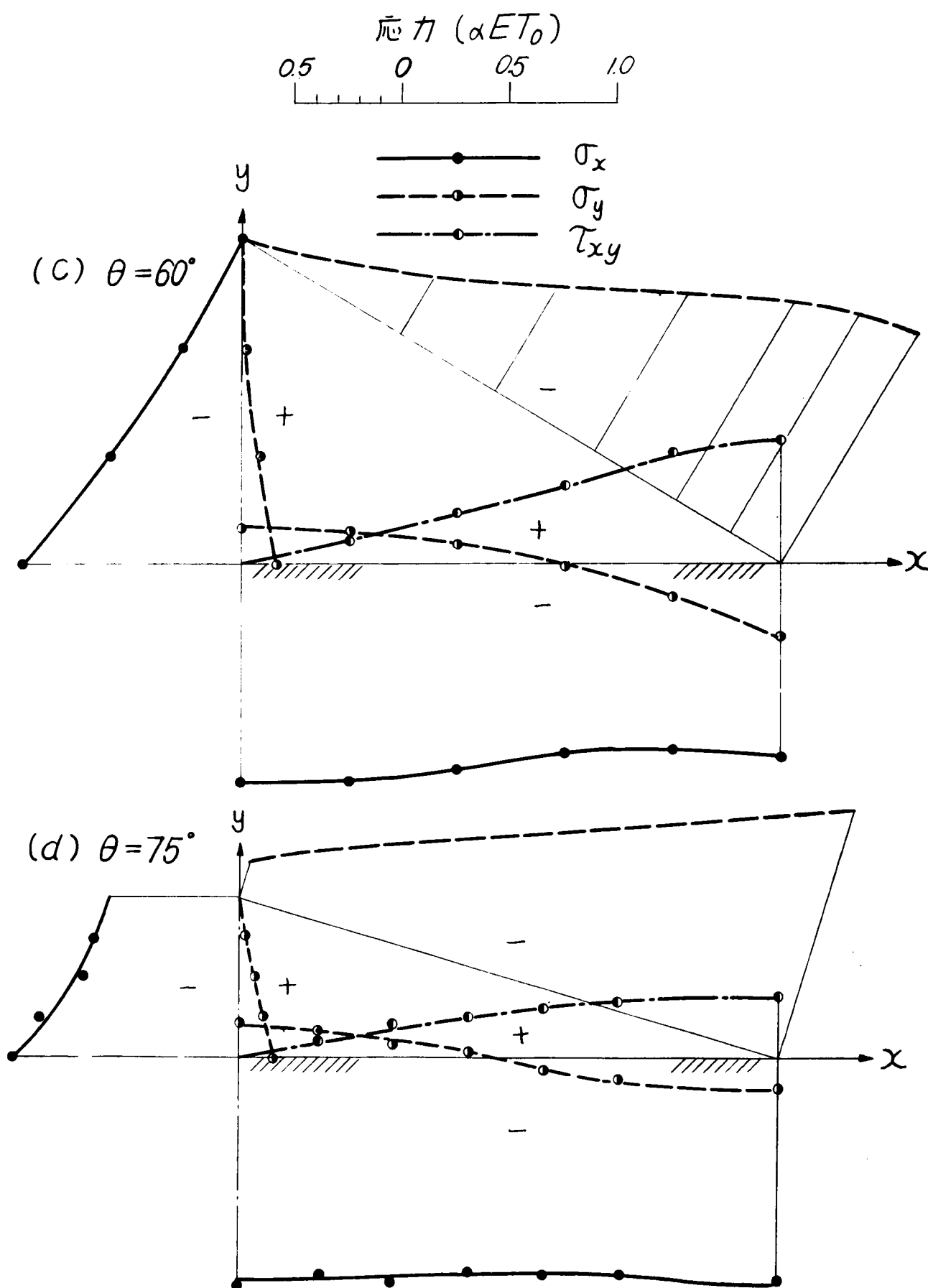


附圖-Ⅱ·8·7

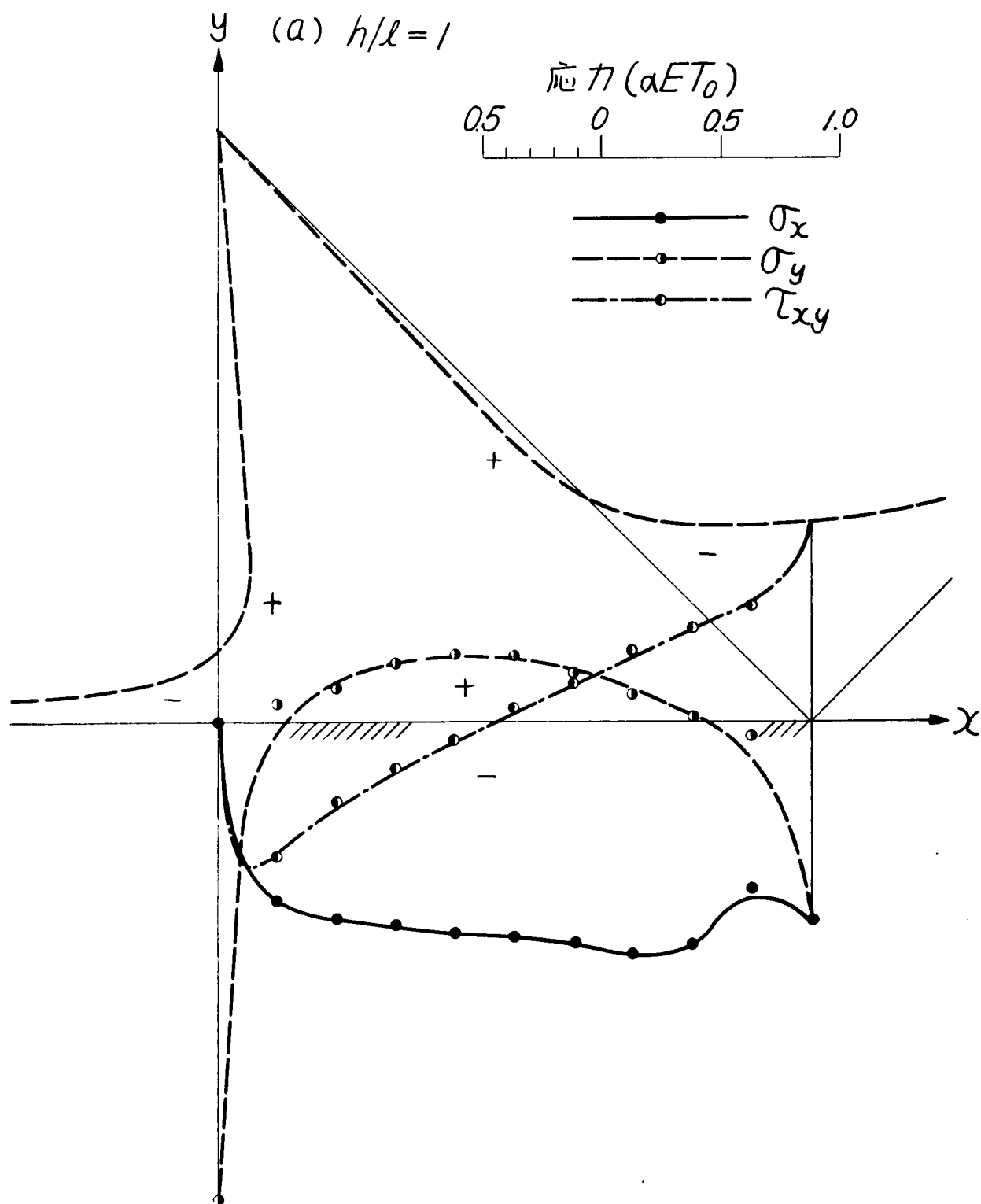
(b) $\theta = 45^\circ$



附圖-Ⅱ·8·7

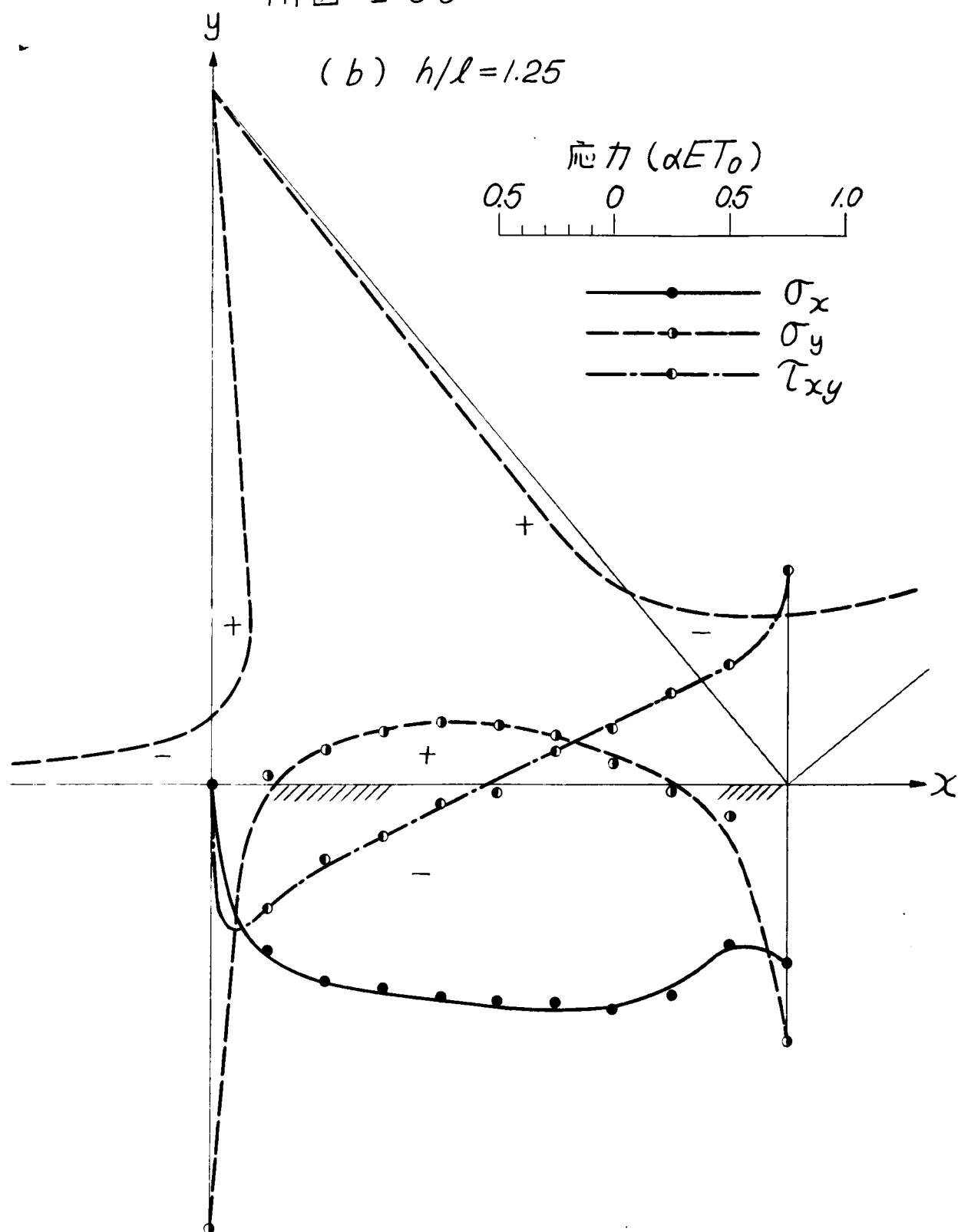


附図-Ⅱ・8・8 直角三角形の応力状態 ($\alpha = 0$)

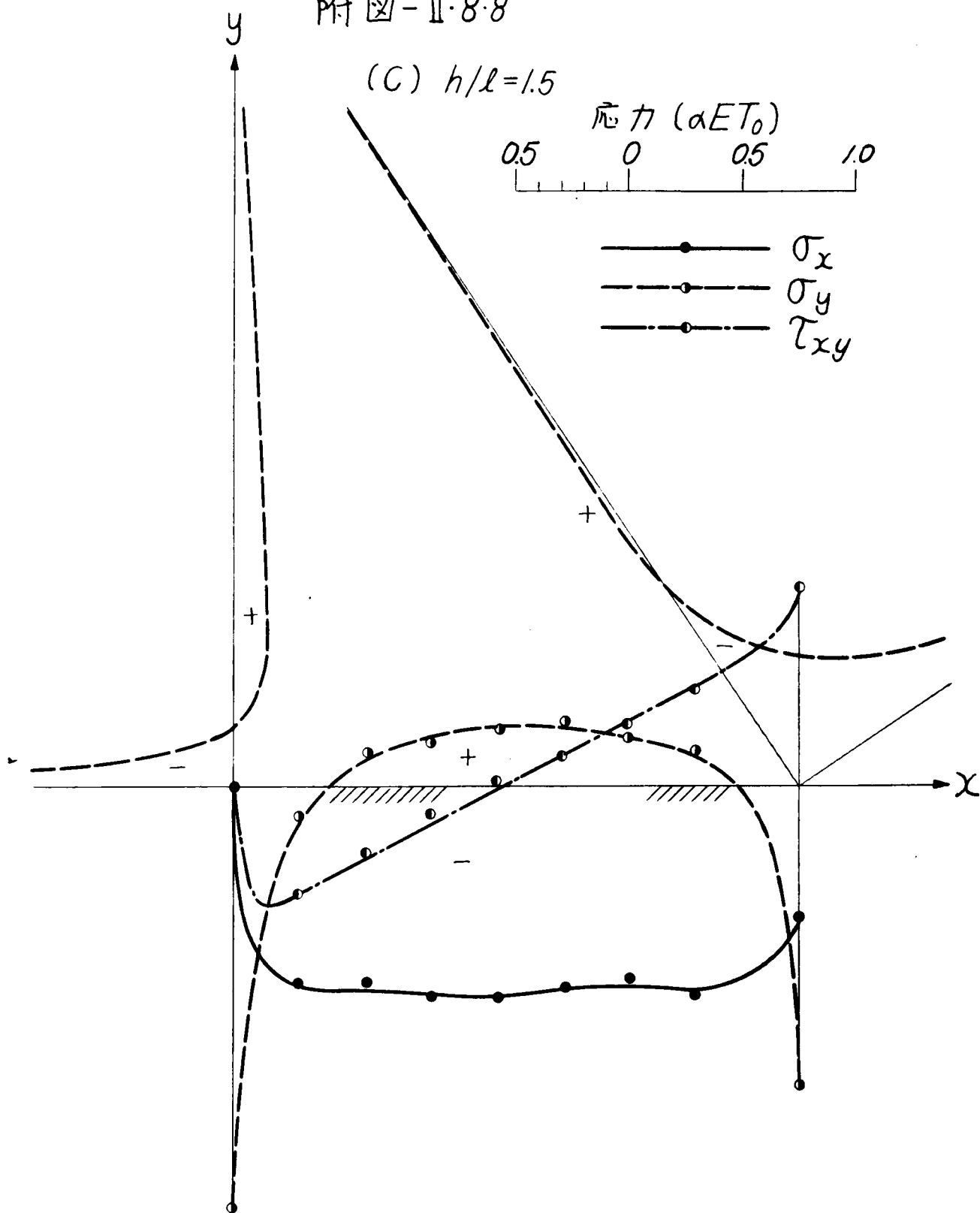


附圖-II·8·8

(b) $h/l = 1.25$

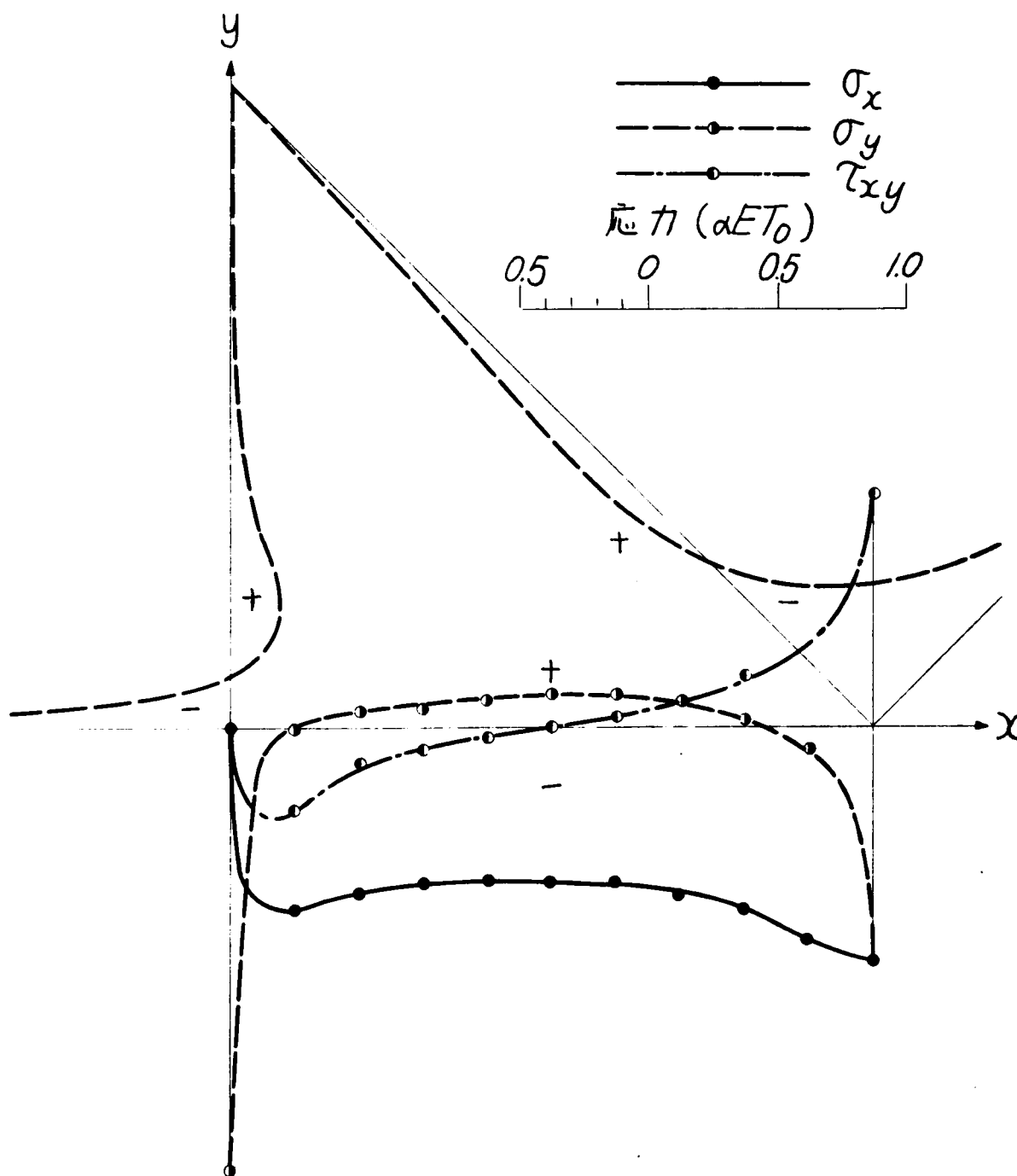


附圖-II·8·8



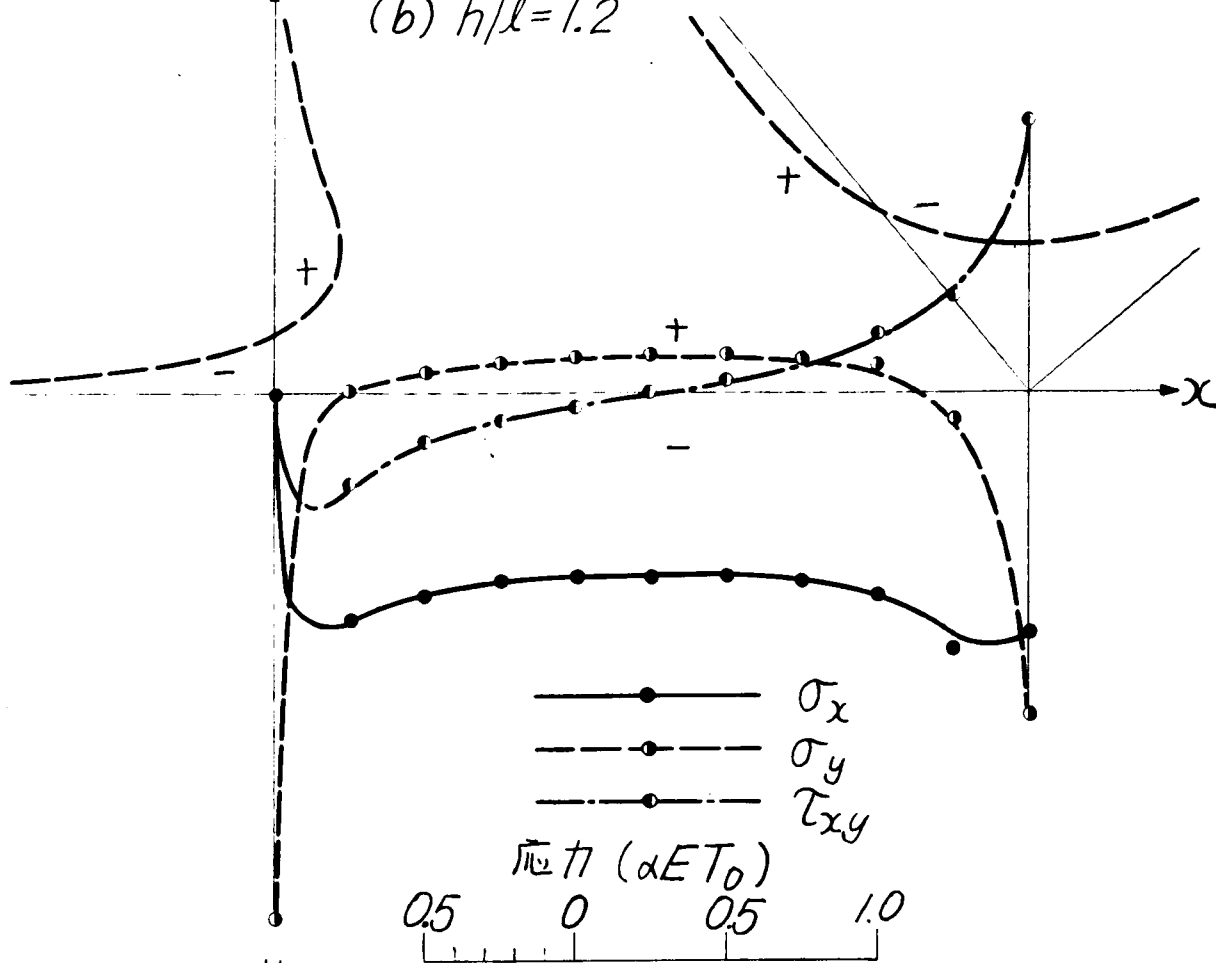
附図-II-8-9 直角三角形の応力状態 ($\kappa=1$)

(a) $h/l=1$

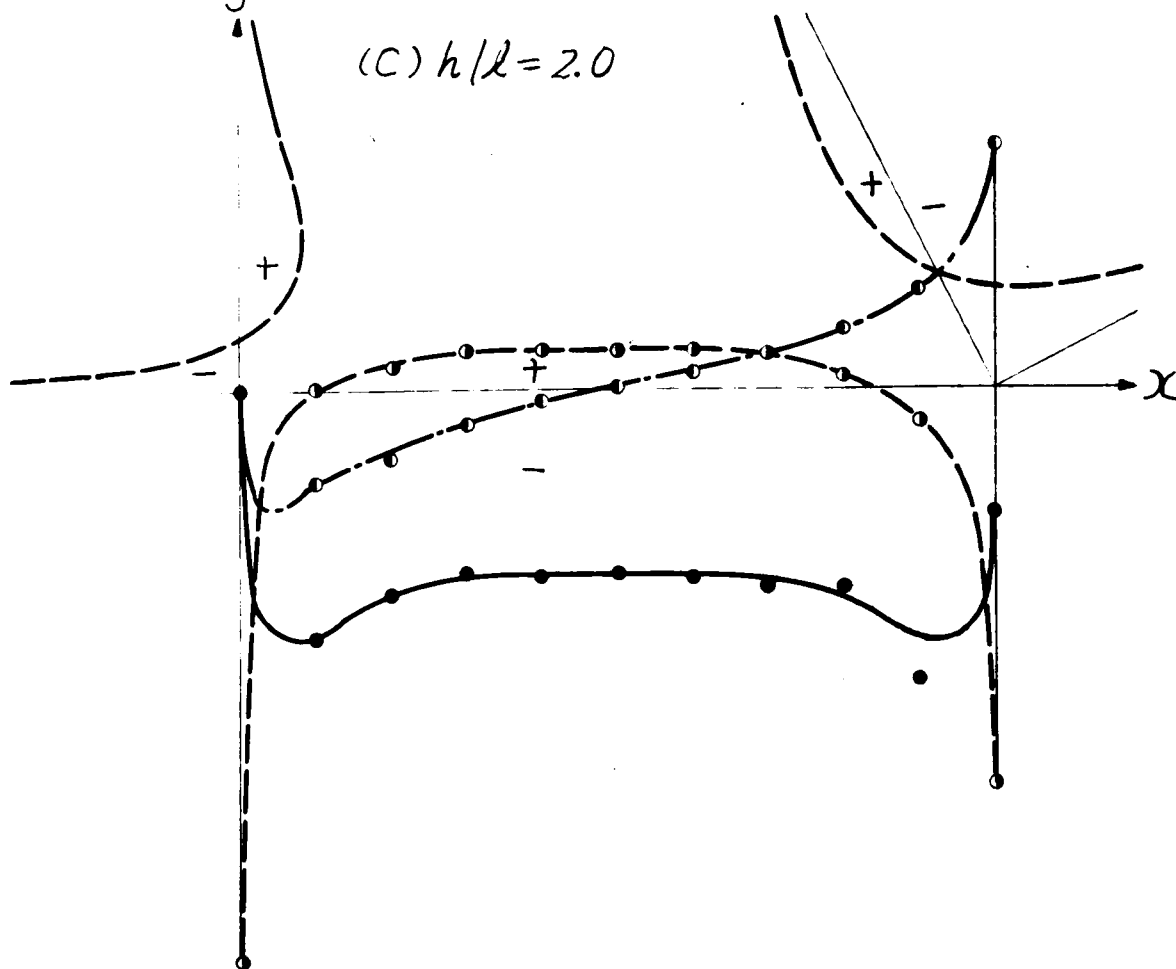


附图-II.8.9

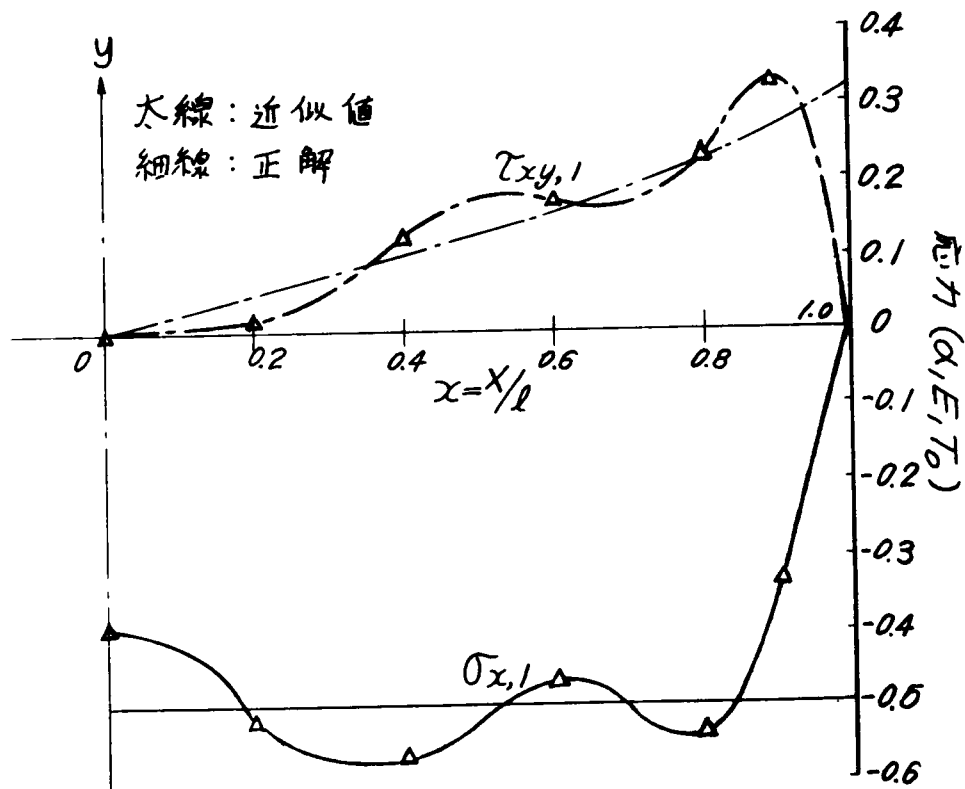
(b) $h/l = 1.2$



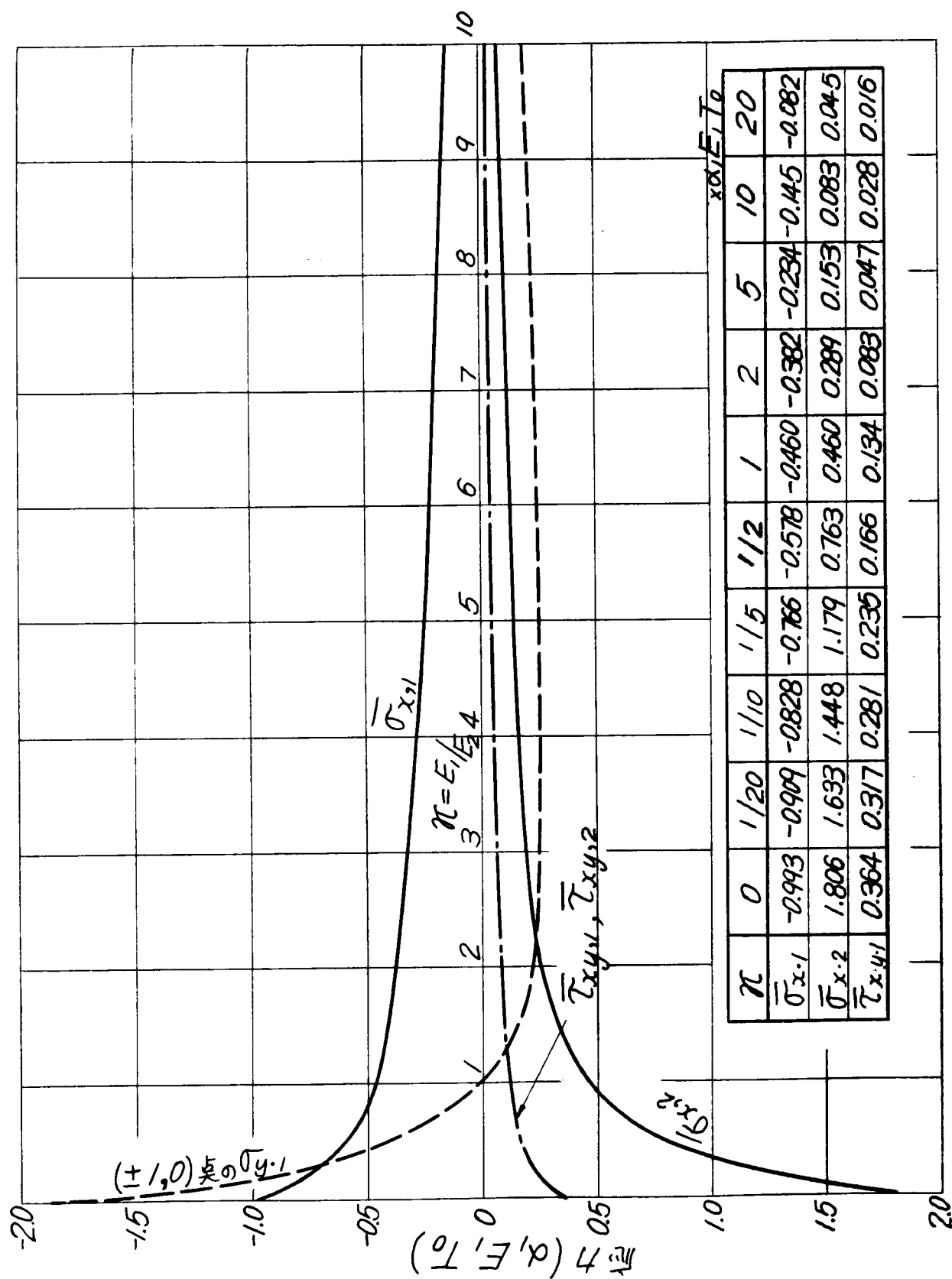
(c) $h/l = 2.0$



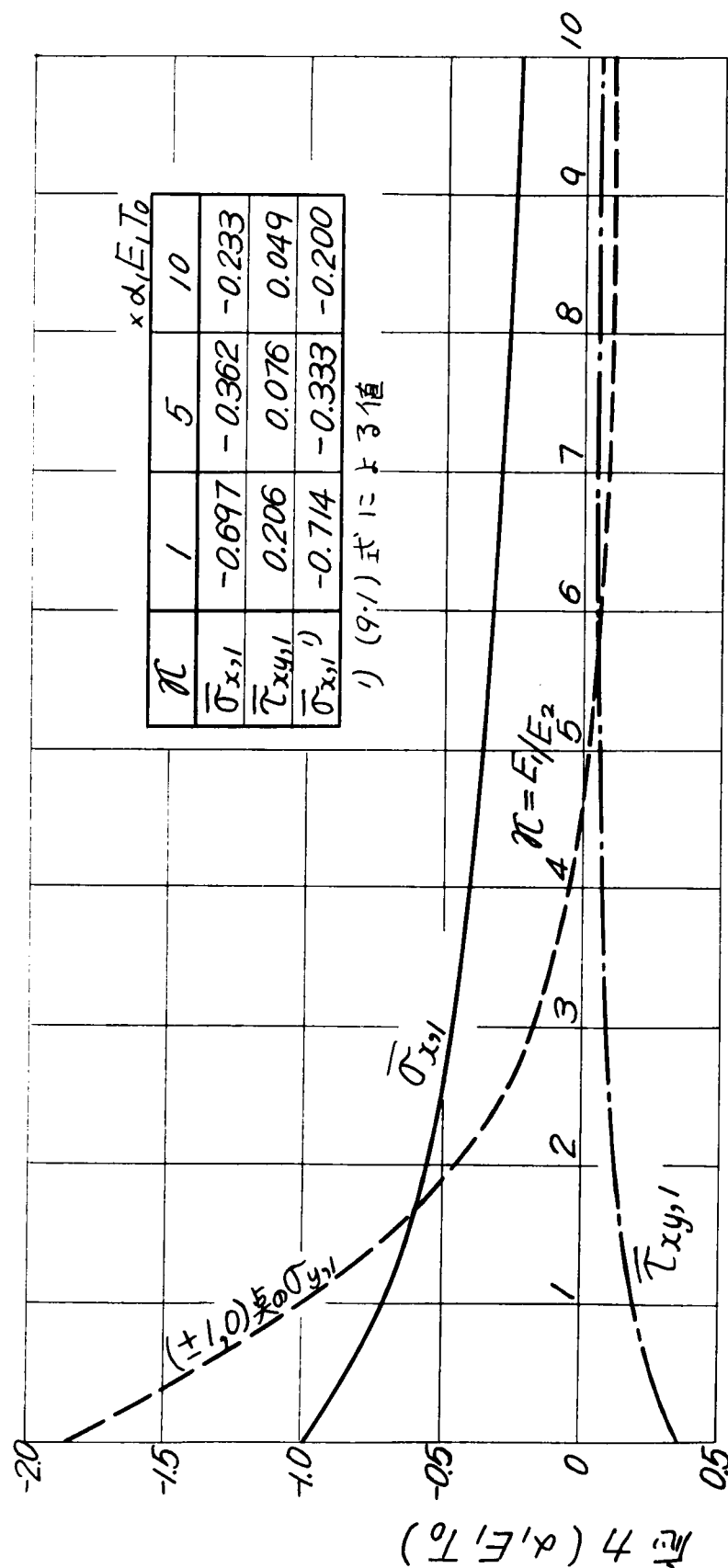
附図-II・9・1 正解との比較



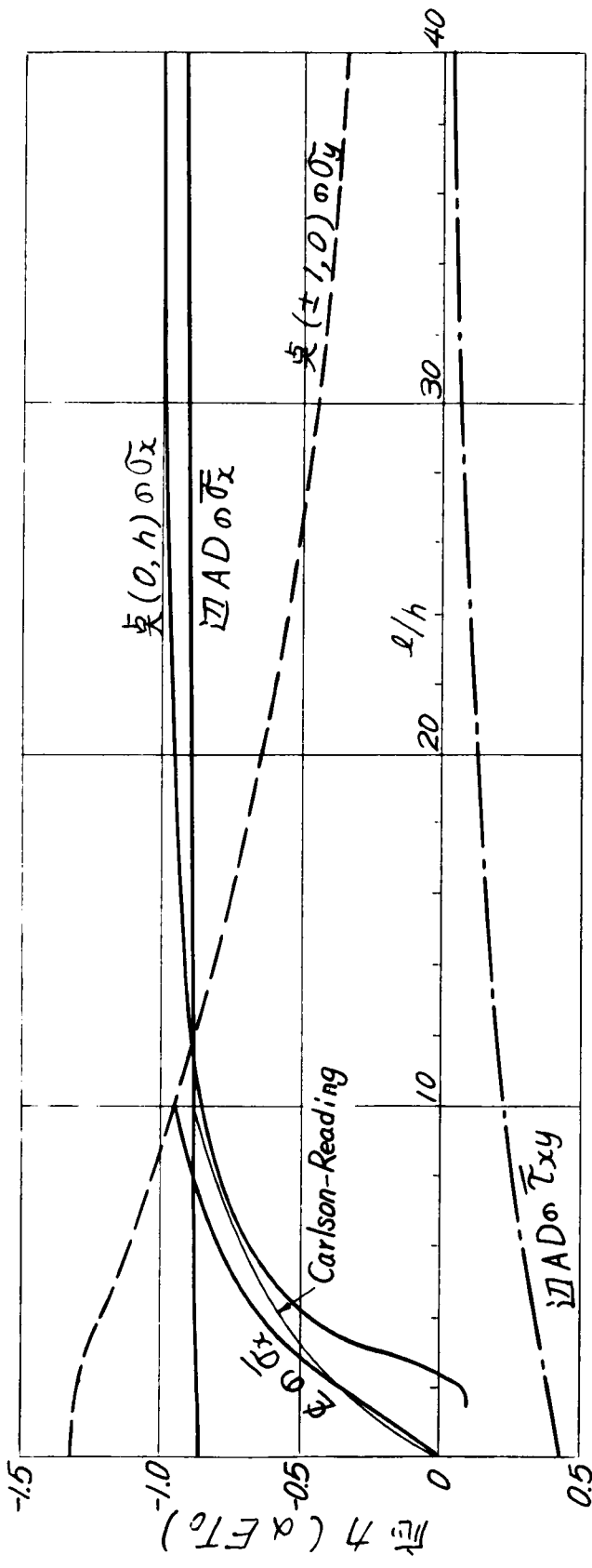
附図-II.9.2 κ と応力との関係
 (附図-II.6.2 の場合)



附図-II-9.3 π と応力との関係
(附図-II-6.5 の場合)



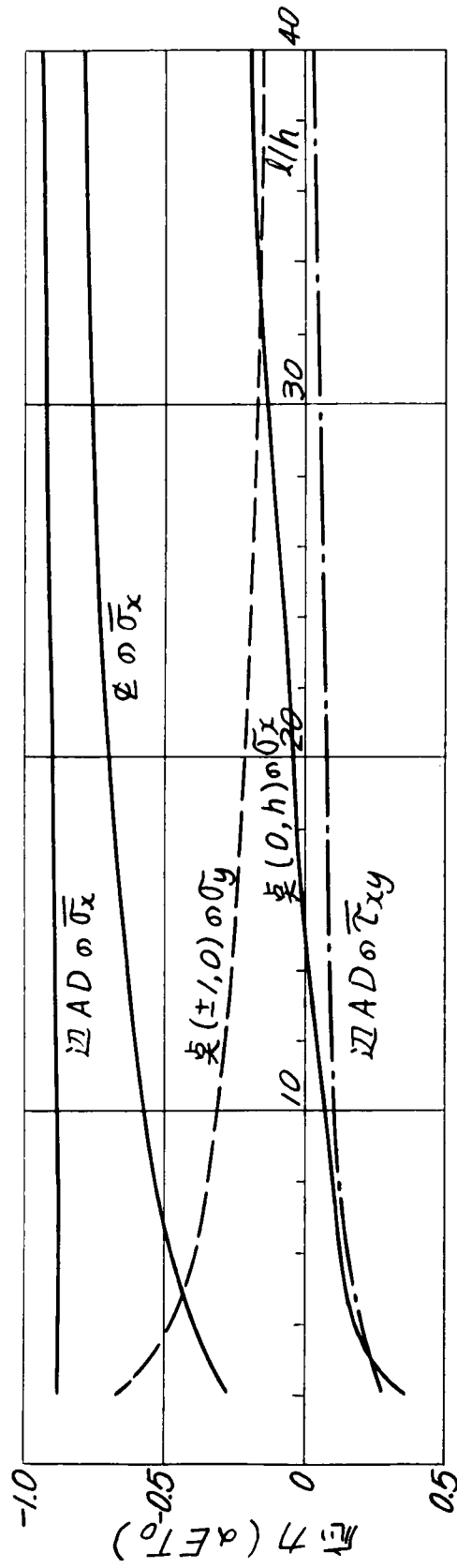
附圖 - II・9・4 l/h と応力 σ の関係 ($\nu=0, T=T_0=-1, \nu=0.3$)



l/h	2	3	4	8	32
$\sigma_{AD} \sigma_x$	-0.851	-0.852	-0.857	-0.877	-0.894
$\sigma_{AD} \sigma_{xy}$	0.359	0.359	0.347	0.242	0.066
σ の σ_x	-0.359	-0.538	-0.694	-0.968	-1.05

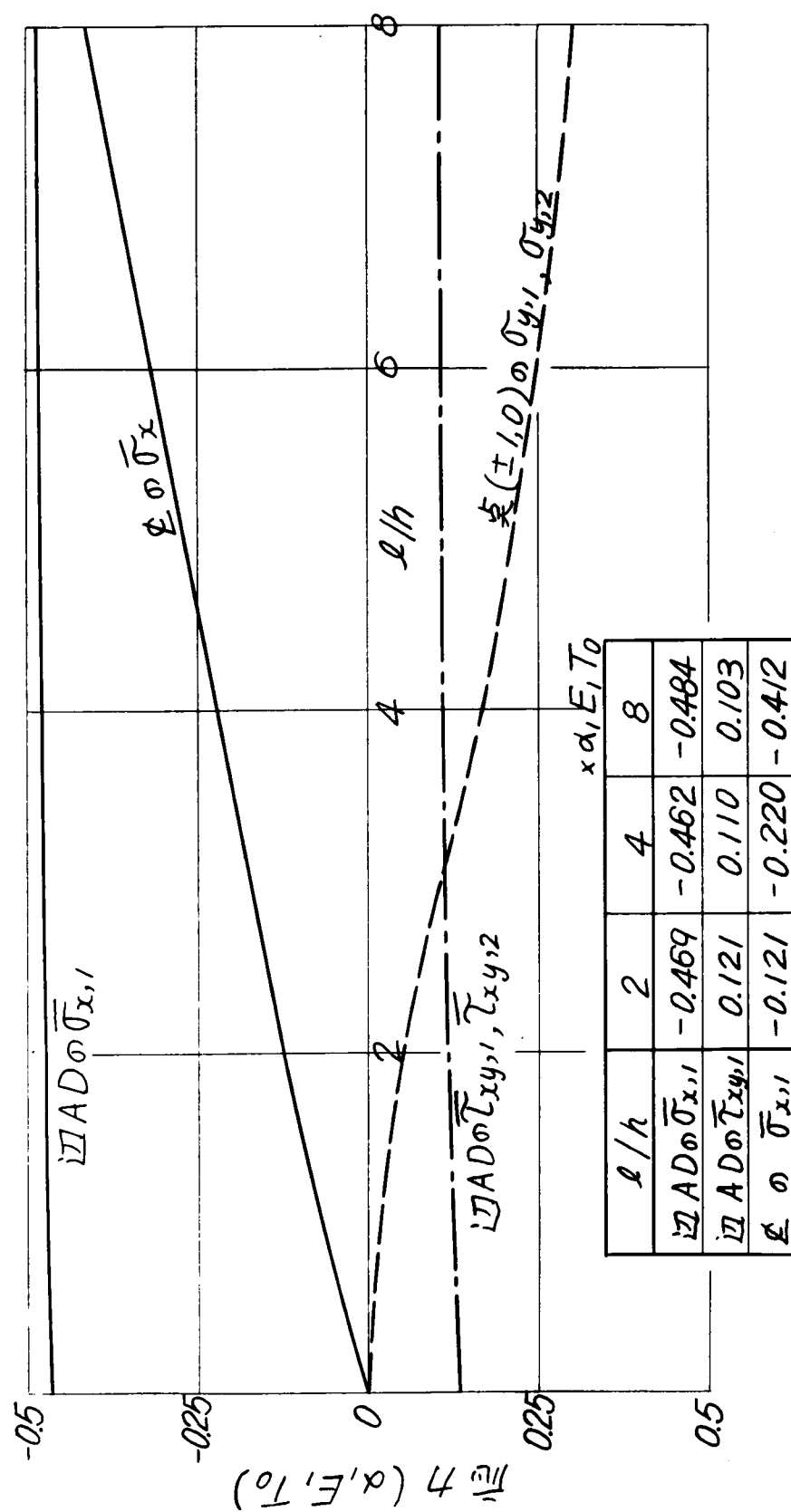
$\times \alpha E T_0$

附図 - II-9.5 l/h と応力との関係 ($\alpha=0, T=T_0(1-y/2h), \nu=0.3$)

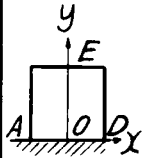
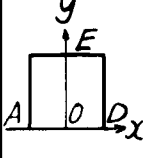
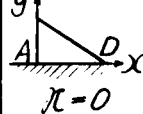
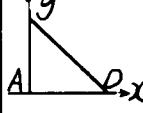
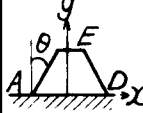


l/h	2	3	4	8	32
辺ADの $\bar{\sigma}_x$	-0.887	-0.889	-0.874	-0.871	-0.920
辺ADの $\bar{\tau}_{xy}$	0.271	0.241	0.200	0.126	0.048
点の $\bar{\sigma}_x$	-0.271	-0.351	-0.400	-0.494	-0.770

附図-II.9.6 l/h と応力との関係
 (附図-II.6.3 の場合)



附圖-Ⅱ-9.7 形と応力との関係 ($\alpha E T_0$)

条 件	l/h	$y=0$		$x=0$	点 E	点 O		点 A
		$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\sigma}_x$	σ_x	σ_x	σ_y	σ_y
 $\kappa=0$	1	-0.88	0.36	-0.16	0.07	-0.99	0.27	-1.8
	2	-0.88 (-0.85)	0.36 (0.35)	-0.35 (-0.36)	0.08 (0.09)	-0.99	0.28	-1.9
	4	-0.90 (-0.86)	0.32 (0.34)	-0.68 (-0.69)	-0.40 (-0.51)	-1.06	0.18	-1.7
	8	-0.93 (-0.89)	0.29 (0.24)	-0.96 (-0.97)	-0.88 (-0.77)	-1.15	0.07	-1.4
 $\kappa=1$	2	-0.68 ¹⁾ (-0.70)	0.17 ¹⁾ (0.21)	-0.20	0.12	-0.64	0.11	-1.7
	4	-0.69	0.14	-0.36	-0.07	-0.60	0.05	-1.6
	8	-0.72	0.14	-0.70	-0.57	-0.73	0.03	-1.4
	16	-0.80	0.10	-0.82	-0.85	-0.86	0.01	-1.3
 $\kappa=0$	1	-0.84	0.30					-1.7
	4/5	-0.85	0.32					-1.9
	2/3	-0.87	0.32					-1.9
 $\kappa=1$	7/6	-0.70	0.16					-1.8
	1	-0.67	0.16					-1.9
	5/6	-0.68	0.18					-1.8
	1/2	-0.69	0.18					-2.0
 $\kappa=0$	θ							
	30°	-0.91	0.35	-0.32	0.08 ²⁾	-1.08	0.25	-1.8 ³⁾
	45°	-0.87	0.35	-0.32		-1.01	0.23	-1.6 ³⁾
	60°	-0.92	0.31	-0.46		-1.03	0.16	-1.2 ³⁾
	75°	-1.02	0.23	-0.79		-1.05	0.16	-1.2 ³⁾

註： 括弧のない数字は光弾性実験値

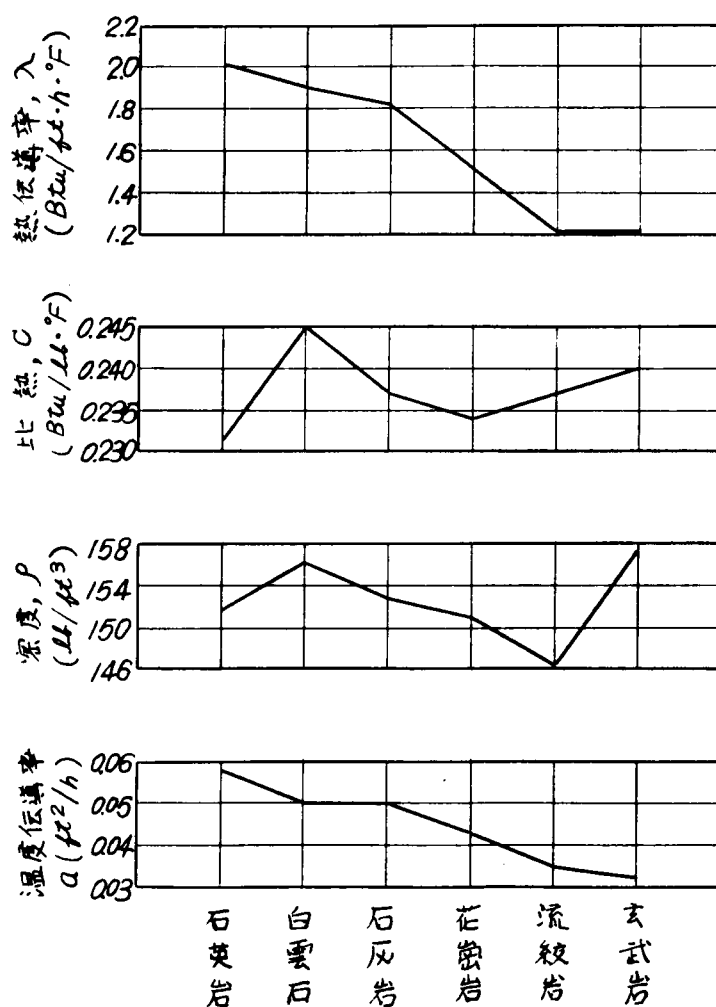
括弧のある数字は計算値

1) $h=\infty, \nu=0$ のときの値

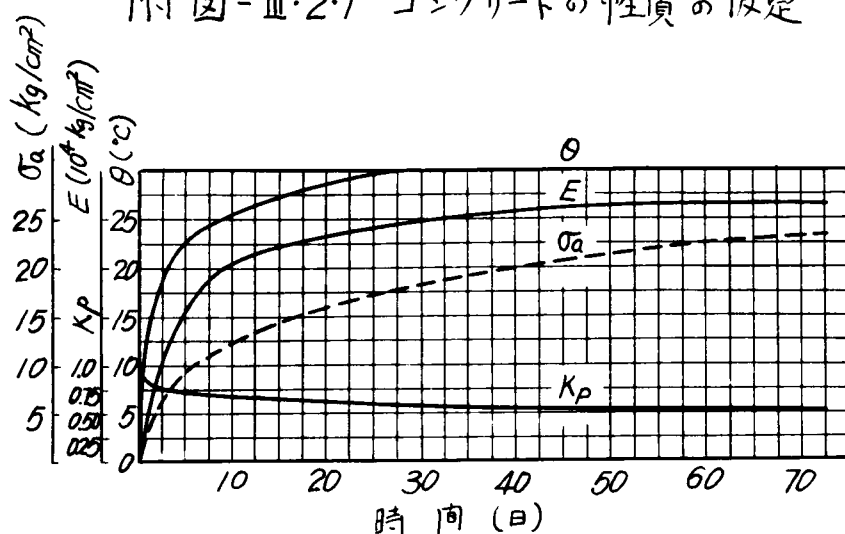
2) $l/h=2$ のとき

3) 斜面に沿う縁応力

附図-Ⅲ・1・1 岩石の種類とコンクリートの熱特性との関係



附図-Ⅲ・2・1 コンクリートの性質の仮定



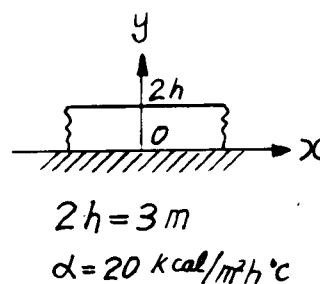
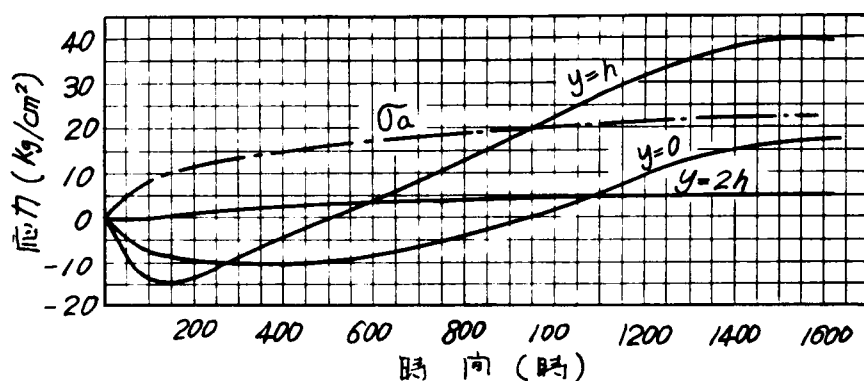
E : 弾性係数

θ : 断熱温度上昇

σ_a : 許容引張応力

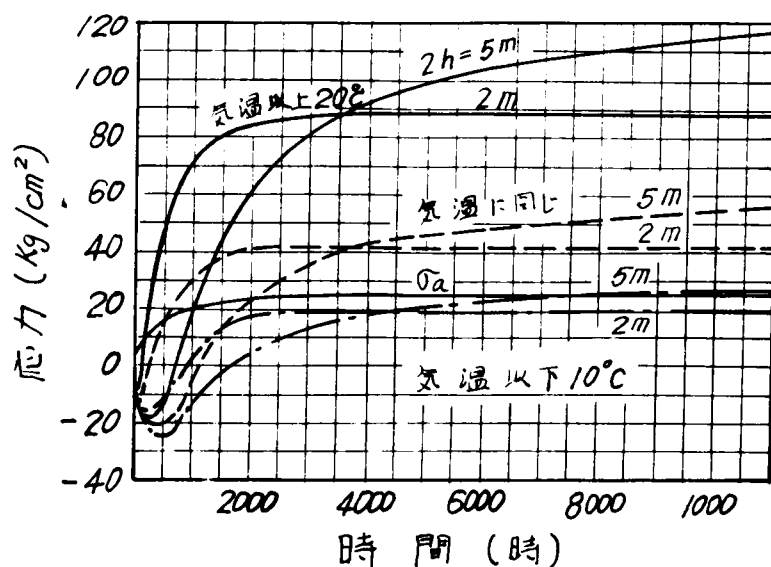
K_p : リラクゼーション係数

附図-Ⅲ・2・2 岩盤上リフトの水平直応力経過

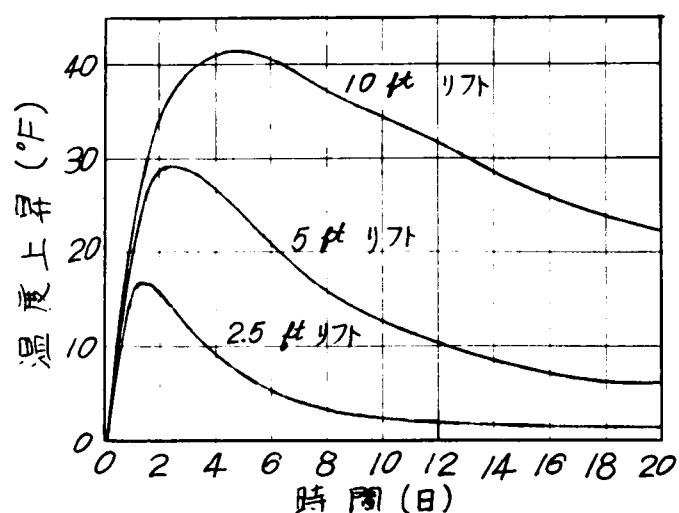


附図-Ⅲ・2・3 高さと打設温度の影響

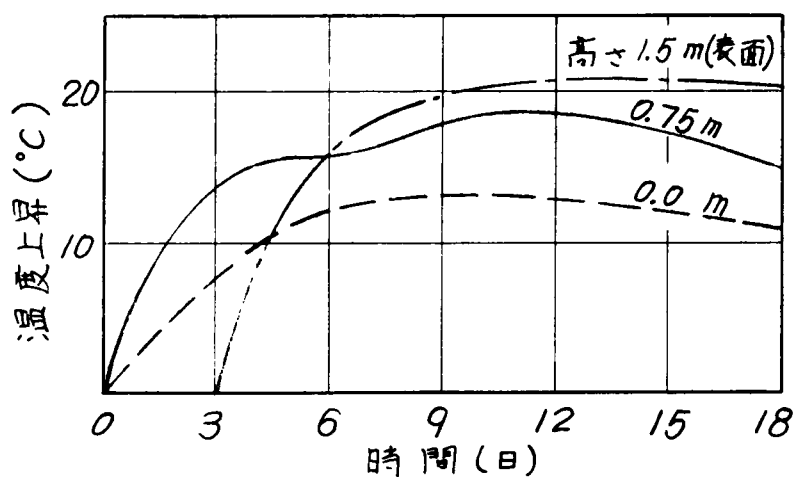
(リフト高の1/2点の水平直応力)



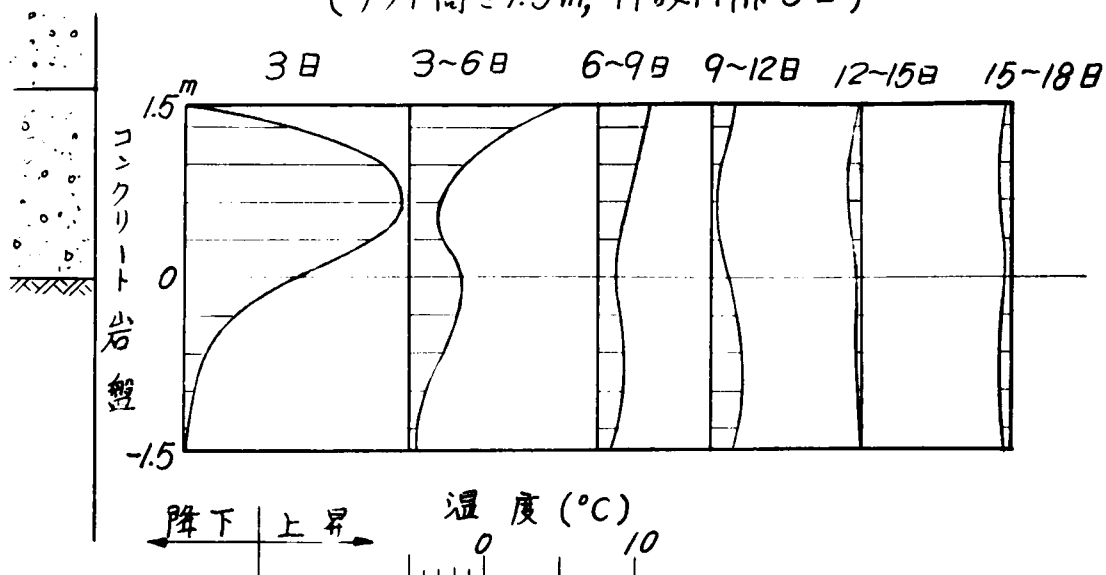
附図-Ⅲ・2・4 岩盤直上リフトの高さ1/2点の温度経歴



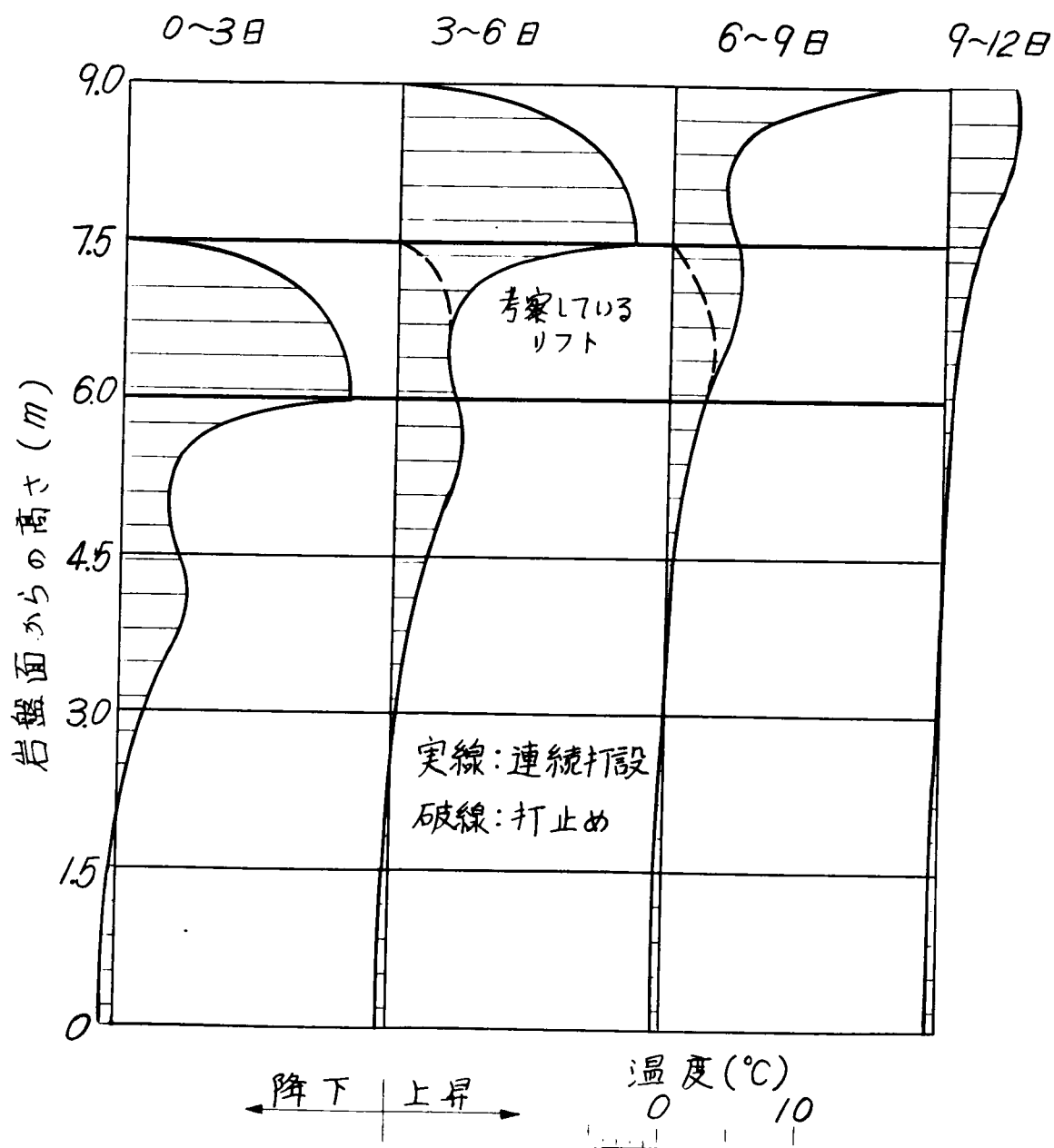
附図-Ⅲ・2・5 岩盤直上リフトの温度経歴
(リフト高さ1.5m, 打設間隔3日)



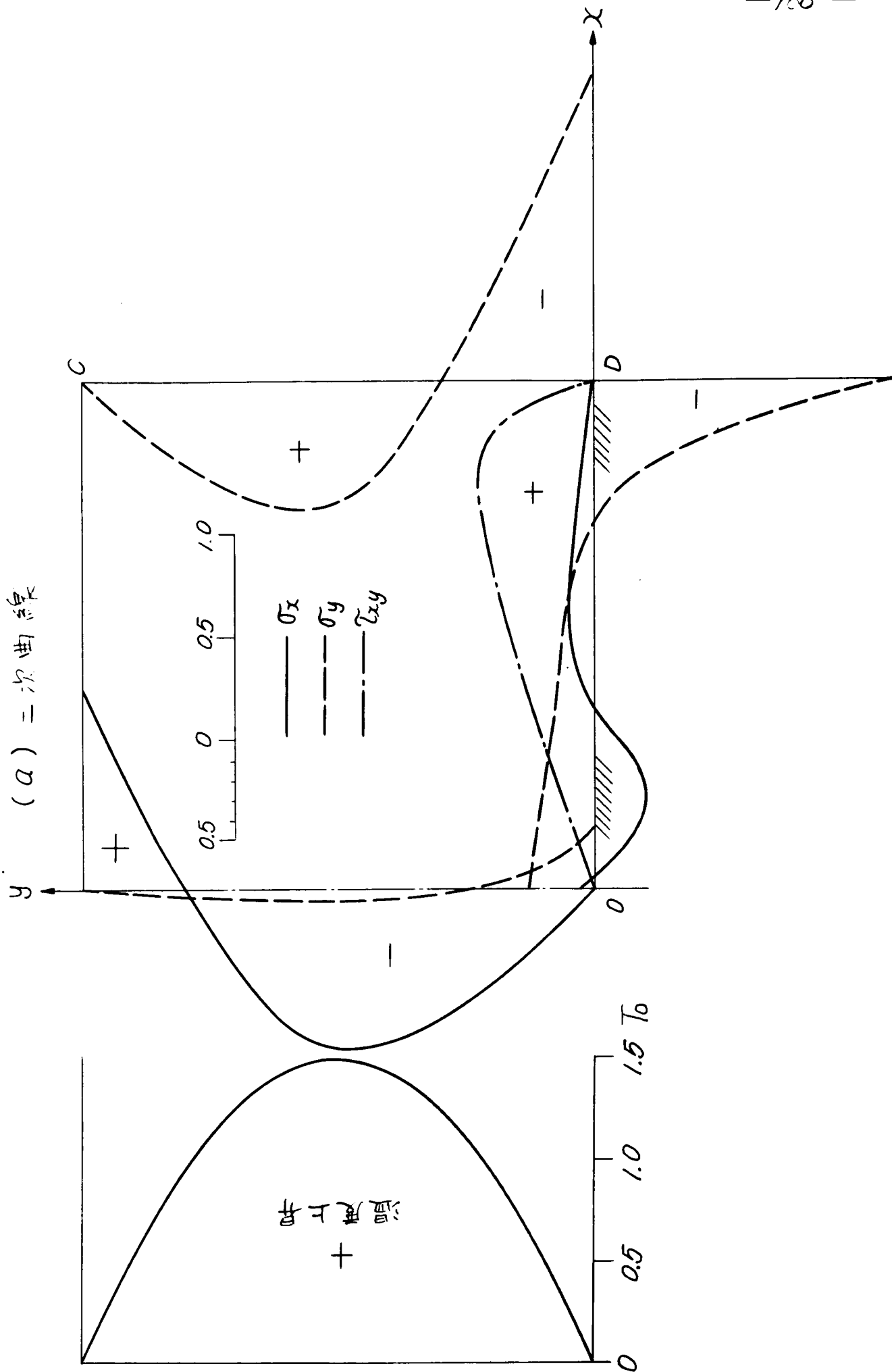
附図-Ⅲ・2・6 岩盤直上リフトの温度差
(リフト高さ1.5m, 打設間隔3日)



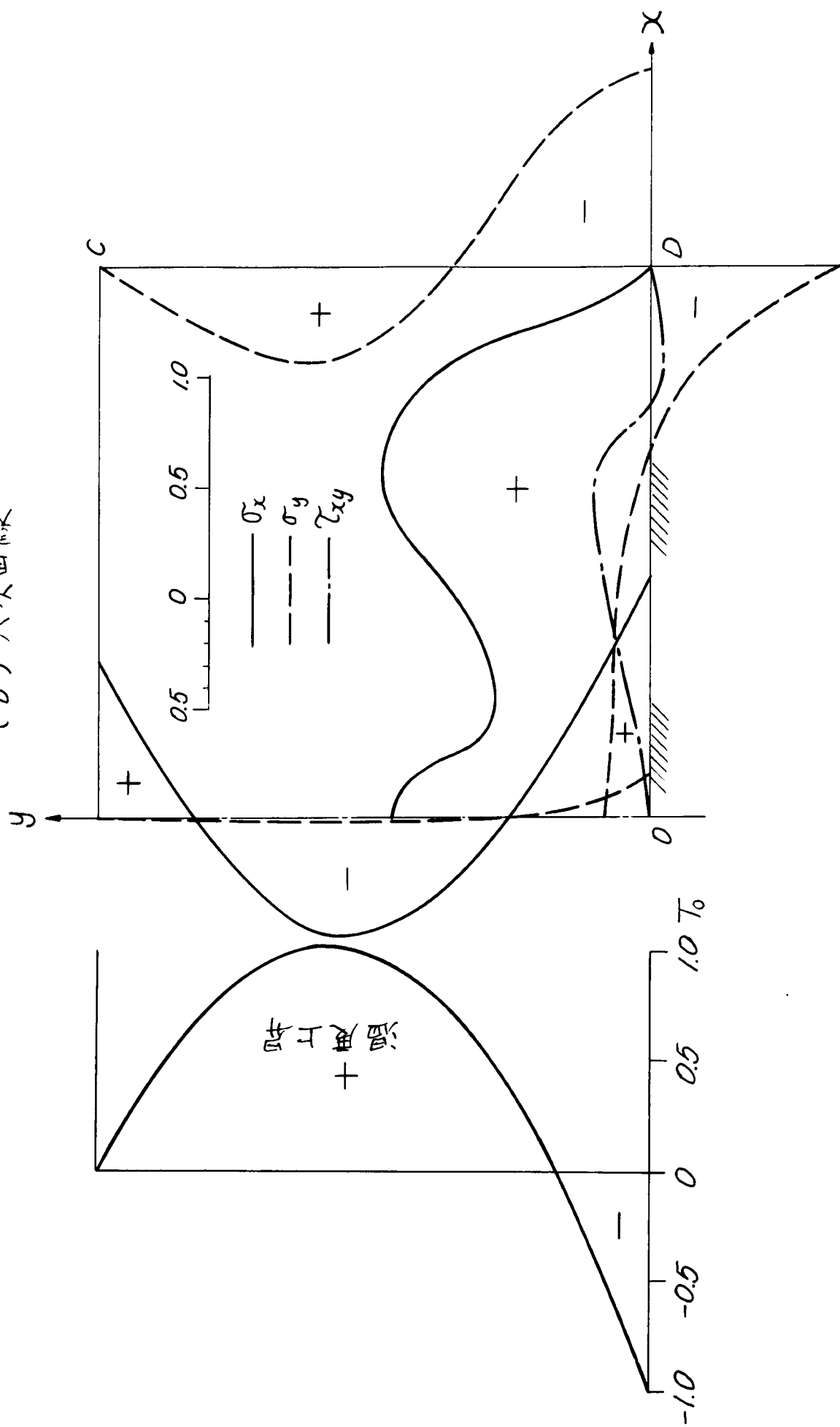
附図-Ⅲ・2・7 旧コンクリート上リフトの温度差
(リフト高さ1.5m, 打設間隔3日)



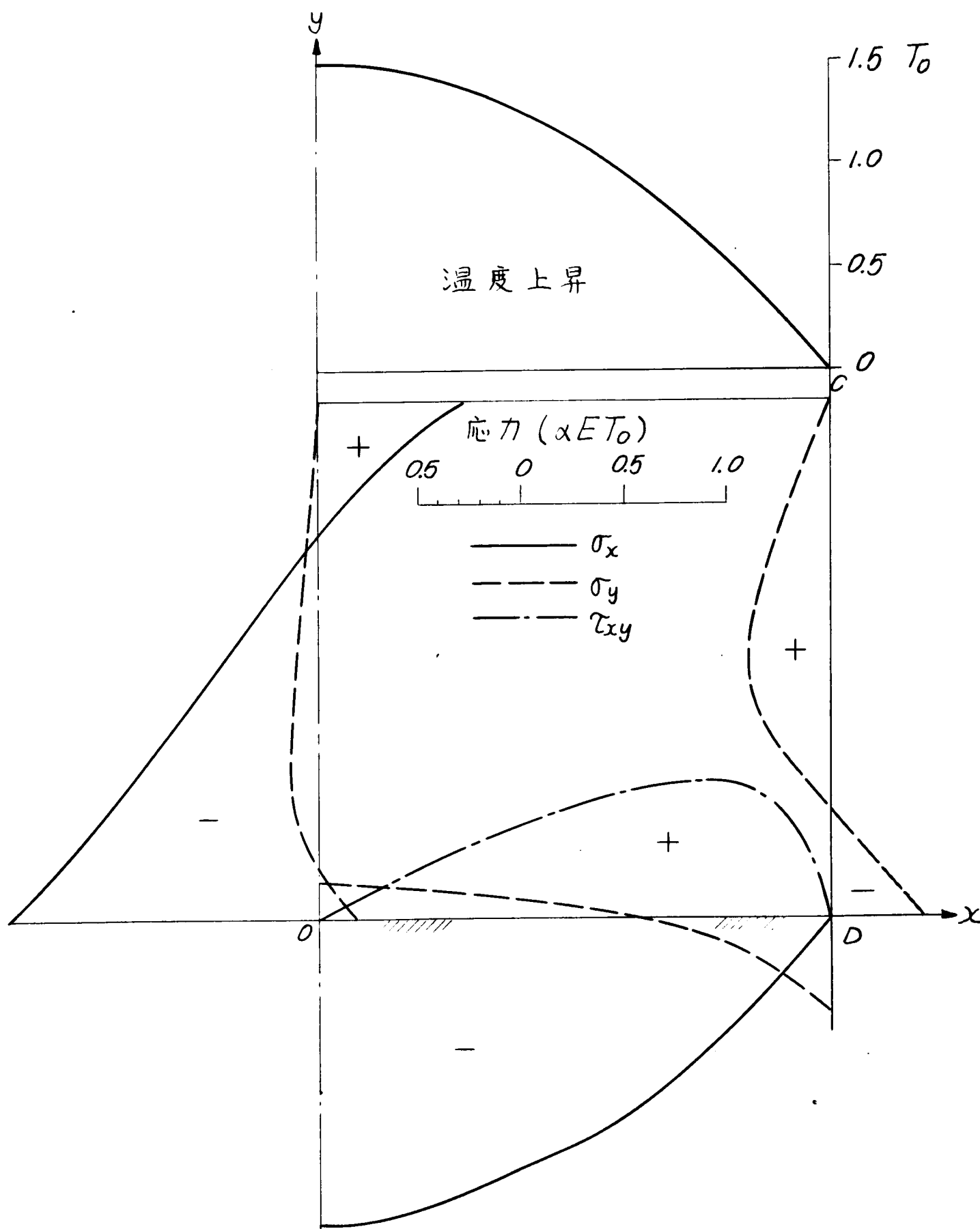
附図-Ⅲ・2・8 ブロック鉛直断面の温度変化と応力
 (a) 二次曲線



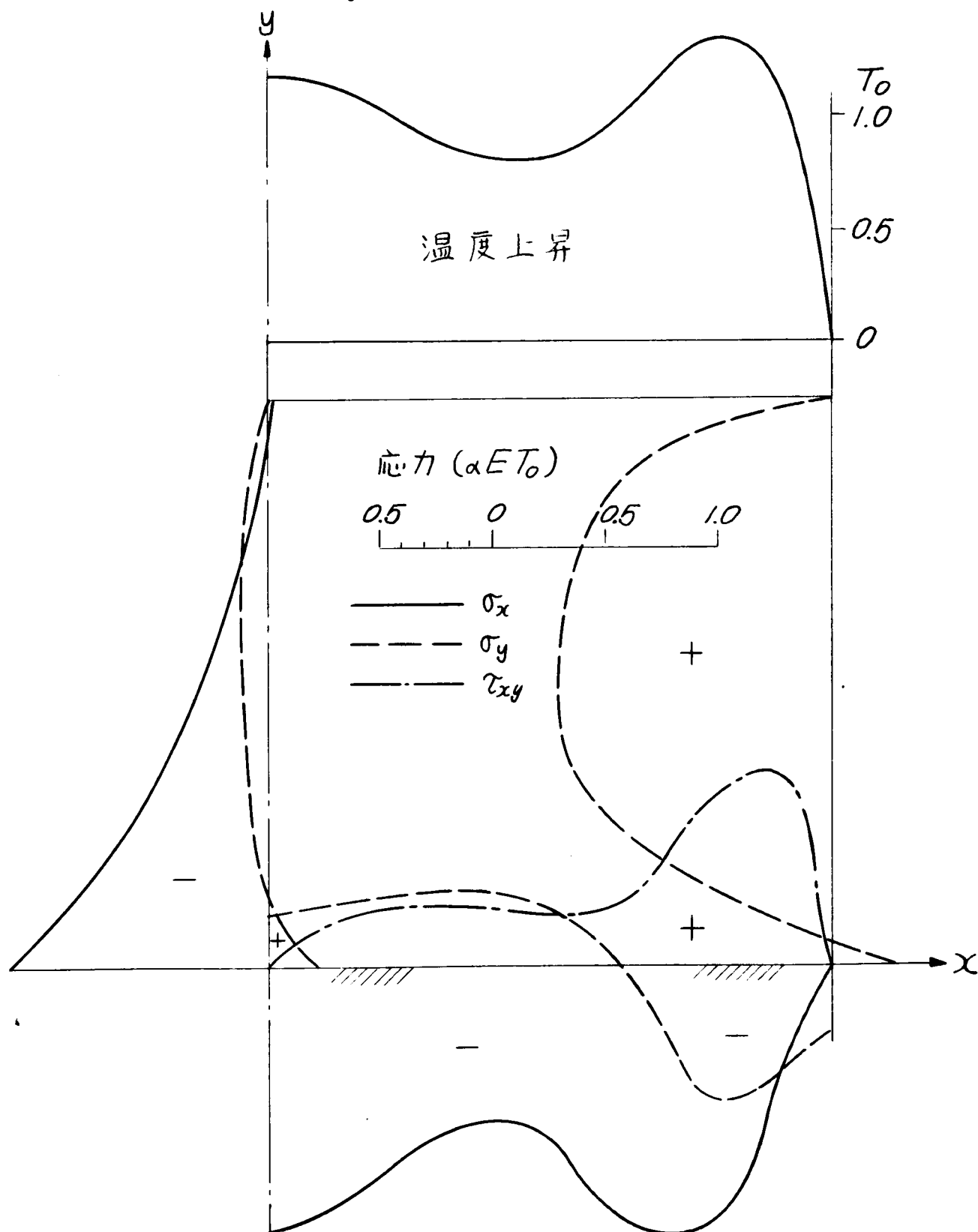
附圖-III·2·8
(b) 六次曲線



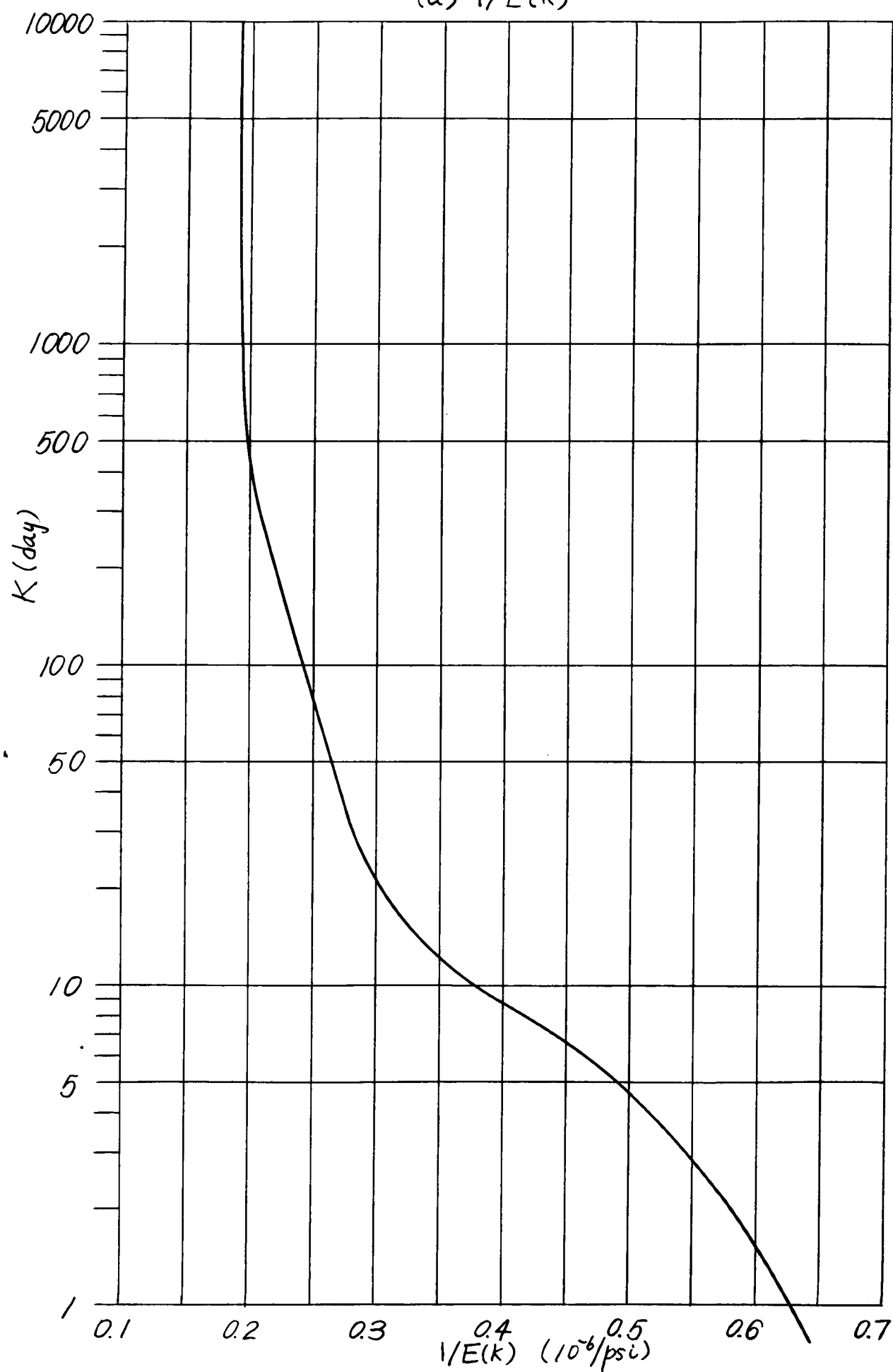
附図-Ⅲ・2・9 ブロック水平断面の温度変化と応力
(a) 二次曲線



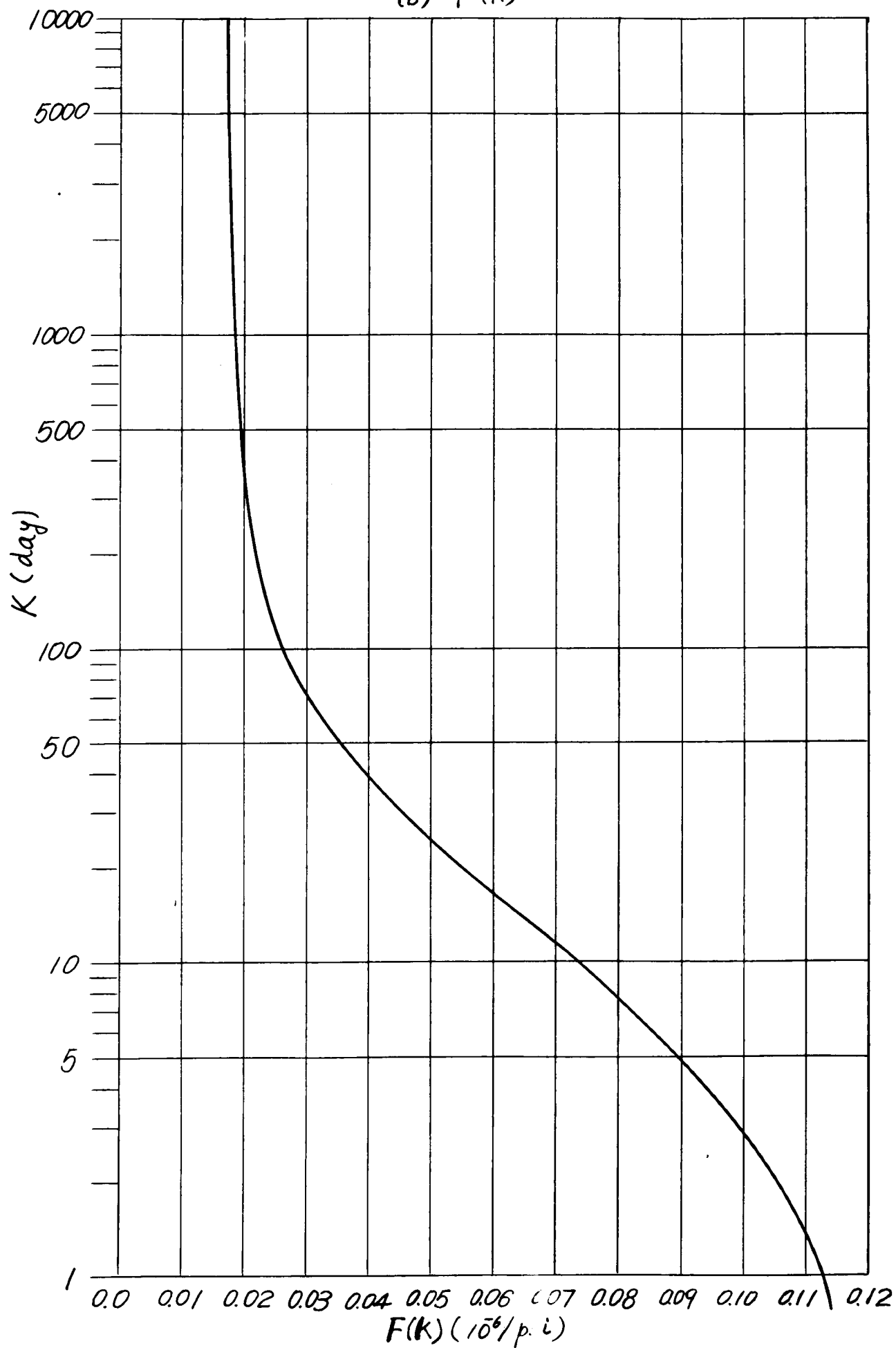
附圖-III·2·9
(b) 六次曲線



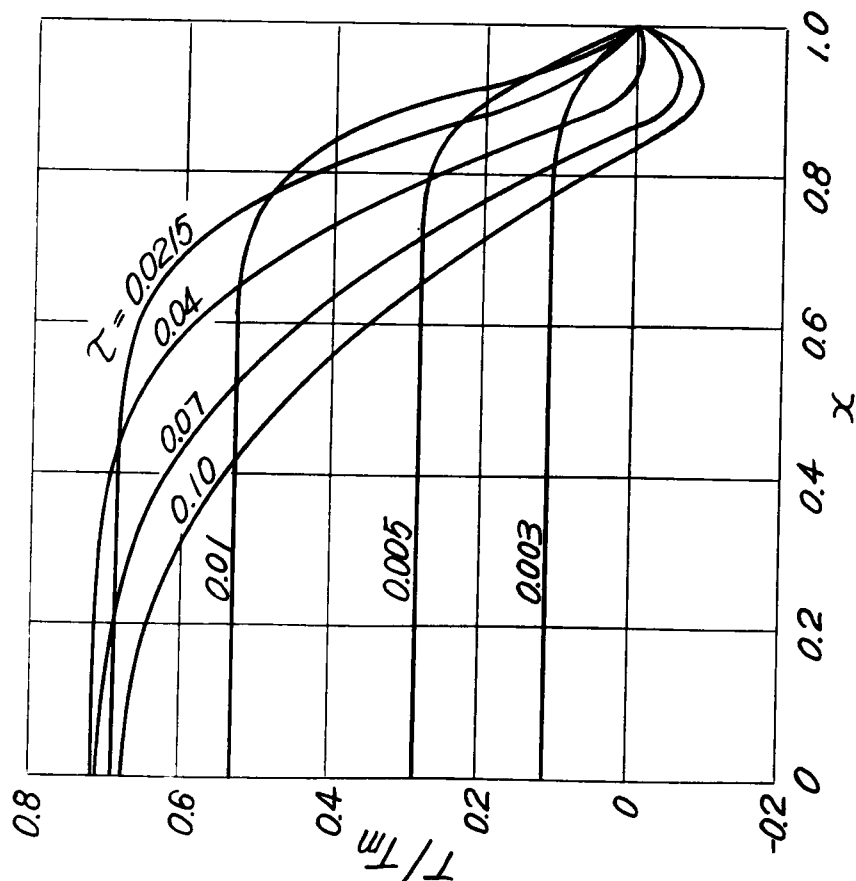
附図-Ⅲ・2・10 Grand Coulee ダムのコンクリート
(a) $1/E(K)$



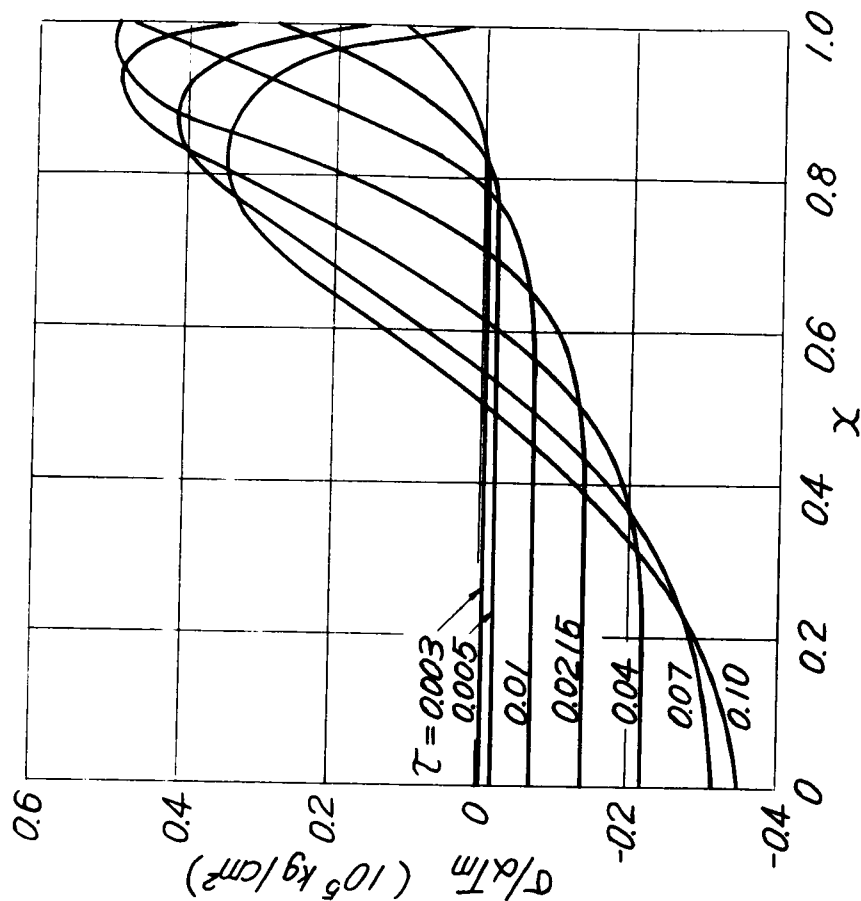
附図-Ⅲ・2・10 Grand Coulee ダムコンクリート
(b) $F(K)$



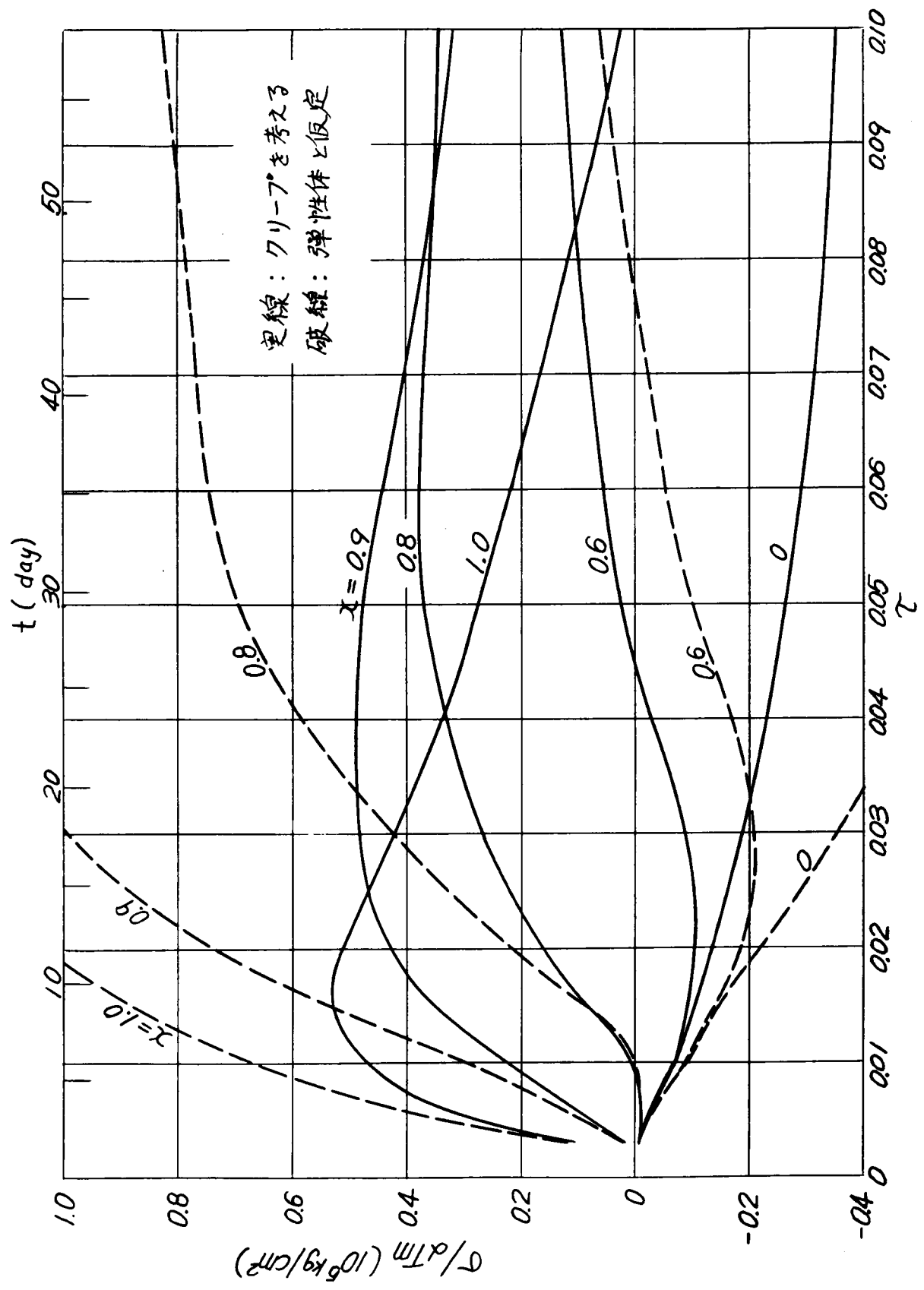
附図-Ⅲ・2・11 $\tau=0.002$ よりの温度変化
(型わく用いなきとき)



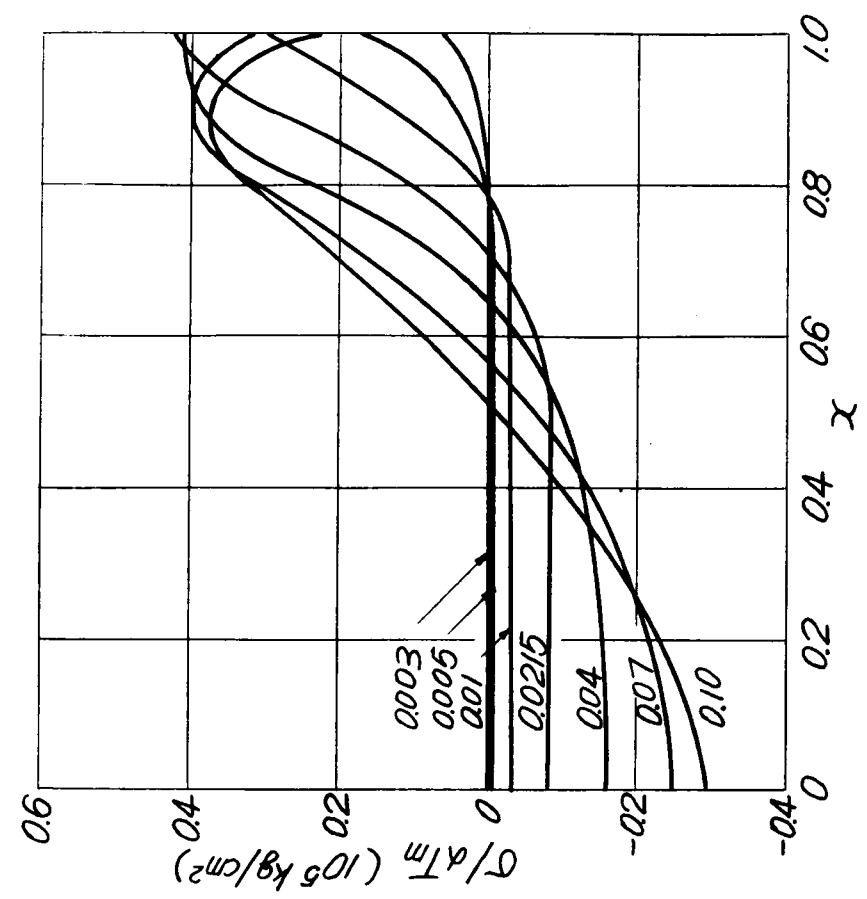
附図-Ⅲ・2・12 水平直応力の分布
(型わく用いなきとき)



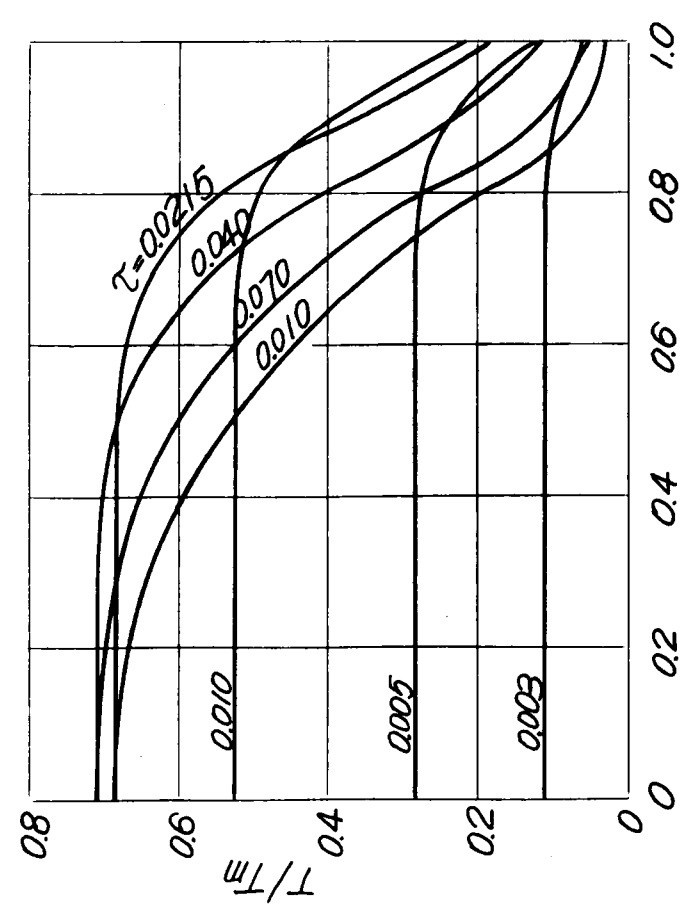
附図-Ⅲ・2・13 水平直応力の経過 (型わく用いなきとき)



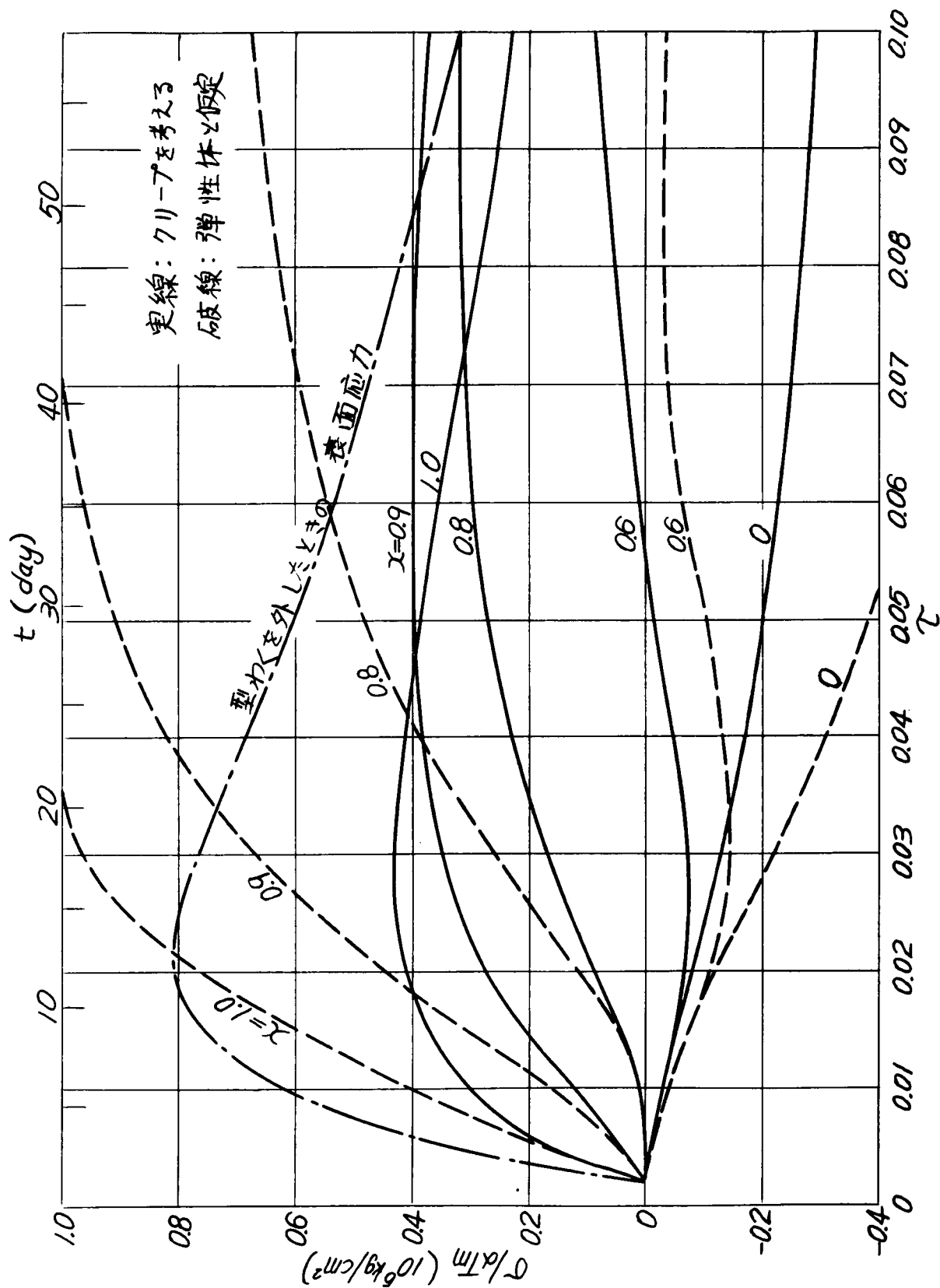
附図-Ⅲ・2・15 水平直応力の分布
(型わく用いるとき)



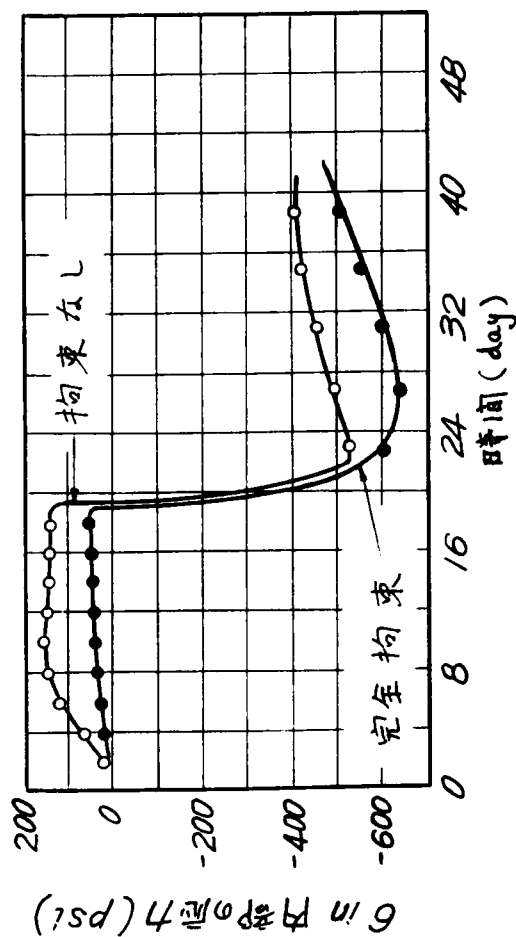
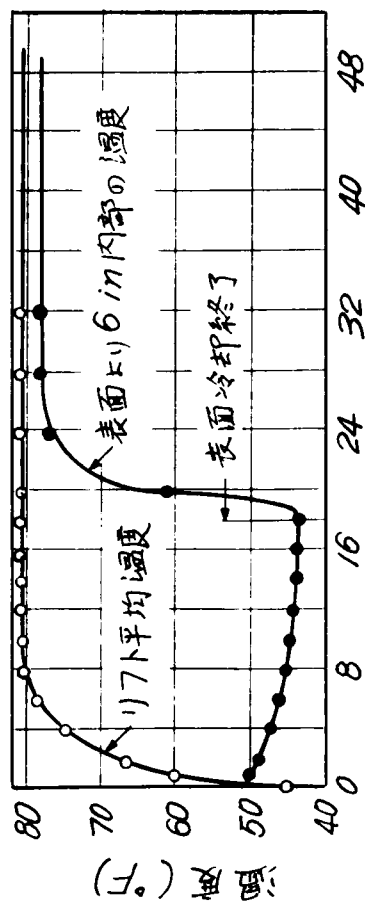
附図-Ⅲ・2・14 $\gamma=0.002$ よりの温度変化
(型わく用いるとき)



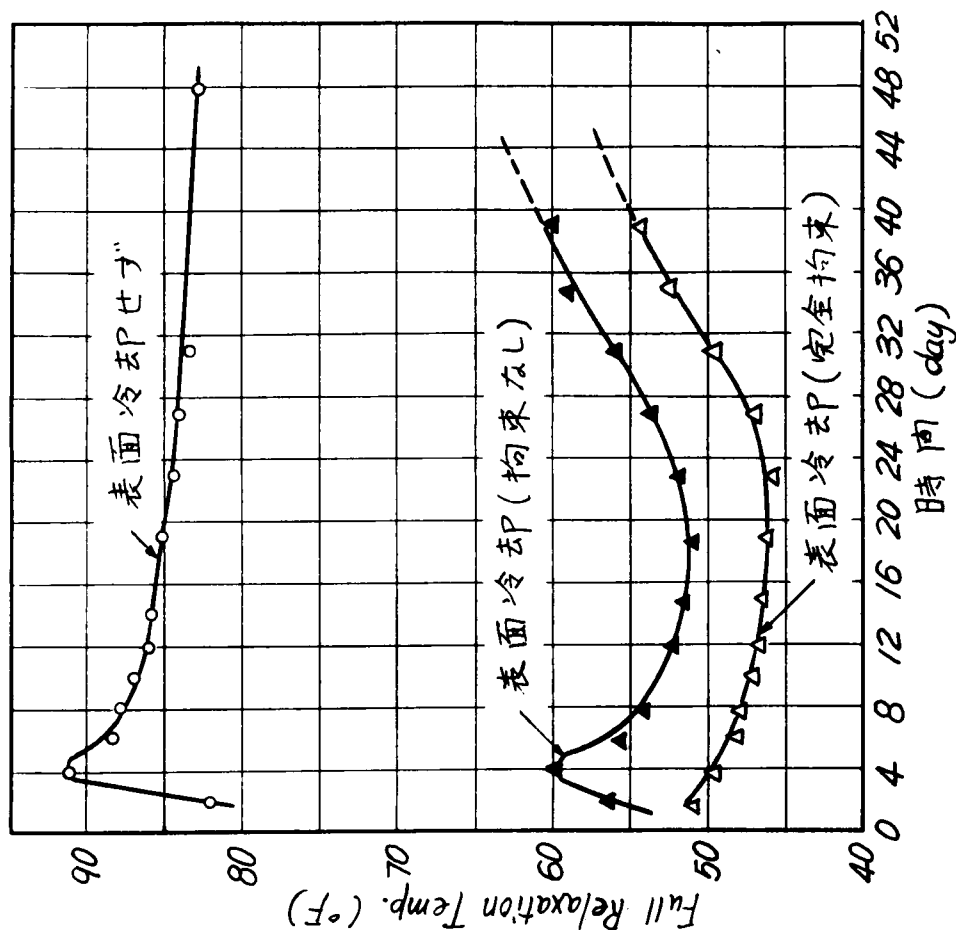
附図-III・2・16 水平直応力の経過 (型わく用いるとき)



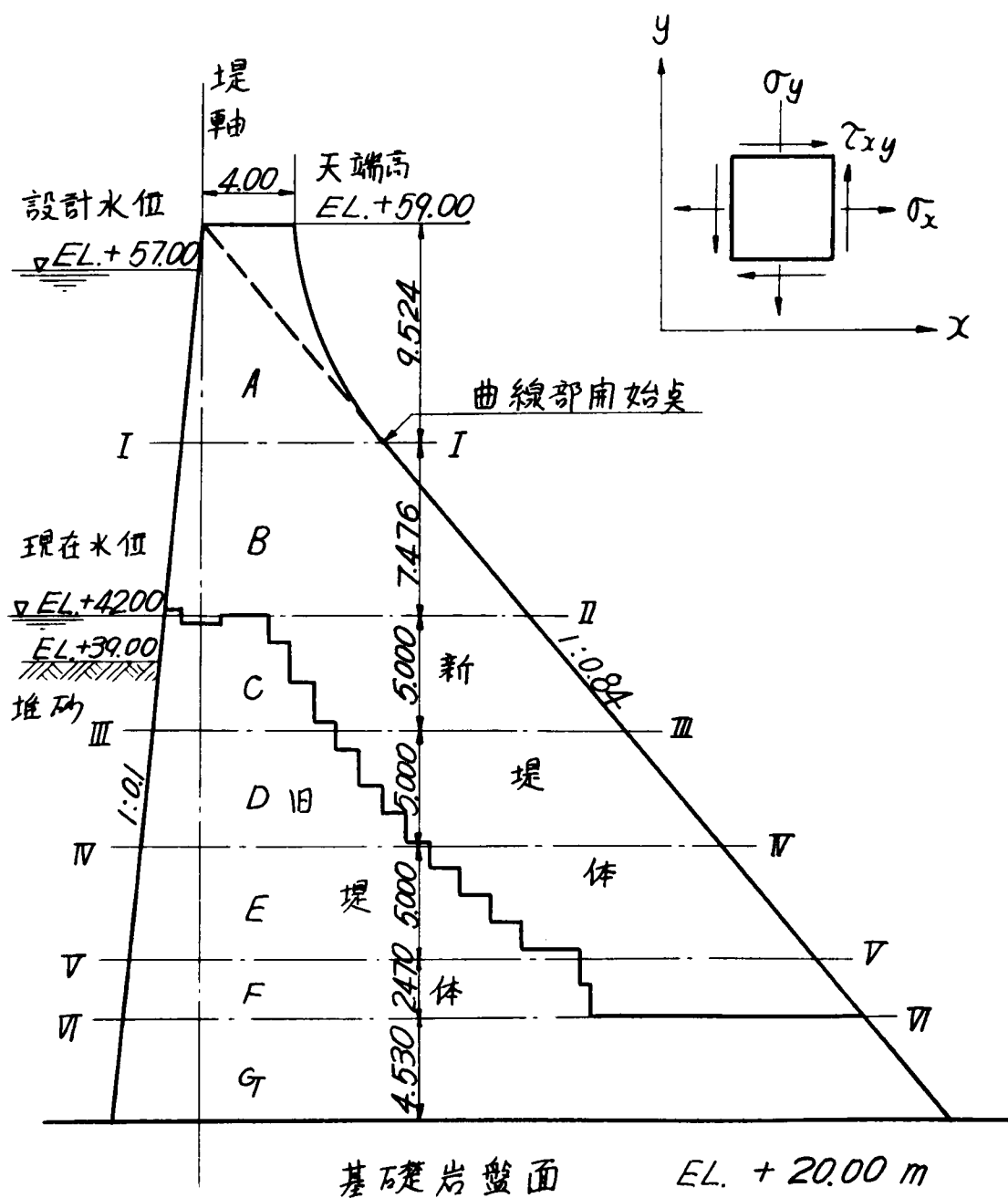
附図-Ⅲ-2.17 表面冷却法による温度と応力



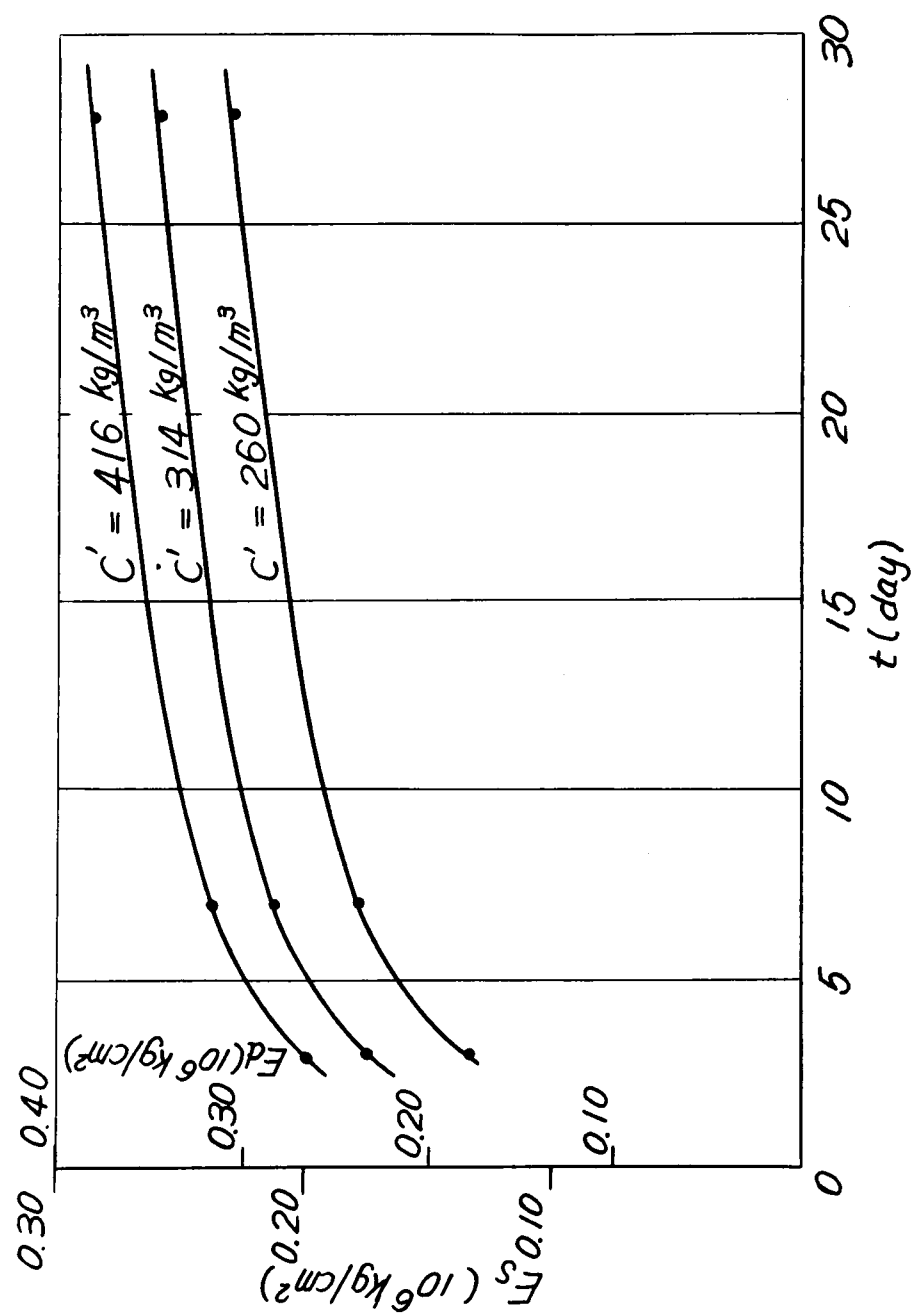
附図-Ⅲ-2.18 Full Relaxation Temperature の比較



附圖-III.3.1 梅山ダム横断面

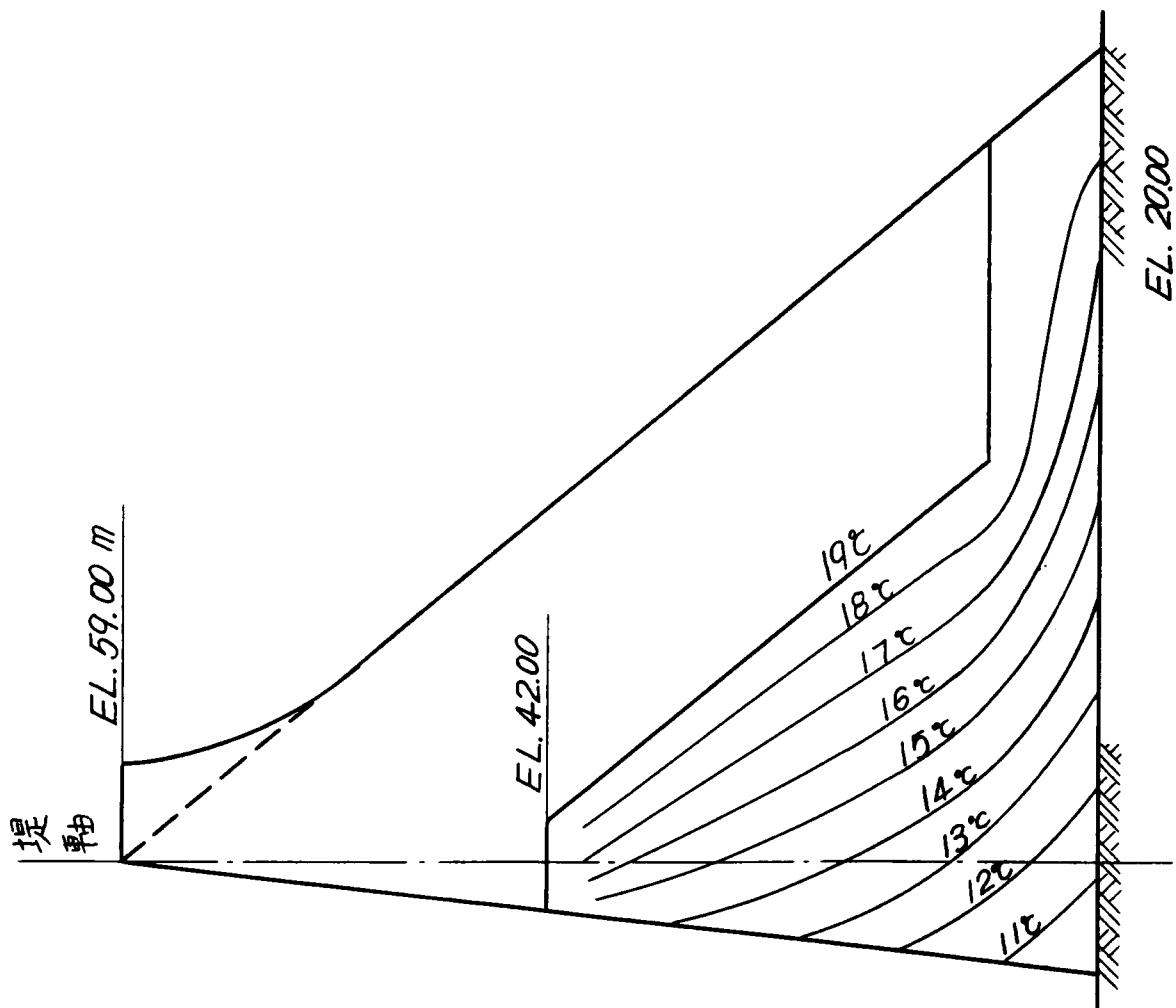


附図-Ⅲ・3・2 コンクリート供試体の弾性係数

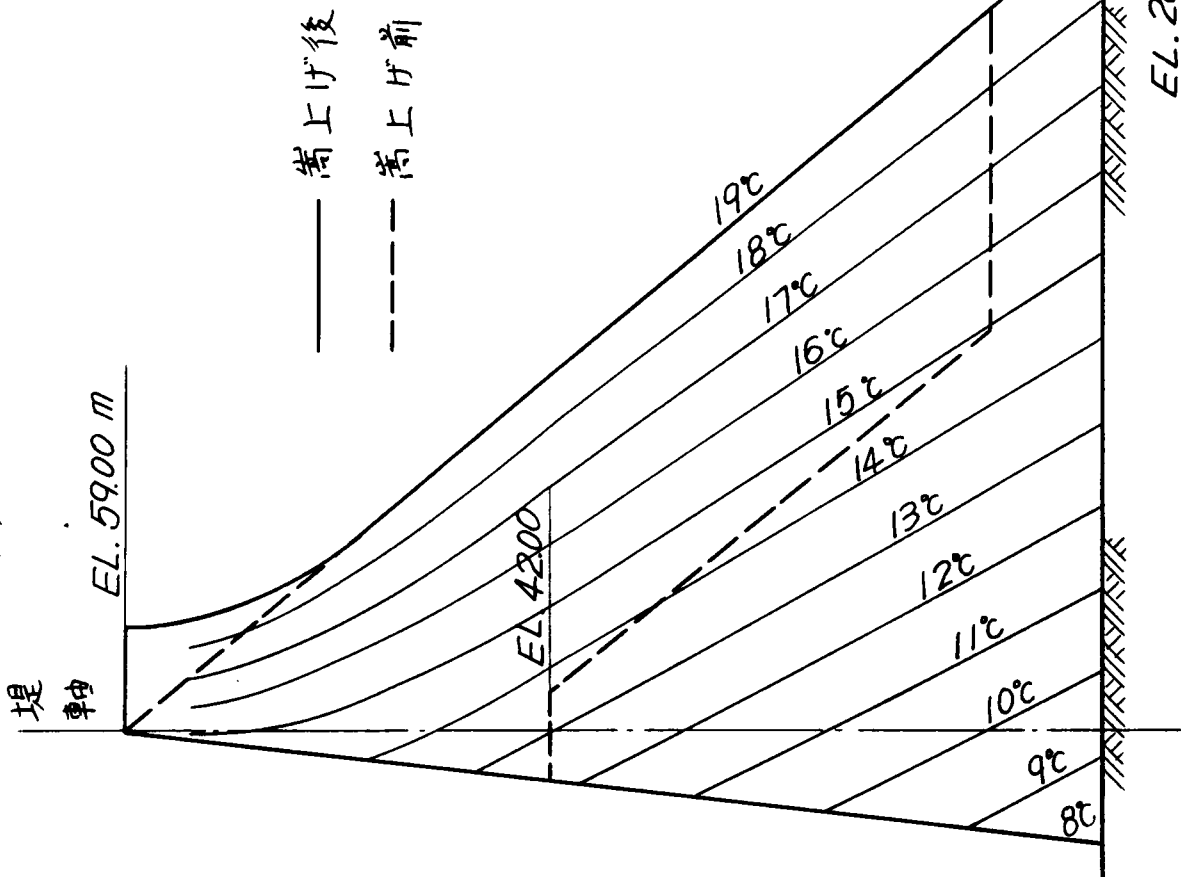


附圖-Ⅲ-3.3 最終安定溫度

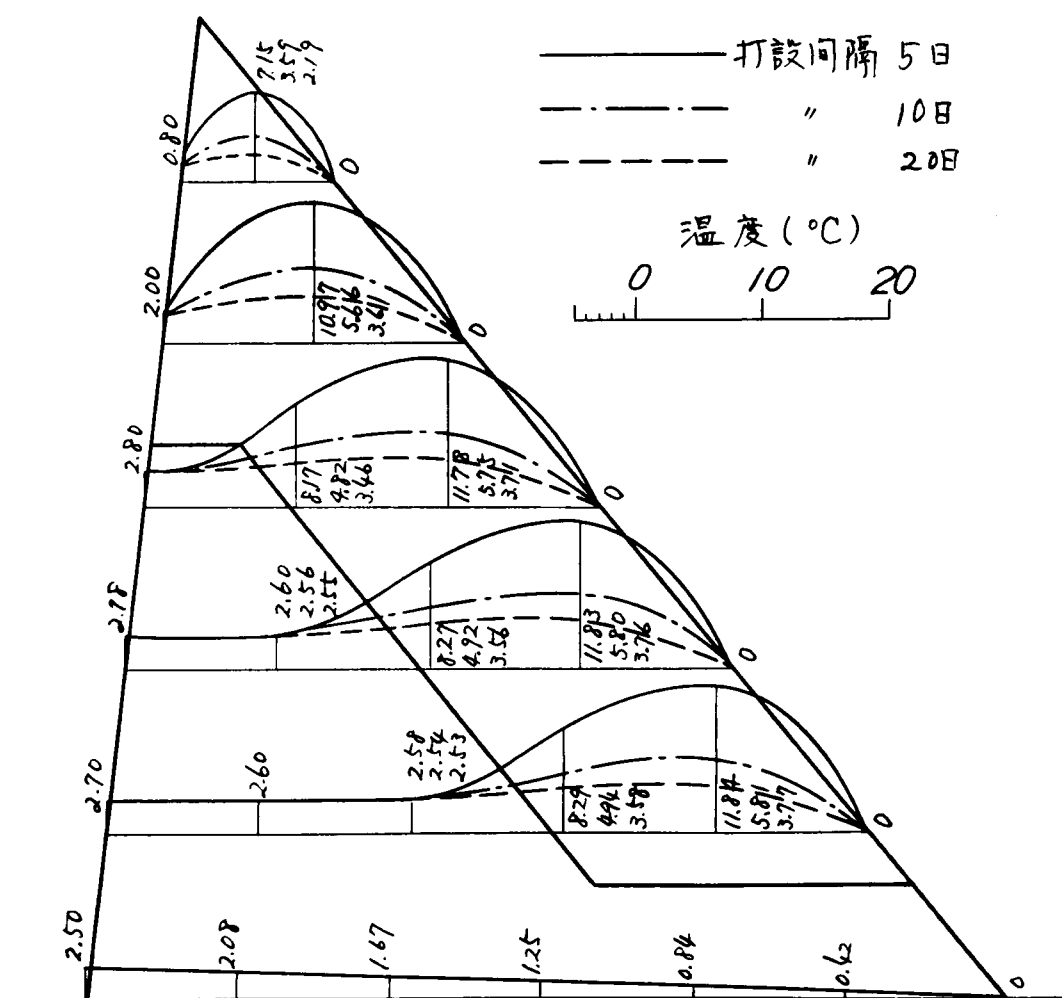
(a)



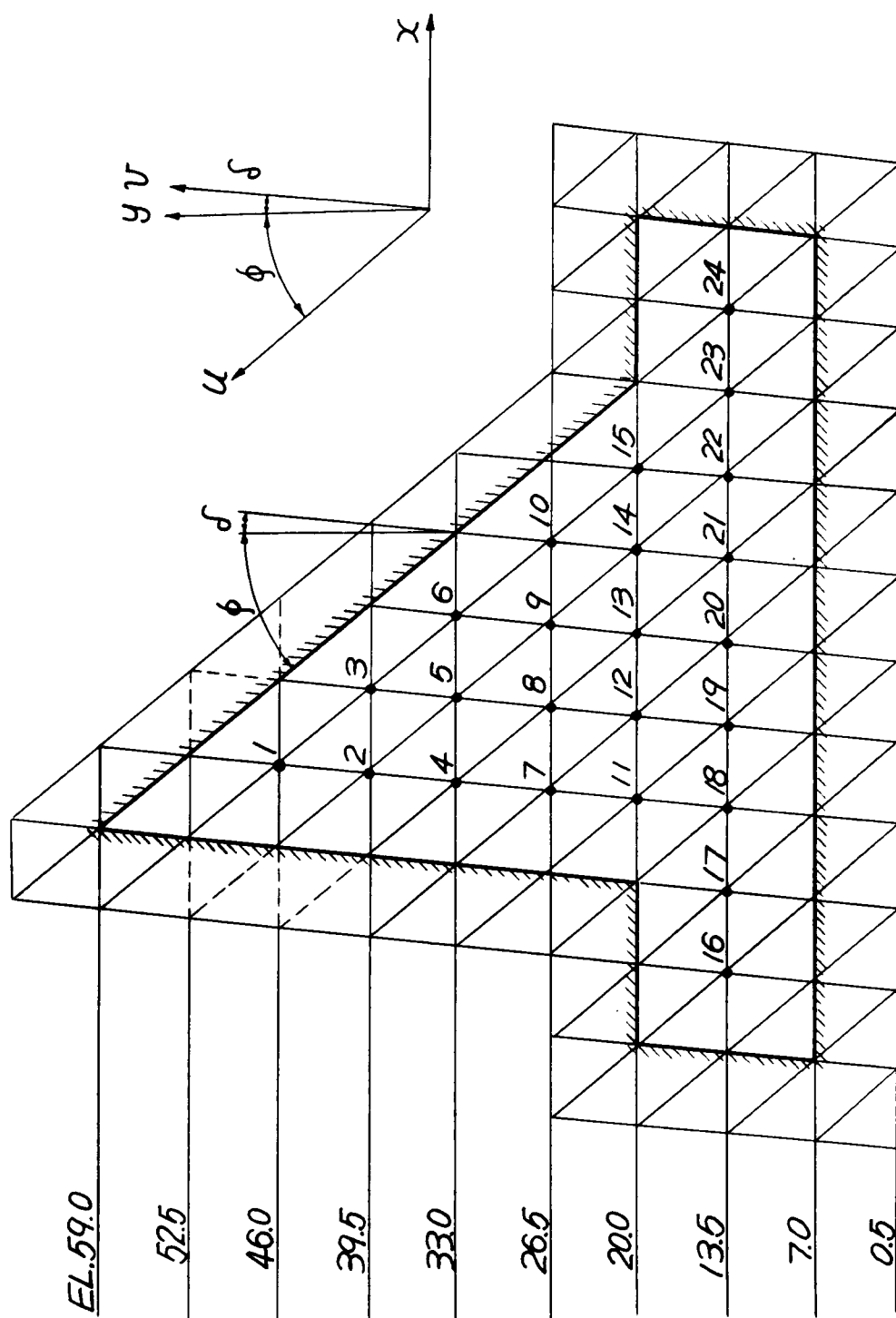
(b)



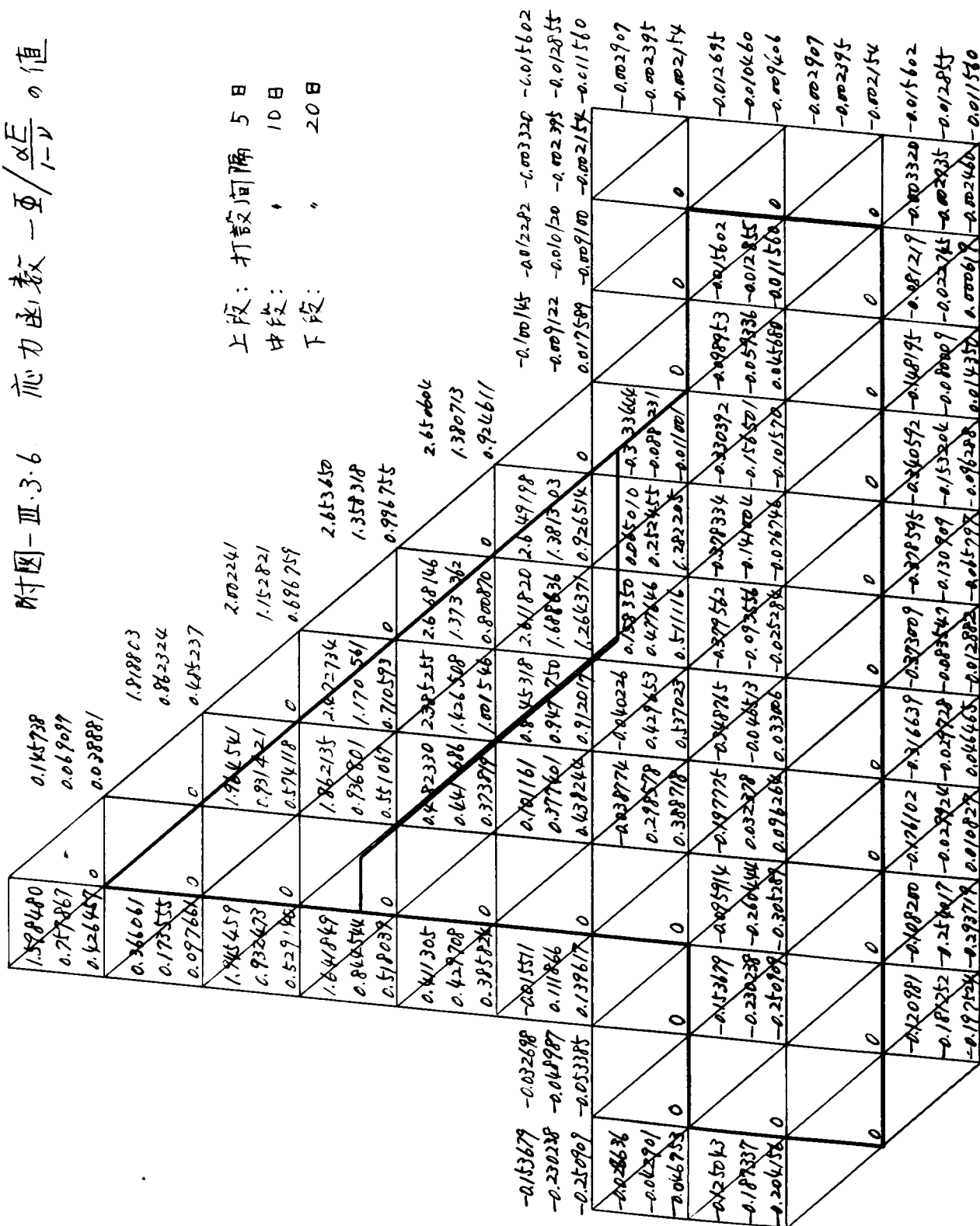
附圖-III-3.4. 格真最終溫度降下



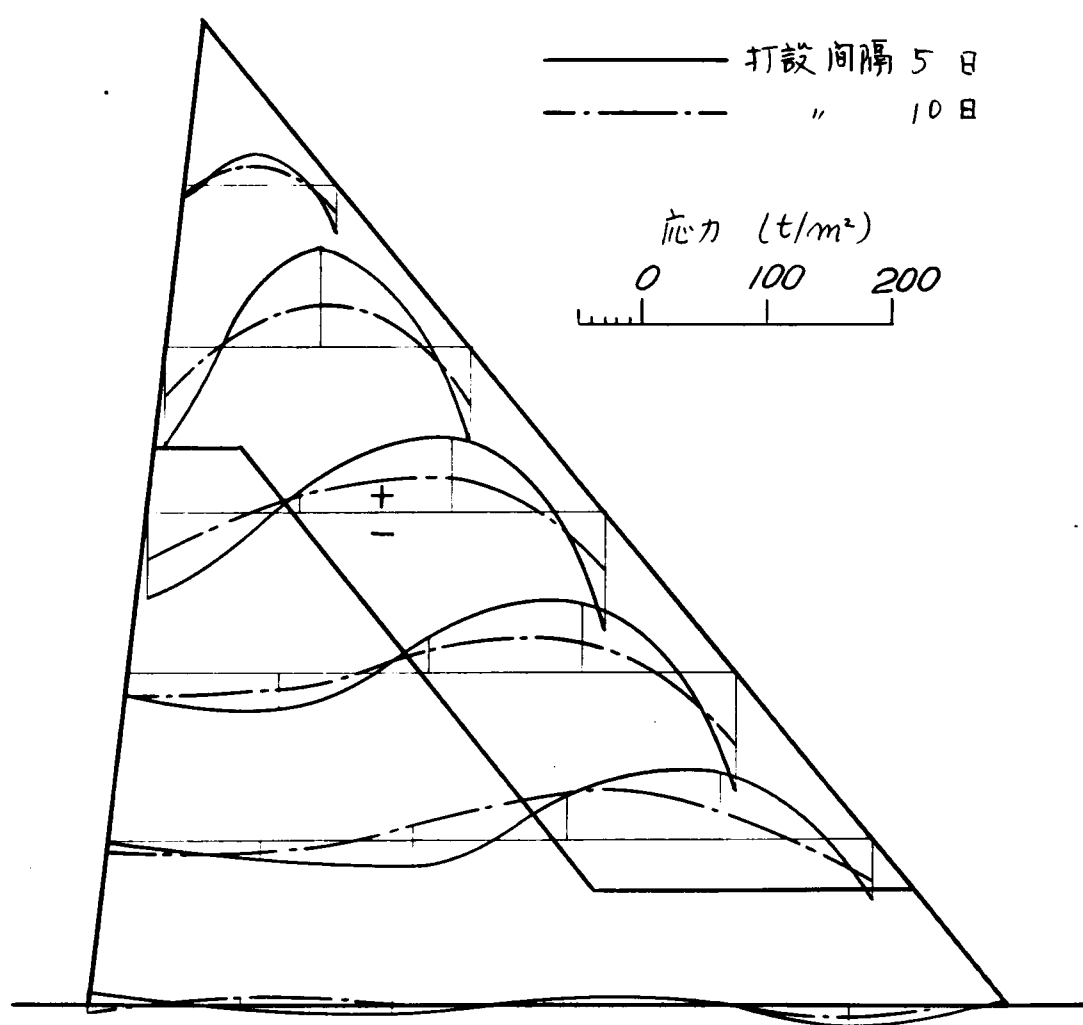
附图-Ⅲ-3.5 使用1た三角形格子



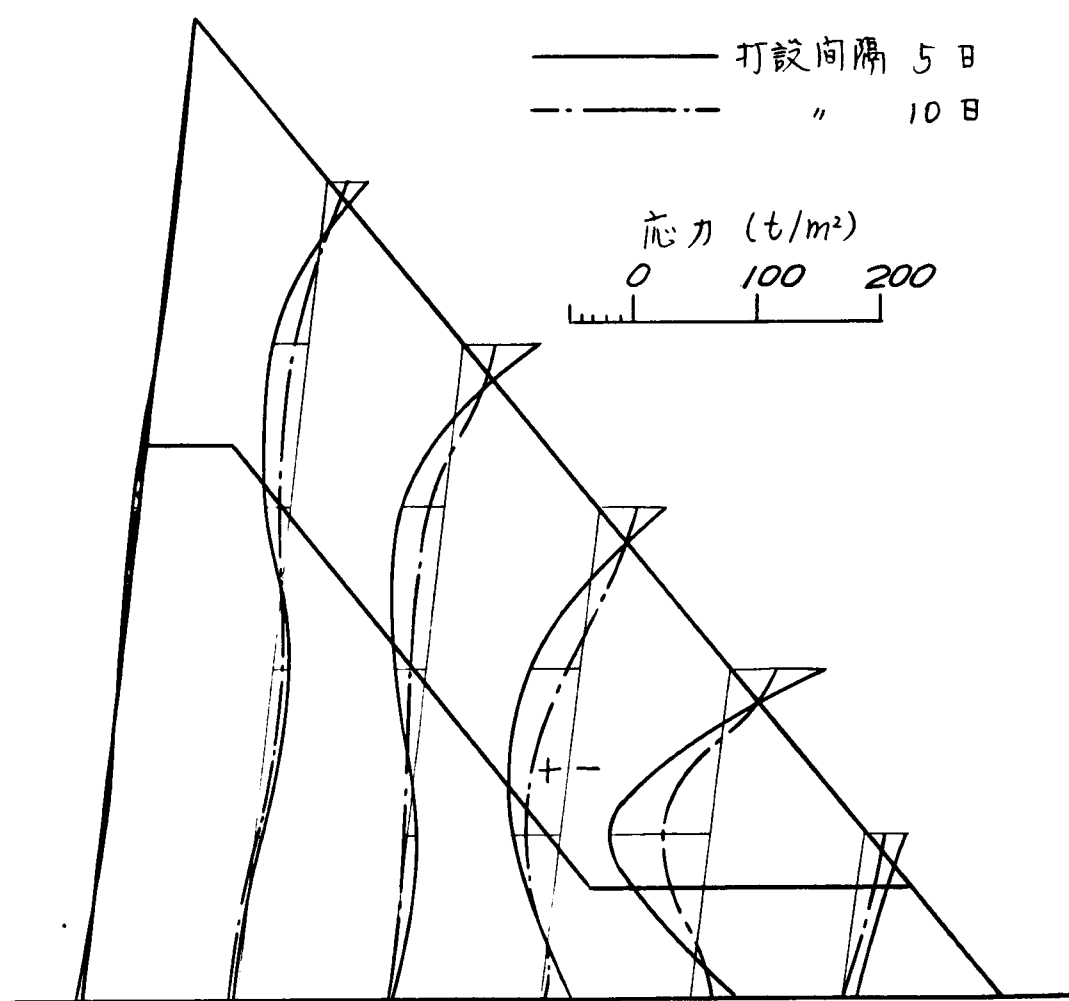
附圖-Ⅲ-3.6 应力函数 Φ 的 $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ 值



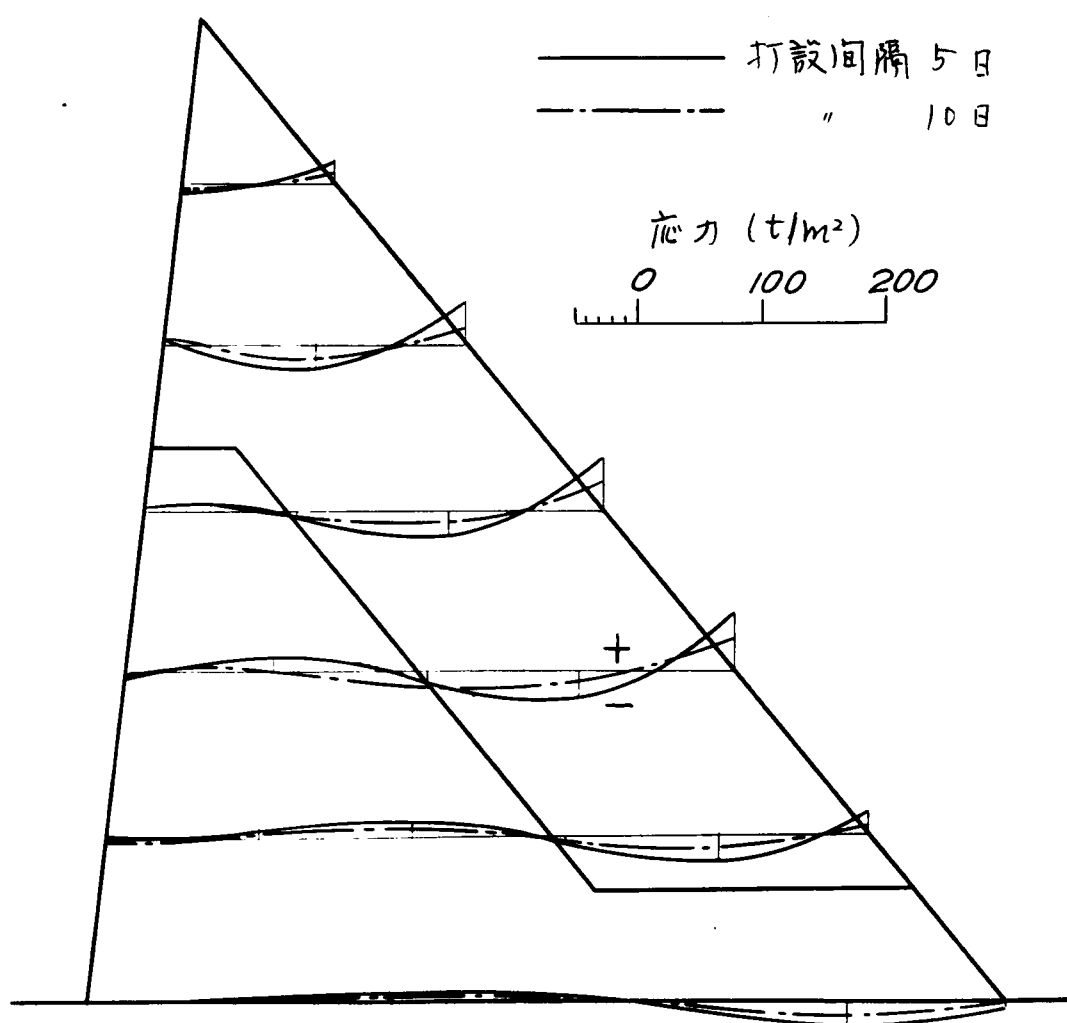
附圖-Ⅲ·3·7 鉛直直応力 σ_y



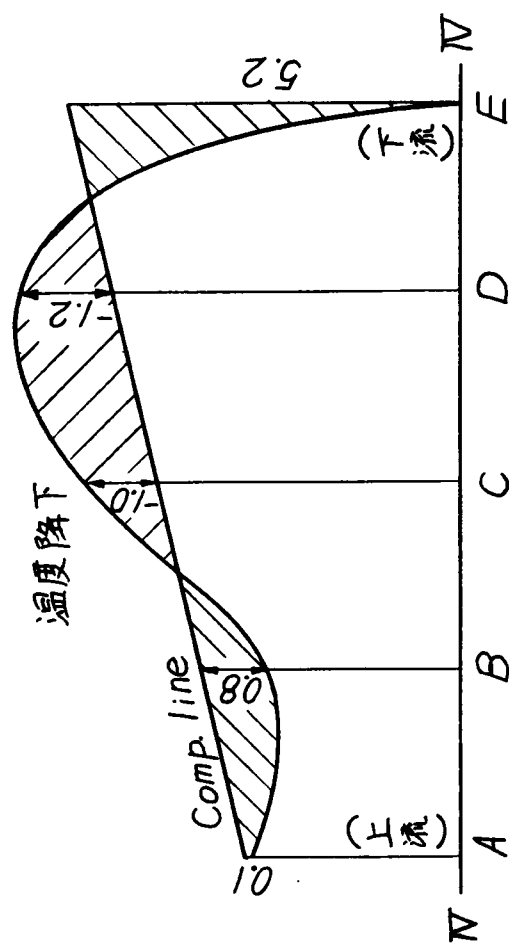
附圖-Ⅲ·3·8 水平直応力 σ_x



附圖-Ⅲ.3.9 剪断応力 τ_{xy}

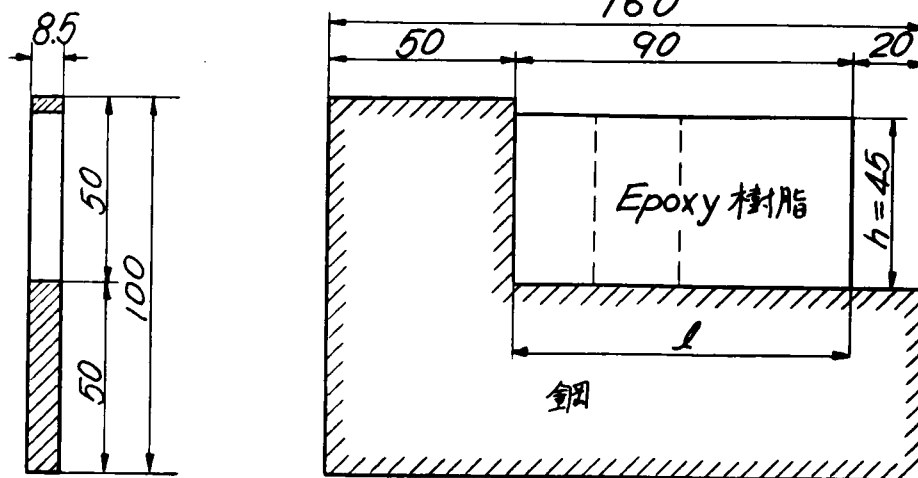


附圖-III.3.10 Compensation Line Method

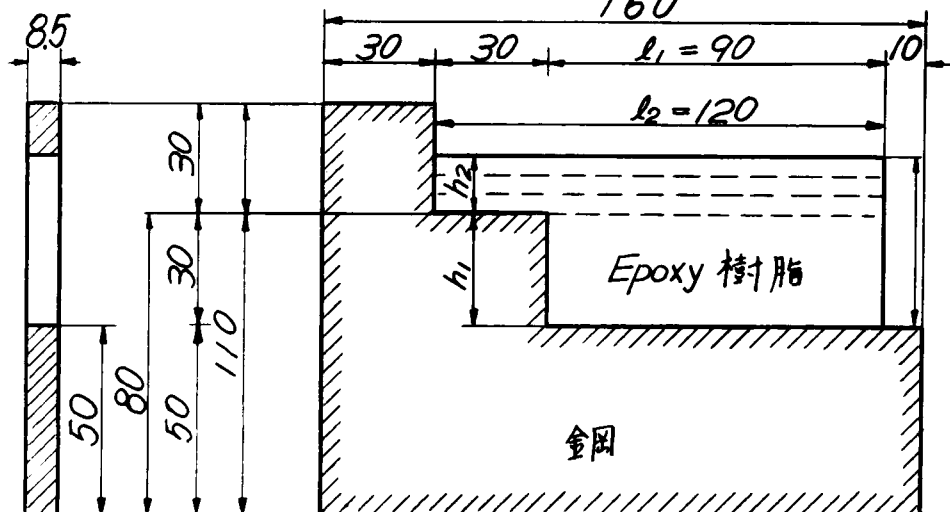


附圖—Ⅲ·3·11 光彈性模型

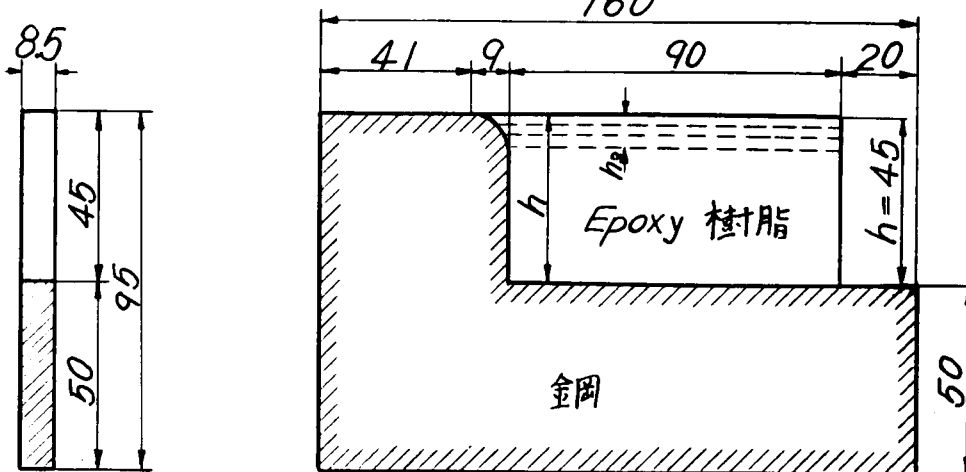
(a) 模型 A



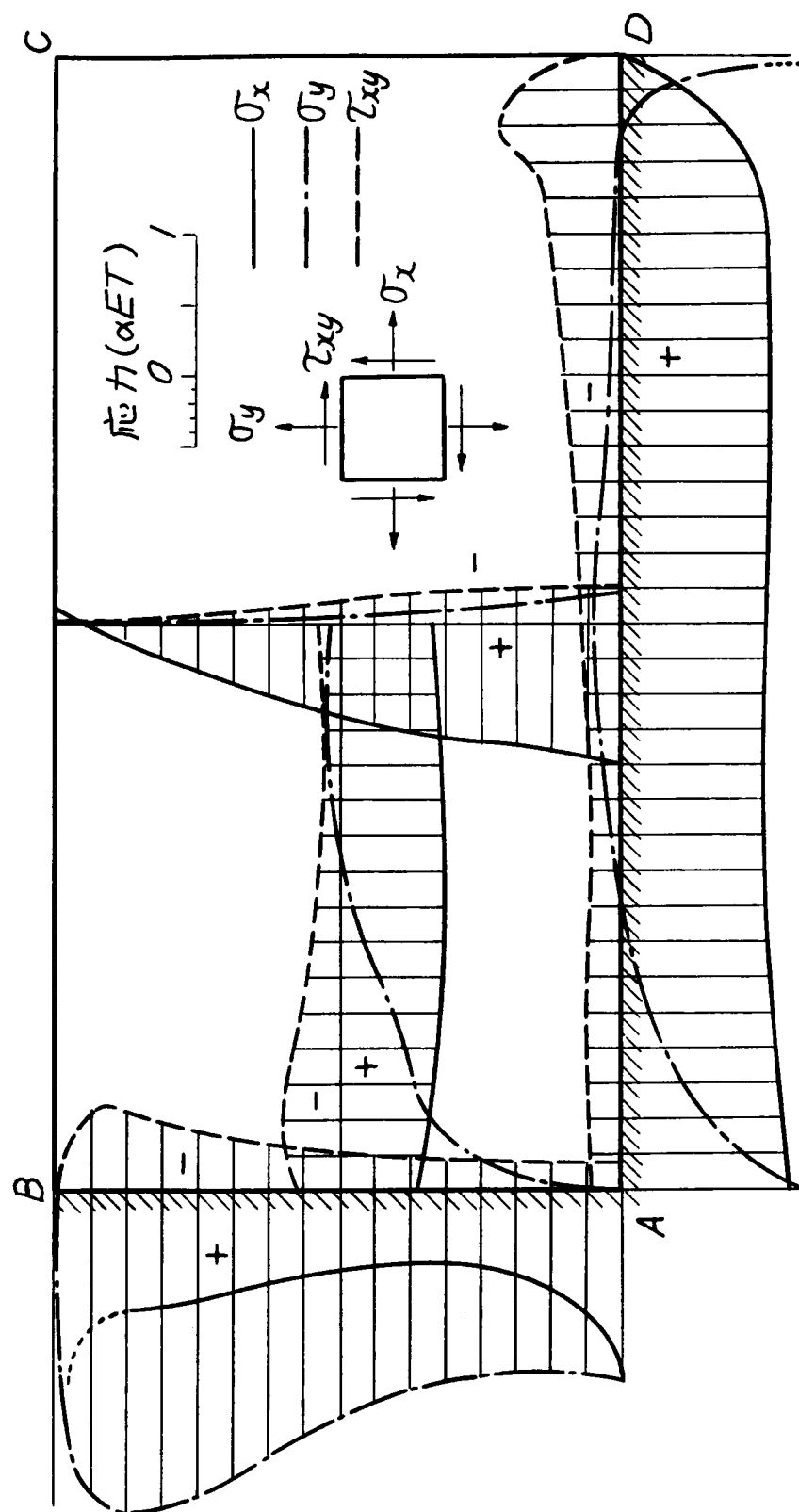
(b) 模型 B



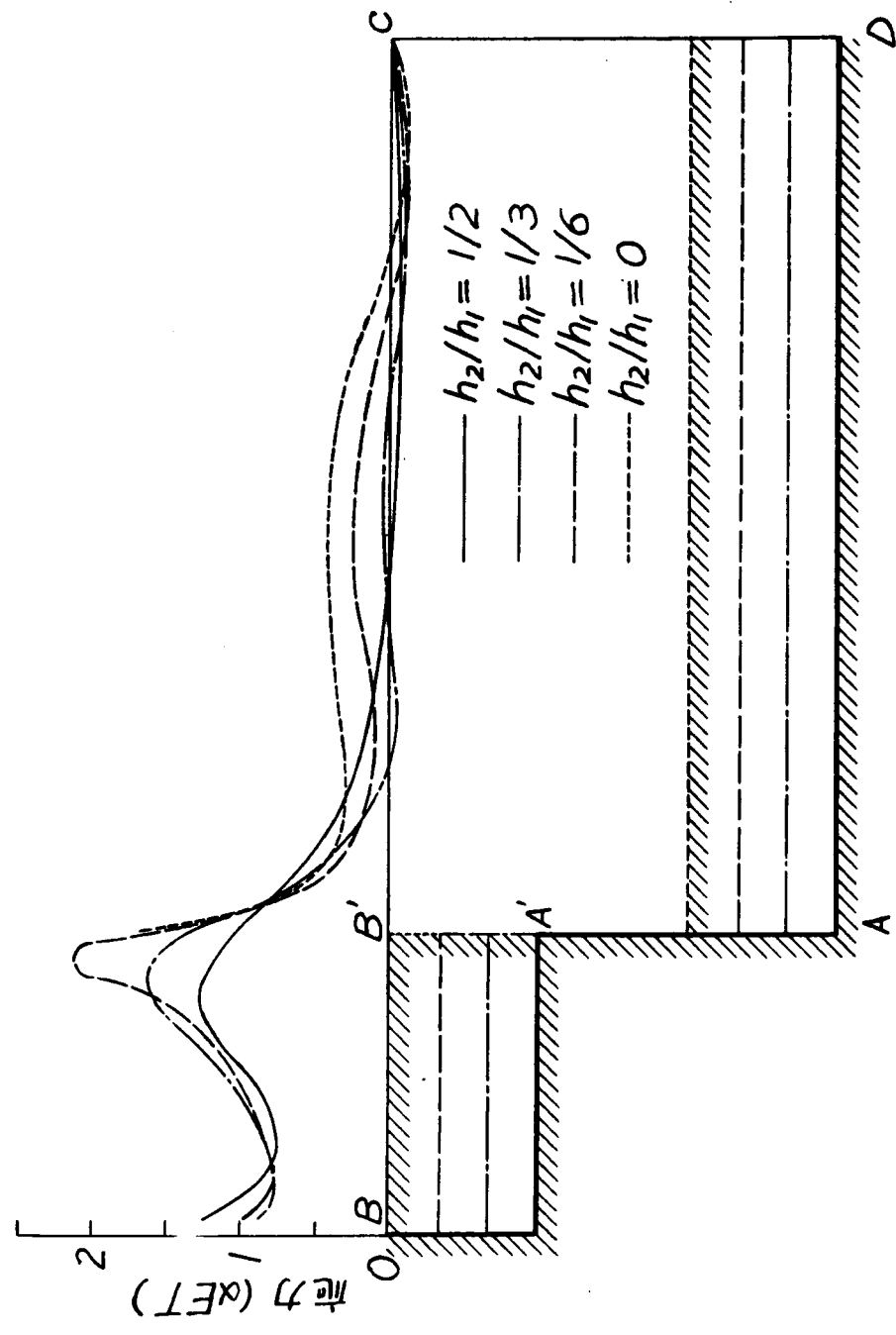
(c) 模型 C



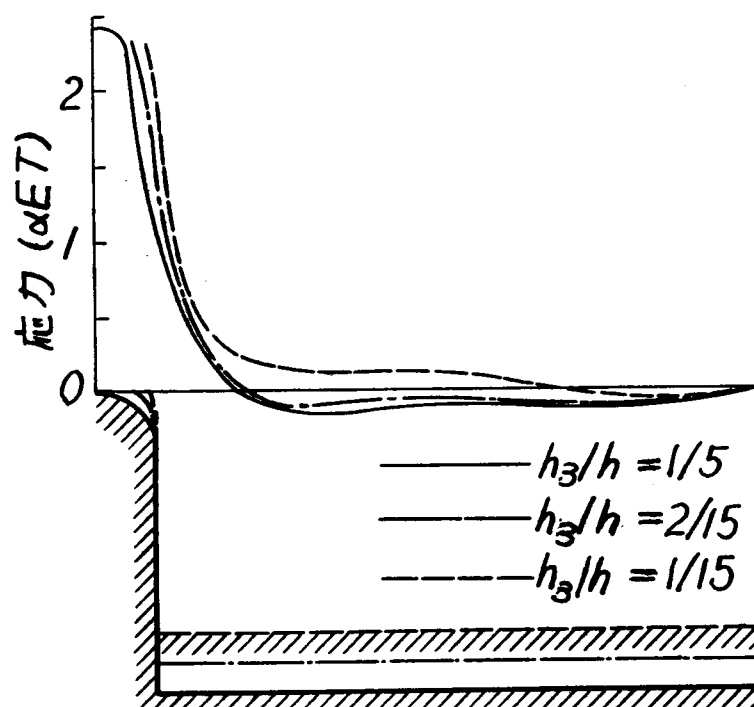
附图-III·3·12 模型Aの応力状態 ($h/l = 1/2$)



附図-Ⅲ・3・13 模型Bの上表面における応力



附圖-Ⅲ.3.14 模型Cの上表面における応力



附図-Ⅲ-4-1 型式ⅡFとⅢHの応力比較
 (自重, 水圧, 堆泥圧, 地震力, 温度降下を考えた場合)

$\sigma_{uA} = (-34.5)$ $\sigma_{dA} = (-34.5)$	$\sigma_{uA} = (-38.7)$ $\sigma_{dA} = (-30.3)$	$\sigma_{uc} = (-0.6)$ $\sigma_{dc} = (-0.6)$	EL. 795 EL. 820m	$ER2 = 3 \times 10^5 \text{ t/m}^2$
$\sigma_{uA} = -23.4$ $\sigma_{dA} = -46.0$	$\sigma_{uA} = -42.8$ $\sigma_{dA} = -26.4$	$\sigma_{uc} = 0.7$ $\sigma_{dc} = -4.5$	EL. 730	$ER2 = 3 \times 10^5$
$\sigma_{uA} = -21.1(-39.5)$ $\sigma_{dA} = -47.6(-39.5)$	$\sigma_{uA} = -44.8(-46.5)$ $\sigma_{dA} = -23.2(-32.5)$	$\sigma_{uc} = 7.0(-9.2)$ $\sigma_{dc} = -17.2(-0.7)$	EL. 600	$ER2 = 3 \times 10^5$
$\sigma_{uA} = -13.4(-38.4)$ $\sigma_{dA} = -56.0(-38.4)$	$\sigma_{uA} = -50.1(-48.4)$ $\sigma_{dA} = -19.9(-28.3)$	$\sigma_{uc} = 11.5(-10.3)$ $\sigma_{dc} = -29.6(-7.1)$	EL. 450	$ER1 = 5 \times 10^5$
$\sigma_{uA} = -6.3(-29.8)$ $\sigma_{dA} = -51.6(-29.8)$	$\sigma_{uA} = -46.5(-44.4)$ $\sigma_{dA} = -8.6(-14.9)$	$\sigma_{uc} = 12.2(-10.6)$ $\sigma_{dc} = -36.6(-11.9)$	EL. 300	$ER1 = 5 \times 10^5$
$\sigma_{uA} = -21.1(-39.5)$ $\sigma_{dA} = -47.6(-39.5)$		$\sigma_{uc} = 30.7(2.1)$ $\sigma_{dc} = -71.0(-26.5)$	EL. 150	$ER1 = 5 \times 10^5$

応力: kg/cm^2

ⅡFの値は括弧なし, ⅢHの値は括弧あり